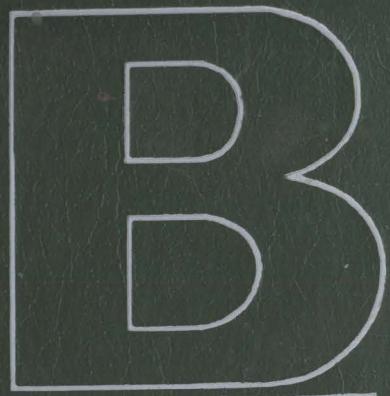


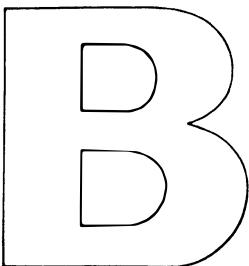
| ДИНАМИКА РАКЕТ

ДИНАМИКА РАКЕТ

МАШИНОСТРОЕНИЕ

для вузов





для вузов

ДИНАМИКА РАКЕТ

Под редакцией
академика В.П. Мишина

2-е издание,
переработанное и дополненное

*Допущено Государственным комитетом СССР
по народному образованию в качестве учебника
для студентов высших учебных заведений*



МОСКВА
«МАШИНОСТРОЕНИЕ»
1990

ББК 39.62-01я73
Д46
УДК 629.76/.78.01(075.8)

Авторы: К. А. Абгарян, Э. Л. Калязин, В. П. Мишин, И. М. Рапопорт

Рецензент академик С. К. Колесников

Д46 Динамика ракет: Учебник для студентов вузов / К. А. Абгарян,
Э. Л. Калязин, В. П. Мишин и др.: Под общ. ред. В. П. Мишина. –
2-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1990. – 464 с.: ил.
ISBN 5-217-00354-5

Изложены основы динамики ракет и космических аппаратов. Рассмотрены
методы исследования устойчивости и управляемости движения, выбора динами-
ческих характеристик ракет как объектов управления с учетом упругости конс-
трукции и подвижности жидкого топлива в баках.

Второе издание (1-е изд. 1969 г.) дополнено сведениями о способах ориен-
тации и угловой стабилизации космических аппаратов

Д 2705140400-418
038 (01) -90 253-89

ББК 39.62-01я73

ISBN 5-217-00354-5

© К.А. Абгарян, Э.Л. Калязин, В.П. Мишин и др.

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

В учебнике "Динамика ракет" рассмотрен сравнительно узкий класс летательных аппаратов – баллистические ракеты и ракеты-носители космических аппаратов.

Курс динамики баллистических ракет и ракет-носителей космических аппаратов можно разделить на две части. В первой рассматриваются траектории и программы полета ракет [6], во второй – их устойчивость и управляемость. Данный учебник охватывает задачи второй части курса динамики ракет, включая уравнения движения ракеты как деформируемой материальной системы, динамические свойства ракеты как объекта автоматического регулирования, методы исследования эффективности исполнительных органов системы управления и возможные пути стабилизации движения ракеты.

При рассмотрении движения ракет значительное внимание уделено учету упругости корпуса и подвижности топлива в баках¹, а при исследовании устойчивости и управляемости наряду с методами, основанными на "замораживании" коэффициентов уравнений, изложены инженерные методы исследования с учетом переменности коэффициентов.

На первом этапе проектирования современные баллистические и космические ракеты рассматриваются как недеформируемые материальные системы. На этом этапе решается вопрос о рациональной аэродинамической компоновке ракеты, о потребной эффективности исполнительных органов системы управления и рассматривается вопрос о стабилизации движения ракеты как недеформируемого тела.

На следующем этапе проектирования приближенно рассматриваются частотные характеристики ракеты как объекта автоматического регулирования с учетом упругости ее конструкции и подвижности жидкого топлива.

В дальнейшем осуществляется точный расчет частотных характеристик ракеты как объекта регулирования в рамках принятой динамической модели. На основе частотных характеристик проектируется автомат стабилизации.

При распределении материала по главам авторы старались по возможности придерживаться указанной последовательности выполнения динамических исследований ракеты.

При подготовке учебника переработаны материалы вышедшего в 1969 г. первого издания (авторы К. А. Абгарян, И. М. Рапопорт), добавлены новые большие разделы по динамике космических аппаратов (гл. 6) и продолженным колебаниям ракеты с жидкостным ракетным двигателем (ЖРД) (гл. 5).

¹ При учете подвижности жидкостей и упругости конструкции предполагается, что колебания жидкостей и упругие колебания малы, благодаря чему задачи решаются в линейной постановке.

В приложения включены новые материалы учебно-методического характера. В приложении 1 изложены экспериментальные методы определения динамических характеристик летательных аппаратов, приведены лабораторные работы по курсу динамики ракет.

Приложение 2 содержит описание курсовой работы "Исследование устойчивости движения ракеты".

При подготовке книги авторы предполагали, что читатель знаком с основами теории автоматического управления, аэродинамики, а также с определенными разделами высшей математики. В соответствии с действующими учебными программами все эти дисциплины предшествуют курсу динамики летательных аппаратов.

Авторы выражают глубокую признательность рецензенту учебника академику К. С. Колесникову, давшему много полезных советов и замечаний, а также благодарят доцента Андреева А. Н. и научных сотрудников Н. А. Иванова, О. П. Мальцева, А. Г. Меднова, В. Н. Куликова за участие в разработке и постановке лабораторных работ и курсового проекта по курсу динамики летательных аппаратов.

Академик В. П. Мишин

ГЛАВА 1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ РАКЕТЫ

§ 1.1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ ПЕРЕМЕННОГО СОСТАВА

В полете масса ракеты непрерывно уменьшается главным образом вследствие выработки топлива. В связи с этим возникает необходимость определять, какие частицы следует включать в состав ракеты и какие считать уже отделившимися от нее. В этом вопросе имеется некоторая неопределенность: не ясно, в какой именно момент частица, движущаяся в струе газов, вытекающих из камеры сгорания двигателя, покидает ракету. Эту неопределенность можно устранить, если ввести понятие контрольной поверхности, условно рассматриваемой как границы ракеты. В качестве такой поверхности, которую далее будем называть также оболочкой ракеты, удобно принять замкнутую поверхность, образуемую наружной поверхностью ракеты и выходными сечениями сопел двигателей. Массу ракеты составляют только те частицы, которые в данный момент находятся внутри этой поверхности.

Через некоторую часть контрольной поверхности происходит истечение массы, что приводит к изменению состава заключенных в ней материальных частиц. Поэтому при изучении движения ракету необходимо рассматривать как материальную систему переменного состава.

Классические теоремы динамики систем постоянного состава – теоремы об изменении количества движения и изменении кинетического момента – к системам переменного состава непосредственно не применимы. Однако, используя эти теоремы, можно вывести аналогичные теоремы и сформулировать принцип составления уравнений движения для систем переменного состава, в частности для ракет.

Рассмотрим замкнутую поверхность S_0 (рис. 1.1), которая ограничивает объем V , заполненный разнообразными (твердыми, жидкими, газообразными) частицами. С течением времени одни частицы выходят из объема V , а другие, наоборот, входят в него. Совокупность материальных частиц, заключенных в объеме V , является системой переменного состава. Обозначим эту систему через Σ .

Пусть поверхность S_0 и материальные частицы перемещаются относительно некоей инерциальной системы координат $O_i X_i Y_i Z_i$. Поверхность S_0 при этом может деформироваться. Количество движения и кинетический момент системы Σ относительно оточки O_i обозначим соответственно через K и L .

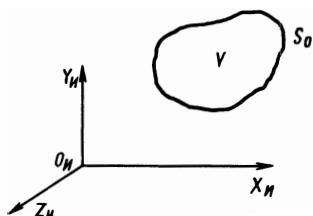


Рис. 1.1.

Наряду с системой Σ введем в рассмотрение систему постоянного состава Σ^* , состоящую только из тех материальных частиц, которые в некоторый фиксированный момент времени t заполняли объем V . Через K^* и L^* обозначим количество движения и кинетический момент системы Σ^* относительно точки O_u .

Системы переменного Σ и постоянного Σ^* состава в момент времени t совпадают. Поэтому

$$K^*(t) = K(t), \quad L^*(t) = L(t). \quad (1.1.1)$$

При $t_1 \neq t$ системы Σ и Σ^* будут состоять из разных частиц. Вследствие этого

$$K^*(t_1) = K(t_1) + k(t_1); \quad L^*(t_1) = L(t_1) + l(t_1), \quad (1.1.2)$$

где $k(t_1)$ и $l(t_1)$ – изменения соответственно количества движения и кинетического момента системы Σ , связанные с переменой ее состава за время $\Delta t = t_1 - t$.

Вычтем (1.1.1) из (1.1.2) и разделим полученную разность на Δt . Переходя далее к пределу при $t_1 \rightarrow t$ и учитывая при этом, что

$$k(t) = 0; \quad l(t) = 0, \quad (1.1.3)$$

получим

$$\frac{dK^*}{dt} = \frac{dK}{dt} + \frac{dk}{dt}; \quad \frac{dL^*}{dt} = \frac{dL}{dt} + \frac{dl}{dt}. \quad (1.1.4)$$

Производные dK/dt , dl/dt представляют собой секундные расходы количества движения и кинетического момента через поверхность S_0 в момент времени t .

Соотношения (1.1.4) имеют кинематический характер и справедливы для любой системы координат (инерциальной или неинерциальной).

В рассматриваемой инерциальной системе координат $O_u X_u Y_u Z_u$ к системе Σ^* как к системе постоянного состава применимы следующие теоремы классической динамики об изменении количества движения и кинетического момента:

1) производная по времени от количества движения системы равна сумме всех действующих на систему внешних сил;

2) производная по времени от кинетического момента системы относительно какого-либо неподвижного центра (в данном случае относительно точки O_u) равна сумме моментов всех внешних сил, действующих на систему относительно того же центра.

На основании этих теорем в фиксированной момент времени t

$$\frac{dK^*}{dt} = F; \quad \frac{dL^*}{dt} = M, \quad (1.1.5)$$

где \mathbf{F} и \mathbf{M} – соответственно главный вектор и главный момент всех внешних сил, действующих в момент времени t на систему Σ^* , а значит, и на систему Σ .

Из равенств (1.1.4) и (1.1.5) следуют равенства

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{d\mathbf{k}}{dt}; \quad \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M} - \frac{d\mathbf{l}}{dt}. \quad (1.1.6)$$

Соотношения (1.1.6), полученные для момента времени t , остаются справедливыми и для любого другого момента времени t' , если считать, что \mathbf{F} и \mathbf{M} – главный вектор и главный момент всех внешних сил, действующих на систему Σ , а $d\mathbf{k}/dt$ и $d\mathbf{l}/dt$ – секундные расходы количества движения и кинетического момента через поверхность S_0 в рассматриваемый период времени t' .

Формулы (1.1.6) представляют собой математическую запись теорем об изменении количества движения и кинетического момента системы переменного состава.

§ 1.2. ПЕРЕНОСНОЕ ДВИЖЕНИЕ СИСТЕМЫ ПЕРЕМЕННОГО СОСТАВА

В дополнение к основной системе $O_i X_i Y_i Z_i$ введем еще систему координат $AXYZ$ (рис. 1.2) и представим абсолютное движение материальной частицы с массой dm как сложное, состоящее из относительного (движения частицы относительно системы координат $AXYZ$) и переносного (движения частицы вместе с осями $AXYZ$ относительно инерциальной системы $O_i X_i Y_i Z_i$). Введем следующие обозначения: \mathbf{v} , \mathbf{v}_e , \mathbf{v}_r – абсолютная, переносная и относительная скорости частицы; \mathbf{w} , \mathbf{w}_e , \mathbf{w}_r – абсолютное, переносное и относительное ускорения; \mathbf{w}_k – кориолисово ускорение; δ/dt – производная по времени по отношению к системе координат $AXYZ$ (относительная производная).

Количество движения системы постоянного состава Σ^* в системе координат $O_i X_i Y_i Z_i$ можно представить в виде

$$K^* = \int_{\Sigma^*} \mathbf{v} dm. \quad (1.2.1)$$

Символ \int обозначает суммирование по всем частицам системы Σ^* .

Дифференцируя (1.2.1) по t , получим

$$\frac{dK^*}{dt} = \int_{\Sigma^*} \mathbf{w} dm. \quad (1.2.2)$$

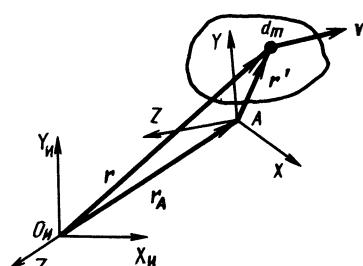


Рис. 1.2.

По теореме сложения ускорений

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_r + \mathbf{w}_e + \mathbf{w}_k.$$

Поэтому

$$\frac{d\mathbf{K}^*}{dt} = \int_{\Sigma^*} \mathbf{w}_r dm + \int_{\Sigma^*} \mathbf{w}_e dm + \int_{\Sigma^*} \mathbf{w}_k dm. \quad (1.2.3)$$

Отсюда для момента времени t , когда системы Σ и Σ^* совпадают, используя соотношения (1.1.5), получаем

$$\int_{\Sigma} \mathbf{w}_e dm = \mathbf{F} - \int_{\Sigma} \mathbf{w}_r dm + \mathbf{F}_k, \quad (1.2.4)$$

где $\mathbf{F}_k = - \int_{\Sigma} \mathbf{w}_k dm$ – главный вектор кориолисовых сил инерции, действующих в момент времени t на систему Σ .

Количество движения системы Σ^* в системе координат $AXYZ$ будет

$$\mathbf{K}_r^* = \int_{\Sigma^*} \mathbf{v}_r dm.$$

Отсюда, учитывая, что

$$\mathbf{w}_r = \delta \mathbf{v}_r / dt,$$

будем иметь

$$\frac{\delta \mathbf{K}_r^*}{dt} = \int_{\Sigma^*} \mathbf{w}_r dm,$$

а в момент времени t

$$\frac{\delta \mathbf{K}_r^*}{dt} = \int_{\Sigma} \mathbf{w}_r dm. \quad (1.2.5)$$

С другой стороны, для этого момента времени справедливо кинематическое соотношение (1.1.4), которое в системе $AXYZ$ запишется следующим образом:

$$\frac{\delta \mathbf{K}_r^*}{dt} = \frac{\delta \mathbf{K}_r}{dt} + \frac{\delta \mathbf{k}_r}{dt}, \quad (1.2.6)$$

где K_r – количество движения системы переменного состава Σ в системе координат $AXYZ$; $\delta k_r/dt$ – относительный секундный расход количества движения через поверхность S_0 в момент времени t .

С учетом (1.2.6) и (1.2.5) из (1.2.4) находим

$$\int_{\Sigma} w_e dm = \mathbf{F} + \left(-\frac{\delta k_r}{dt} \right) + \mathbf{F}_K + \left(-\frac{\delta K_r}{dt} \right). \quad (1.2.7)$$

Аналогичный результат можно получить из теоремы об изменении кинетического момента системы переменного состава.

Кинетический момент системы Σ^* относительно точки O_u (см. рис. 1.2)

$$\mathbf{L}^* = \int_{\Sigma^*} \mathbf{r} \times \mathbf{v} dm. \quad (1.2.8)$$

Отсюда

$$\frac{d \mathbf{L}^*}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Sigma^*} \mathbf{r} \times \mathbf{v} dm = \int_{\Sigma^*} \frac{d \mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{v} dm + \int_{\Sigma^*} \mathbf{r} \times \mathbf{w} dm.$$

Интеграл $\int_{\Sigma^*} \frac{d \mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{v} dm = 0$, так как $\frac{d \mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0$, и, значит,

$$\frac{d \mathbf{L}^*}{dt} = \int_{\Sigma^*} \mathbf{r} \times \mathbf{w} dm = \int_{\Sigma^*} \mathbf{r}' \times \mathbf{w} dm + \int_{\Sigma^*} \mathbf{r}_A \times \mathbf{w} dm. \quad (1.2.9)$$

Но, учитывая формулу (1.2.2), можно записать

$$\int_{\Sigma^*} \mathbf{r}_A \times \mathbf{w} dm = \mathbf{r}_A \times \int_{\Sigma^*} \mathbf{w} dm = \mathbf{r}_A \times \frac{d \mathbf{K}^*}{dt}.$$

Поэтому

$$\frac{d \mathbf{L}^*}{dt} = \int_{\Sigma^*} \mathbf{r}' \times \mathbf{w}_r dm + \int_{\Sigma^*} \mathbf{r}' \times \mathbf{w}_e dm + \int_{\Sigma^*} \mathbf{r}' \times \mathbf{w}_K dm + \mathbf{r}_A \times \frac{d \mathbf{K}^*}{dt}. \quad (1.2.10)$$

Отсюда для момента времени t , учитывая (1.1.5), получаем

$$\int_{\Sigma} \mathbf{r}' \times \mathbf{w}_e dm = \mathbf{M} - \mathbf{r}_A \times \mathbf{F} - \int_{\Sigma} \mathbf{r}' \times \mathbf{w}_r dm + \mathbf{M}_{KA}, \quad (1.2.11)$$

где $\mathbf{M}_{\kappa A} = - \int_{\Sigma} \mathbf{r}' \times \mathbf{w}_K dm$ – главный момент кориолисовых сил инерции,

действующих в момент времени t на систему Σ .

Главный момент внешних сил, действующих в момент времени t на систему Σ (и на систему Σ^*) относительно точки A , будет

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{M} - \mathbf{r}_A \times \mathbf{F}.$$

Поэтому уравнение (1.2.11) можно представить в виде

$$\int_{\Sigma} \mathbf{r}' \times \mathbf{w}_e dm = \mathbf{M}_A - \int_{\Sigma} \mathbf{r}' \times \mathbf{w}_r dm + \mathbf{M}_{\kappa A}. \quad (1.2.12)$$

Кинетический момент системы Σ^* относительно точки A в системе координат $AXYZ$ равен

$$\mathbf{L}_{rA}^* = \int_{\Sigma^*} \mathbf{r}' \times \mathbf{v}_r dm,$$

а его относительная производная

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathbf{L}_{rA}^*}{dt} &= \frac{\delta}{dt} \int_{\Sigma^*} \mathbf{r}' \times \mathbf{v}_r dm = \int_{\Sigma^*} \mathbf{v}_r \times \mathbf{v}_r dm + \\ &+ \int_{\Sigma^*} \mathbf{r}' \times \mathbf{w}_r dm = \int_{\Sigma^*} \mathbf{r}' \times \mathbf{w}_r dm. \end{aligned}$$

В фиксированный момент времени t

$$\frac{\delta \mathbf{L}_{rA}^*}{dt} = \int_{\Sigma} \mathbf{r}' \times \mathbf{w}_r dm. \quad (1.2.13)$$

С другой стороны,

$$\frac{\delta \mathbf{L}_{rA}^*}{dt} = \frac{\delta \mathbf{L}_{rA}}{dt} + \frac{\delta \mathbf{l}_{rA}}{dt}, \quad (1.2.14)$$

где \mathbf{L}_{rA} – кинетический момент системы переменного состава относительно точки A в системе координат $AXYZ$; $\delta \mathbf{l}_{rA}/dt$ – относительный секундный расход кинетического момента через поверхность S_0 .

Из выражений (1.2.12) ... (1.2.14) получаем

$$\int_{\Sigma} \mathbf{r}' \times \mathbf{w}_e dm = \mathbf{M}_A + \left(- \frac{\delta \mathbf{l}_{rA}}{dt} \right) + \mathbf{M}_{\kappa A} + \left(- \frac{\delta \mathbf{L}_{rA}}{dt} \right). \quad (1.2.15)$$

Равенства (1.2.7) и (1.2.15) описывают переносное движение системы Σ и представляют собой другую запись теорем об изменении количества движения и кинетическом моменте системы переменного состава.

§ 1.3. СИСТЕМЫ ПЕРЕМЕННОГО СОСТАВА С ТВЕРДОЙ ОБОЛОЧКОЙ. ПРИНЦИП ЗАТВЕРДЕВАНИЯ

Формулам (1.2.7) и (1.2.15) можно придать другой вид. Для этого рассмотрим некоторое фиктивное твердое тело S , которое получилось бы, если бы система переменного состава Σ в момент времени t как бы затвердела, т. е. прекратилось бы движение частиц относительно системы координат $AXYZ$. Переносные ускорения частиц относительно системы Σ равны абсолютным ускорениям частиц полученного таким образом фиктивного твердого тела. Поэтому, обозначая через v^S скорость частицы твердого тела S , будем иметь

$$\frac{d v^S}{dt} = w_e.$$

В момент времени t распределения масс в фиктивном твердом теле и в системе Σ одинаковы. Поэтому

$$\int_{\Sigma} w_e dm = \int_S w_e dm = \int_S \frac{d v^S}{dt} dm = \frac{d}{dt} \int_S v^S dm = \frac{d K^S}{dt},$$

где K^S – количество движения фиктивного твердого тела.

Аналогично

$$\int_{\Sigma} r' \times w_e dm = \int_S r' \times w_e dm = \int_S r' \times \frac{d v^S}{dt} dm = \frac{d L_A^S}{dt} - \int_S \frac{d r'}{dt} \times v^S dm,$$

где $L_A^S = \int_S r' \times v^S dm$ – кинетический момент фиктивного твердого тела относительно полюса A .

С учетом полученных соотношений равенства (1.2.7) и (1.2.15) можно заменить равенствами

$$\frac{d K^S}{dt} = F + \left(- \frac{\delta k_r}{dt} \right) + F_K + \left(- \frac{\delta K_r}{dt} \right), \quad (1.3.1)$$

$$\frac{d L_A^S}{dt} = M_A + \left(- \frac{\delta L_{rA}}{dt} \right) + M_{KA} + \left(- \frac{\delta L_{rA}}{dt} \right) + \int_S \frac{d r'}{dt} \times v^S dm. \quad (1.3.2)$$

Центр масс твердого тела S обозначим через C и поместим в него начало системы координат $AXYZ$. В этом случае вместо (1.3.2) будем иметь

$$\frac{d \mathbf{L}_C^S}{dt} = \mathbf{M}_C + \left(-\frac{\delta \mathbf{l}_r C}{dt} \right) + \mathbf{M}_K C + \left(-\frac{\delta \mathbf{L}_r C}{dt} \right). \quad (1.3.3)$$

Действительно, так как $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_A$ (см. рис. 1.2) и для частиц фиктивного твердого тела $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}^S$, то

$$\begin{aligned} \int_S \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \times \mathbf{v}^S dm &= \int_S \mathbf{v}^S \times \mathbf{v}^S dm - \int_S \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} \times \mathbf{v}^S dm = \\ &= - \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} \times \int_S \mathbf{v}^S dm = - \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} \times \frac{d\mathbf{r}_C}{dt} \int_S dm \rightarrow 0 \text{ при } A \rightarrow C. \end{aligned}$$

Меняя момент затвердевания t , получим различные твердые тела S , которые отличаются друг от друга значением массы и распределением ее в пространстве. Различные тела S можно рассматривать как одно фиктивное твердое тело, у которого с течением времени возникают или исчезают материальные частицы, неподвижные относительно системы координат $CXYZ$.

Рассмотрим теперь систему переменного состава, ограниченную твердой оболочкой S_0 , с которой связана система координат $AXYZ$. При этом абсолютные движения оболочки S_0 и фиктивного твердого тела S совпадают. Поэтому уравнения (1.3.1) и (1.3.2) [или (1.3.3)], записанные для фиктивного твердого тела, справедливы и для системы переменного состава с твердой оболочкой S_0 .

Относительные производные в правых частях уравнений (1.3.1) – (1.3.3) в этом случае имеют следующий физический смысл.

Пусть $d\sigma$ – элемент поверхности S_0 . Секундный расход массы через этот элемент в момент времени t равен $\rho v_{rn} d\sigma$, где ρ – плотность среды, а v_{rn} – нормальная составляющая относительной скорости среды. Секундный расход количества движения через элемент $d\sigma$ в системе, неизменно связанной с оболочкой, равен $v_r \rho v_{rn} d\sigma$. Относительный секундный расход количества движения через поверхность S_0 равен

$$\frac{\delta \mathbf{k}_r}{dt} = \iint_{S_0} \rho v_{rn} \mathbf{v}_r d\sigma, \quad (1.3.4)$$

$$\text{или } \frac{\delta \mathbf{k}_r}{dt} = m_{\text{сек}} \mathbf{u}, \quad (1.3.5)$$

где $m_{\text{сек}} = \iint_{S_0} \rho v_{rn} d\sigma$ – секундный расход массы через поверхность S_0 ;

\mathbf{u} – некоторая средняя по поверхности S_0 скорость среды относительно оболочки или средняя скорость расхода массы через поверхность S_0 .

Вектор $\mathbf{v}_r, \rho \mathbf{v}_{rn}, d\sigma$ имеет размерность силы и направлен по относительной скорости частицы. Вектор $-\mathbf{v}_r, \rho \mathbf{v}_{rn}, d\sigma$ имеет противоположное направление и является элементарной реактивной силой. В соответствии с этим вектор $-\delta \mathbf{k}_r/dt$ представляет собой главный вектор всех реактивных сил, а $-\delta \mathbf{L}_{rC}/dt$ – главный момент всех реактивных сил относительно полюса C .

Далее допустим, что в каждой точке, неподвижной относительно оболочки, плотность среды ρ и скорость среды \mathbf{v}_r с течением времени не меняются. Тогда система переменного состава имеет постоянную массу, постоянное количество движения \mathbf{K}_r и постоянный кинетический момент \mathbf{L}_{rC} относительно системы координат XYZ :

$$\frac{\delta \mathbf{K}_r}{dt} = 0; \quad \frac{\delta \mathbf{L}_{rC}}{dt} = 0.$$

В общем случае, если внутри оболочки меняются плотность среды и скорость частиц относительно оболочки, возникают так называемые вариационные силы. Векторы $-\delta \mathbf{K}_r/dt$ и $-\delta \mathbf{L}_{rC}/dt$ представляют собой главный вектор и главный момент этих вариационных сил.

Из вышеизложенного вытекает принцип затвердевания для системы переменного состава с твердой оболочкой: уравнения движения твердой оболочки системы переменного состава Σ в произвольный момент времени t могут быть записаны в виде уравнений движения твердого тела (постоянного состава), если считать, что система переменного состава Σ затвердела в момент времени t и к полученному таким образом фиктивному твердому телу приложены: 1) внешние силы, действующие на систему Σ , 2) реактивные силы, 3) силы Кориолиса и 4) вариационные силы.

§ 1.4. ПРИНЦИП ЗАТВЕРДЕВАНИЯ ДЛЯ РАКЕТЫ

Будем считать, что корпус ракеты в полете не деформируется¹. Тогда принцип затвердевания, сформулированный в предыдущем параграфе, может быть применен и к ракете. Однако для ракеты формулировку этого принципа целесообразно несколько изменить.

Дело в том, что реактивную силу $-\delta \mathbf{k}_r/dt$ непосредственно измерить не удается, поэтому ее обычно объединяют с силами, возникающими вследствие атмосферного давления на корпус ракеты и давления в струе газов в выходном сечении сопла двигателя, а также с вариационными силами. Целесообразность такого объединения иллюстрирует следующий пример.

Ракета с твердой оболочкой и работающим двигателем установлена неподвижно в горизонтальном положении на испытательном стенде.

¹ В действительности в полете под действием внешних сил корпус деформируется и, значит, деформируется и введенная выше контрольная поверхность (оболочка ракеты). Учет влияния деформации конструкции ракеты на характер ее движения приводится в гл. 4

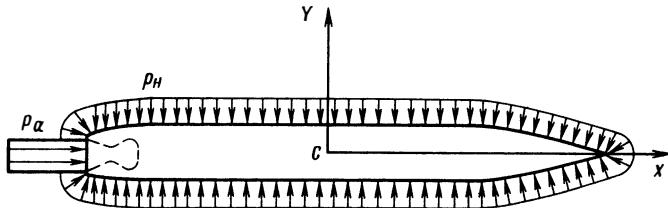


Рис. 1.3

Так как система координат $CXYZ$, связанная с твердой оболочкой, неподвижна, то

$$\mathbf{K}^S = 0; \quad \mathbf{F}_K = 0$$

и уравнение (1.3.1) в данном случае принимает вид

$$\mathbf{F} + \left(-\frac{\delta \mathbf{k}_r}{dt} \right) + \left(-\frac{\delta \mathbf{K}_r}{dt} \right) = 0. \quad (1.4.1)$$

На ракету действуют следующие внешние силы: вес; реакция опор, на которых закреплена ракета; силы, возникающие вследствие разности атмосферного давления и давления в выходном сечении сопла, приложенные к оболочке ракеты.

Пусть \mathbf{G} – вес ракеты, а \mathbf{P} – равнодействующая сил, возникающих при работе двигателя. Ракета давит на опоры с силой $\mathbf{G} + \mathbf{P}$. Реакция опор, приложенная к ракете, равна $\mathbf{R} = -(\mathbf{G} + \mathbf{P})$.

Равнодействующую сил атмосферного давления и давления в выходном сечении сопла обозначим через \mathbf{F}_* (рис. 1.3). Модуль этого вектора

$$F_* = (p_a - p_H) S_a,$$

где p_a – давление на срезе сопла; p_H – атмосферное давление; S_a – площадь выходного сечения сопла.

Таким образом, в рассматриваемом случае главный вектор всех внешних сил равен

$$\mathbf{F} = \mathbf{G} + \mathbf{R} + \mathbf{F}_* = -\mathbf{P} + \mathbf{F}_*.$$

Подставляя это выражение в уравнение (1.4.1), получим

$$\mathbf{P} = \left(-\frac{\delta \mathbf{k}_r}{dt} \right) + \mathbf{F}_* + \left(-\frac{\delta \mathbf{K}_r}{dt} \right). \quad (1.4.2)$$

С помощью приборов на стенде измеряют силу давления ракеты на опору, поэтому в результате стендовых испытаний можно определить силу \mathbf{P} ,

которая, как видно из полученного выражения, является равнодействующей реактивных, вариационных и внешних сил, вызванных несопадением атмосферного давления с давлением газа в выходном сечении сопла.

Силу \mathbf{P} , определенную равенством (1.4.2), называют тягой двигателя.

Подразумевая теперь под \mathbf{F} и \mathbf{M}_C соответственно главный вектор и главный момент всех внешних сил, кроме сил атмосферного давления и давления в выходном сечении сопла, уравнения (1.3.1) и (1.3.3) можно записать следующим образом:

$$d\mathbf{K}^S/dt = \mathbf{F} + \mathbf{P} + \mathbf{F}_k; \quad (1.4.3)$$

$$d\mathbf{L}_C^S/dt = \mathbf{M}_C + \mathbf{M}_{PC} + \mathbf{M}_{kC}, \quad (1.4.4)$$

где $\mathbf{M}_{PC} = \left(- \frac{\delta \mathbf{l}_r C}{dt} \right) + \mathbf{M}_{*C} + \left(- \frac{\delta \mathbf{L}_r C}{dt} \right)$; \mathbf{M}_{*C} – главный момент сил,

обусловленных атмосферным давлением на корпус ракеты и давлением газа в выходном сечении сопла двигателя, относительно центра масс C .

На основании уравнений (1.4.3) и (1.4.4) можно сформулировать принцип затвердевания для ракеты: уравнения движения твердой оболочки в произвольный момент времени t могут быть записаны в виде уравнений движения твердого тела (постоянного состава), если представить себе, что в момент времени t ракета затвердела и к полученному таким образом фиктивному твердому телу приложены: внешние силы, действующие на ракету (кроме силы \mathbf{F}_*), тяга реактивного двигателя, силы Кориолиса.

§ 1.5. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЦЕНТРА МАСС РАКЕТЫ

Количество движения фиктивного твердого тела S , которое получается в результате затвердевания ракеты в момент времени t , определим по формуле

$$\mathbf{K}^S = \int_S \mathbf{v}^S dm = m \mathbf{V}_C^S, \quad (1.5.1)$$

где m – масса фиктивного твердого тела, равная массе ракеты в момент времени t ; \mathbf{V}_C^S – скорость центра инерции фиктивного твердого тела.

Согласно принципу затвердевания производную $d\mathbf{K}^S/dt$ в уравнении (1.4.3) следует вычислять аналогично случаю твердого тела с постоянной массой:

$$\frac{d\mathbf{K}^S}{dt} = m \frac{d\mathbf{V}_C^S}{dt} = m \mathbf{w}_C^S, \quad (1.5.2)$$

где \mathbf{w}_C^S – ускорение центра масс твердого тела S .

Подставляя (1.5.2) в (1.4.3), получим

$$m \mathbf{w}_C^S = \mathbf{F} + \mathbf{P} + \mathbf{F}_k. \quad (1.5.3)$$

С расходом топлива центр масс ракеты перемещается относительно корпуса с некоторой скоростью \mathbf{V}_{Cr} и ускорением \mathbf{w}_{Cr} . Рассматривая движение центра масс вместе с корпусом ракеты как переносное движение, а движение относительно корпуса как относительное, для абсолютных скорости \mathbf{V}_C и ускорения \mathbf{w}_C центра масс можно записать следующие выражения:

$$\mathbf{V}_C = \mathbf{V}_{Ce} + \mathbf{V}_{Cr}; \quad \mathbf{w}_C = \mathbf{w}_{Ce} + \mathbf{w}_{Cr} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_{Cr}, \quad (1.5.4)$$

где \mathbf{V}_{Ce} , \mathbf{w}_{Ce} – соответственно переносные скорость и ускорение центра масс ракеты; $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость корпуса ракеты.

В момент времени t (в момент затвердевания ракеты) центры масс ракеты и тела S совпадают. Поэтому в этот момент

$$\mathbf{V}_{Ce} = \mathbf{V}_C^S; \quad \mathbf{w}_{Ce} = \mathbf{w}_C^S. \quad (1.5.5)$$

Исключая в уравнении (1.5.3) \mathbf{w}_C^S с помощью равенств (1.5.4) и (1.5.5), будем иметь

$$m \mathbf{w}_C = \mathbf{F} + \mathbf{P} + \mathbf{F}_k + m \mathbf{w}_{Cr} + 2m \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_{Cr}. \quad (1.5.6)$$

Последнее соотношение представляет собой уравнение движения центра масс ракеты в векторной форме. Слагаемые $m \mathbf{w}_{Cr}$ и $2m \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_{Cr}$, обусловлены движением центра масс относительно корпуса и имеют размерность силы.

В дальнейшем для удобства уравнение (1.5.6) будем записывать в виде

$$m \mathbf{w}_C = \Sigma \mathbf{F}, \quad (1.5.7)$$

или

$$m d\mathbf{V}_C / dt = \Sigma \mathbf{F} \quad (1.5.8)$$

обозначая через $\Sigma \mathbf{F}$ правую часть равенства (1.5.6) – сумму всех сил, приложенных к ракете.

При практических исследованиях векторные уравнения движения ракеты заменяют эквивалентной системой трех скалярных уравнений, которую получают, проектируя векторное уравнение на какие-нибудь три взаимно перпендикулярные оси.

Спроектируем уравнение (1.5.8) на оси подвижной прямоугольной системы координат $OXYZ$, начало которой (точка O) совпадает с центром масс ракеты C .

Если $d\mathbf{a}/dt$ – производная какого-либо вектора \mathbf{a} относительно системы $O_{II}X_{II}Y_{II}Z_{II}$, $d\mathbf{a}/dt$ – производная этого вектора относительно системы $OXYZ$ и ω – угловая скорость системы $OXYZ$ в системе $O_{II}X_{II}Y_{II}Z_{II}$, то

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{\delta \mathbf{a}}{dt} + \omega \times \mathbf{a}. \quad (1.5.9)$$

Проекции вектора $d\mathbf{a}/dt$ на оси OX , OY , OZ определяются по формулам

$$\begin{aligned} (\frac{d\mathbf{a}}{dt})_x &= \frac{da_x}{dt} + \omega_y a_z - \omega_z a_y; \\ (\frac{d\mathbf{a}}{dt})_y &= \frac{da_y}{dt} + \omega_z a_x - \omega_x a_z; \\ (\frac{d\mathbf{a}}{dt})_z &= \frac{da_z}{dt} + \omega_x a_y - \omega_y a_x, \end{aligned} \quad (1.5.10)$$

где a_x, a_y, a_z – проекции вектора \mathbf{a} на оси OX, OY, OZ ; $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – проекции вектора ω на те же оси (рис. 1.4).

Дифференцируя выражение

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k},$$

получим

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{da_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{da_z}{dt} \mathbf{k} + a_x \frac{d\mathbf{i}}{dt} + a_y \frac{d\mathbf{j}}{dt} + a_z \frac{d\mathbf{k}}{dt}. \quad (1.5.11)$$

Поскольку $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – единичные векторы, то их производные определяют скорость вращения концов этих векторов:

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \omega \times \mathbf{i}; \quad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \omega \times \mathbf{j}; \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \omega \times \mathbf{k}.$$

Учитывая, что относительная производная вектора \mathbf{a} равна

$$\frac{\delta \mathbf{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{da_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{da_z}{dt} \mathbf{k},$$

из (1.5.11) непосредственно получаем формулу (1.5.9).

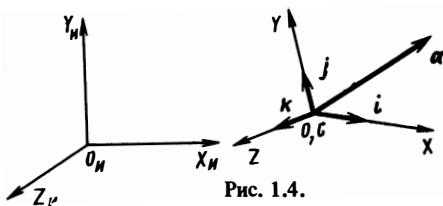


Рис. 1.4.

Вычислим векторное произведение

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = (\omega_y a_z - \omega_z a_y) \mathbf{i} + (\omega_z a_x - \omega_x a_z) \mathbf{j} + (\omega_x a_y - \omega_y a_x) \mathbf{k},$$

входящее в уравнение (1.5.9), и, объединяя члены, содержащие один и тот же единичный вектор, получим

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{a}}{dt} &= \left(\frac{da_x}{dt} + \omega_y a_z - \omega_z a_y \right) \mathbf{i} + \left(\frac{da_y}{dt} + \omega_z a_x - \omega_x a_z \right) \mathbf{j} + \\ &+ \left(\frac{da_z}{dt} + \omega_x a_y - \omega_y a_x \right) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Отсюда вытекают равенства (1.5.10).

Используя формулу (1.5.10), векторное уравнение (1.5.8) можно заменить следующими тремя скалярными уравнениями:

$$\begin{aligned} m \left(\frac{dV_{Cx}}{dt} + \omega_y V_{Cz} - \omega_z V_{Cy} \right) &= \Sigma F_x; \\ m \left(\frac{dV_{Cy}}{dt} + \omega_z V_{Cx} - \omega_x V_{Cz} \right) &= \Sigma F_y; \\ m \left(\frac{dV_{Cz}}{dt} + \omega_x V_{Cy} - \omega_y V_{Cx} \right) &= \Sigma F_z, \end{aligned} \tag{1.5.12}$$

где V_{Cx} , V_{Cy} , V_{Cz} — проекции вектора скорости центра масс ракеты на оси OX , OY , OZ ; ΣF_x , ΣF_y , ΣF_z — суммы проекций всех сил, приложенных к ракете, на оси OX , OY , OZ .

§ 1.6. УРАВНЕНИЯ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ РАКЕТЫ

Опуская индекс “ C ”, представим уравнение (1.4.4) в виде

$$d\mathbf{L}^S/dt = \Sigma \mathbf{M}, \tag{1.6.1}$$

где $\Sigma \mathbf{M} = \mathbf{M}_C + \mathbf{M}_{PC} + \mathbf{M}_{kC}$.

Спроектируем уравнение (1.6.1) на оси подвижной системы координат.

Пусть L_x^S , L_y^S , L_z^S – проекции кинетического момента фиктивного твердого тела на оси подвижной системы координат, а ΣM_x , ΣM_y , ΣM_z – суммы проекций моментов сил, действующих на ракету, на оси подвижной системы координат. Тогда, используя формулы (1.5.10), вместо векторного уравнения (1.6.1) получим следующую эквивалентную систему трех скалярных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d L_x^S}{dt} + \omega_y L_z^S - \omega_z L_y^S &= \Sigma M_x; \\ \frac{d L_y^S}{dt} + \omega_z L_x^S - \omega_x L_z^S &= \Sigma M_y; \\ \frac{d L_z^S}{dt} + \omega_x L_y^S - \omega_y L_x^S &= \Sigma M_z. \end{aligned} \quad (1.6.2)$$

Если в качестве осей системы координат выбраны главные оси инерции, то, как известно,

$$L_x^S = J_x \omega_x; \quad L_y^S = J_y \omega_y; \quad L_z^S = J_z \omega_z,$$

где J_x , J_y , J_z – моменты инерции фиктивного твердого тела ("отвердевшей" ракеты) относительно главных осей инерции. В этом случае уравнения (1.6.2) принимают вид

$$\begin{aligned} J_x \frac{d \omega_x}{dt} + (J_z - J_y) \omega_y \omega_z &= \Sigma M_x; \\ J_y \frac{d \omega_y}{dt} + (J_x - J_z) \omega_z \omega_x &= \Sigma M_y; \\ J_z \frac{d \omega_z}{dt} + (J_y - J_x) \omega_x \omega_y &= \Sigma M_z. \end{aligned} \quad (1.6.3)$$

(Согласно принципу затвердевания производные от кинетического момента и его проекций вычисляются, как для твердого тела с постоянными моментами инерции.)

Заметим, что твердое тело S и корпус ракеты имеют относительно инерциальной системы координат одну и ту же угловую скорость ω , поскольку движение твердого тела S совпадает с движением корпуса ракеты.

Уравнения (1.6.3) записаны для произвольного, но фиксированного момента времени t . В различные моменты времени будем иметь твердые

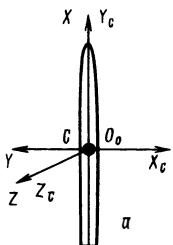
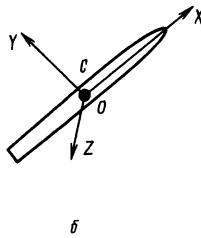


Рис. 1.5.



б

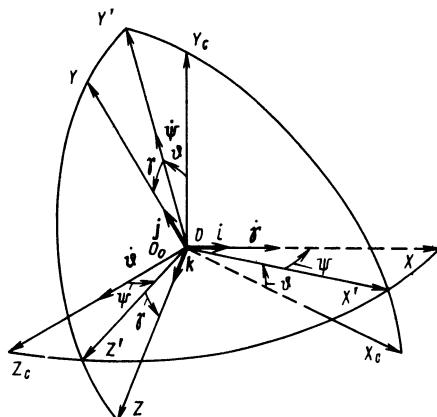


Рис. 1.6.

тела S с различной ориентацией главных осей инерции относительно корпуса ракеты и с различными моментами инерции относительно этих осей. Поэтому уравнения (1.6.3) представляют собой проекции векторного уравнения (1.6.1) на оси координат, различным образом ориентированные относительно корпуса ракеты. Можно было бы учесть вращение главных осей инерции относительно корпуса ракеты и записать скалярные уравнения вращательного движения в одной и той же системе координат. Однако в полете направления главных осей инерции ракеты изменяются незначительно, поэтому в дальнейшем, пользуясь уравнениями (1.6.3), мы просто будем предполагать, что направления главных осей инерции относительно корпуса ракеты остаются неизмененными.

§ 1.7. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

При исследовании движения ракеты применяются прямоугольные прямые системы координат. В дальнейшем будем использовать стартовую и связанную системы координат. С другими системами, применяемыми на практике, можно познакомиться, например, по книгам [14, 15].

Стартовая система координат $O_0 X_c Y_c Z_c$ (рис. 1.5, а)

Оси стартовой системы координат неподвижно связаны с Землей. Начало координат O_0 помещают в точку старта. Ось $O_0 Y_c$ направлена вверх по вертикали, прямо противоположно силе тяжести, а взаимно перпендикулярные оси $O_0 X_c$, $O_0 Z_c$ располагают в горизонтальной плоскости так, чтобы система координат была правой. Обычно ось $O_0 X_c$ совмещают с линией прицеливания.

Стартовая система осей координат в дальнейшем рассматривается как инерциальная система.

Связанная система координат $OXYZ$ (рис. 1.5, б)

Начало связанной системы координат O совмещают с центром масс ракеты C , а в качестве координатных осей связанный системы OX, OY, OZ используют три взаимно перпендикулярные главные оси инерции ракеты, предполагая, что их направление относительно корпуса ракеты остается неизменным. Одна из главных осей инерции ракеты обычно совпадает или очень близка к продольной оси ракеты. Поэтому будем считать, что продольная ось ракеты является главной осью инерции, и направим вдоль нее ось OX .

На старте ракету устанавливают вертикально, и ось OX в момент пуска совпадает с осью $O_0 Y_c$ стартовой системы. Направление оси OZ выбирают так, чтобы она в момент пуска была параллельна оси $O_0 Z_c$. Ось OY при этом будет направлена по оси $O_0 X_c$ в противоположную сторону. Взаимное расположение стартовой и связанный систем координат в момент пуска показано на рис. 1.5, а.

Расположение связанный системы координат по отношению к стартовой в произвольный момент времени полета ракеты можно определить шестью координатами: тремя координатами x_C, y_C, z_C начала связанный системы координат и тремя угловыми координатами.

На рис. 1.6 показаны оси связанный $OXYZ$ и стартовой $O_0 X_c Y_c Z_c$ систем координат. Начало стартовой системы координат O_0 посредством параллельного переноса осей совмещено с началом O связанный системы координат. Углы ϑ, ψ, γ однозначно определяют направления осей OX, OY, OZ относительно стартовой системы координат.

Угол ϑ (угол между осью OX_c и плоскостью OXZ_c) называется углом тангажа; угол ψ (угол между осью OX и плоскостью $OX_c Y_c$) – углом рыскания; угол γ (угол между осью OY и линией пересечения плоскостей OYZ и $OX_c Y_c$) – углом крена. Стрелками на рис. 1.6 указаны положительные направления отсчета этих углов.

Косинусы углов между связанными и стартовыми осями координат численно равны соответствующим проекциям единичных векторов i, j, k , направленных по связанным осям, на стартовые оси. Значения проекций единичных векторов i, j, k приведены в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Единич- ный вектор	Проекции на оси		
	$O_0 X_c$	$O_0 Y_c$	$O_0 Z_c$
i	$\cos \vartheta \cos \psi$	$\sin \vartheta \cos \psi$	$-\sin \psi$
j	$\cos \vartheta \sin \psi \sin \gamma - \sin \vartheta \cos \gamma$	$\sin \vartheta \sin \psi \sin \gamma + \cos \vartheta \cos \gamma$	$\cos \psi \sin \gamma$
k	$\cos \vartheta \sin \psi \cos \gamma + \sin \vartheta \sin \gamma$	$-\sin \vartheta \sin \psi \cos \gamma - \cos \vartheta \sin \gamma$	$\cos \psi \cos \gamma$

§ 1.8. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ

Во время полета ракеты и вместе с нею оси связанный системы координат поворачиваются относительно стартовой системы, что приводит к непрерывному изменению углов тангла, рыскания, крена. Скорости изменения этих углов равны соответственно $\dot{\vartheta}$, $\dot{\psi}$, $\dot{\gamma}$. Вектор угловой скорости $\dot{\omega}$ направлен по оси OZ_c (см. рис. 1.6); при повороте связанных осей вокруг этой оси углы ψ , γ остаются неизменными, а изменяется только угол ϑ , причем плоскость, в которой производится отсчет этого угла, перпендикулярна оси вращения OZ_c . Вектор угловой скорости $\dot{\psi}$ направлен по промежуточной оси OY' ; при повороте связанных осей вокруг оси OY' углы ϑ , γ остаются неизменными и изменяется только угол ψ , причем плоскость, в которой производится отсчет угла ψ , перпендикулярна оси вращения OY' . Вектор угловой скорости $\dot{\gamma}$ направлен вдоль связанный оси OX ; при повороте связанных осей вокруг оси OX углы ϑ , ψ остаются неизменными и изменяется только угол γ , причем плоскость, в которой производится отсчет этого угла, перпендикулярна оси вращения OX . Произвольное угловое перемещение связанный системы координат относительно стартовой системы вокруг оси, проходящей через начало связанных осей, можно представить как результирующее перемещение от вращательных движений вокруг трех осей OZ_c , OY' и OX . Поэтому если ω – угловая скорость связанных осей относительно стартовой системы координат, то

$$\omega = \dot{\vartheta} + \dot{\psi} + \dot{\gamma}. \quad (1.8.1)$$

Спроектируем векторное равенство (1.8.1) на связанные оси OX , OY , OZ .

Направляющие косинусы вектора $\dot{\omega}$ в связанный системе координат равны $-\sin \psi$; $\cos \psi \sin \gamma$; $\cos \psi \cos \gamma$, вектора $\dot{\vartheta} = 0$; $\cos \gamma$; $-\sin \gamma$, вектора $\dot{\psi} = 1$; 0 ; 0 .

Учитывая это, получим следующую группу кинематических уравнений, устанавливающих связь между проекциями на оси связанный системы угловой скорости ракеты и угловыми параметрами, характеризующими положение и движение ракеты относительно стартовой системы координат:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\gamma} - \dot{\vartheta} \sin \psi; \quad \omega_y = \dot{\psi} \cos \gamma + \dot{\vartheta} \cos \psi \sin \gamma; \\ \omega_z &= -\dot{\psi} \sin \gamma + \dot{\vartheta} \cos \psi \cos \gamma. \end{aligned} \quad (1.8.2)$$

Скорость какой-нибудь частицы ракеты в стартовой системе координат v складывается из переносной скорости v_e (скорости движения частицы вместе со связанными осями) и относительной скорости v_r (скорости движения частицы относительно связанных осей):

$$v = v_e + v_r. \quad (1.8.3)$$

Переносная и относительная скорости соответственно

$$v_e = V_C + \omega \times r; \quad v_r = \delta r / dt,$$

где \mathbf{r} – радиус-вектор рассматриваемой точки (рис. 1.7).

Отсюда

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}_C + \omega \times \mathbf{r} + \delta \mathbf{r}/dt. \quad (1.8.4)$$

Проектируя векторное равенство (1.8.4) на связанные оси, получим вторую группу кинематических уравнений:

$$v_x = V_{Cx} + \omega_y - \omega_z y + \frac{d x}{d t};$$

$$v_y = V_{Cy} + \omega_z x - \omega_x z + \frac{d y}{d t}; \quad (1.8.5)$$

$$v_z = V_{Cz} + \omega_x y - \omega_y x + \frac{d z}{d t},$$

где x, y, z – проекции радиуса-вектора \mathbf{r} на оси OX, OY, OZ .

§ 1.9. СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА РАКЕТУ В ПОЛЕТЕ

В правые части уравнений движения центра масс ракеты входят внешние силы, тяга двигателя, силы Кориолиса, обусловленные относительным движением частиц внутри вращающегося корпуса ракеты, и силы, вызванные перемещениями центра масс ракеты относительно корпуса. Под внешними силами подразумеваются силы тяжести и аэродинамические силы.

Имея в виду, что в последующих разделах динамические уравнения (1.5.12) и (1.6.3) будем записывать в проекциях на связанные оси, все силы и моменты этих сил тоже будем проектировать на оси связанной системы координат.

Тяга двигателя

В целях общности допустим, что двигатель ракеты (двигательная установка) представляет собой связку некоторого числа сравнительно небольших двигателей. Эти двигатели, являясь маршевыми, могут использоваться также и для управления полетом ракеты. Будем считать, что все органы управления, связанные с работой двигательной установки, занимают нейтральное положение, при котором управляющее воздействие отсутствует¹.

Тягу, создаваемую j -м двигателем, обозначим через \mathbf{P}_j , а ее проекции на связанные оси – P_{jx}, P_{jy}, P_{jz} . Обычно осевые линии двигателей смеше-

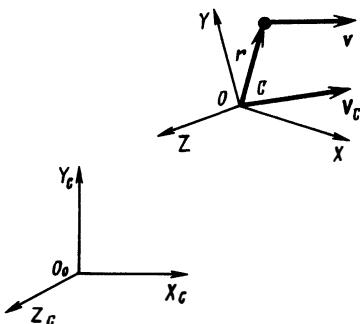


Рис. 1.7.

¹ Силы, возникающие при отклонении органов управления, будут рассмотрены ниже.

ны относительно продольной оси ракеты на небольшие углы. Поэтому косинус угла между вектором \mathbf{P}_j и осью OX связанный системы координат практически равняется единице. Косинусы углов между вектором \mathbf{P}_j и осями OY и OZ обозначим соответственно через η_j и ξ_j . Тогда

$$P_{jx} \approx P_j; \quad P_{jy} = \eta_j P_j; \quad P_{jz} = \xi_j P_j. \quad (1.9.1)$$

Полная тяга двигателя ракеты

$$\mathbf{P} = \sum_j \mathbf{P}_j. \quad (1.9.2)$$

Проектируя равенство (1.9.2) на связанные оси, получим

$$P_x = \sum_j P_{jx} \approx P; \quad P_y = \sum_j \eta_j P_j; \quad P_z = \sum_j \xi_j P_j. \quad (1.9.3)$$

Радиус-вектор точки пересечения линии действия вектора \mathbf{P}_j с плоскостью среза сопла j -го двигателя обозначим через ρ_j . Момент тяги двигателя относительно центра масс ракеты равен

$$\mathbf{M}_P = \sum_j \rho_j \times \mathbf{P}_j. \quad (1.9.4)$$

Проектируя векторное равенство (1.9.4) на связанные оси, получим

$$\begin{aligned} M_{Px} &= \sum_j (y_j \xi_j - z_j \eta_j) P_j; \\ M_{Py} &= \sum_j (z_j - x_j \xi_j) P_j; \\ M_{Pz} &= \sum_j (x_j \eta_j - y_j) P_j, \end{aligned} \quad (1.9.5)$$

где x_j , y_j , z_j – проекции радиуса-вектора ρ_j на связанные оси.

Сила тяжести

Сила тяжести, или вес ракеты, \mathbf{G} выражается известной формулой

$$\mathbf{G} = m \mathbf{g}, \quad (1.9.6)$$

где m – масса ракеты; \mathbf{g} – ускорение свободного падения.

Проекции силы тяжести ракеты на оси связанный системы координат можно выразить через проекции ускорения свободного падения на те же оси:

$$G_x = mg_x; \quad G_y = mg_y; \quad G_z = mg_z. \quad (1.9.7)$$

Вектор \mathbf{G} проходит через центр масс ракеты, поэтому момент этой силы относительно центра масс равен нулю.

Аэродинамические силы

Аэродинамические силы возникают при движении летательного аппарата в воздушной среде в результате взаимодействия ее с поверхностью аппарата [7].

В данном случае предполагается, что внешняя поверхность ракеты симметрична относительно плоскостей OXY и OXZ , а аэродинамические рули, если таковые имеются, занимают нейтральное положение.

Допустим, сначала, что ракета движется поступательно, т.е. $\omega = 0$, и что воздушная среда, в которой совершается полет, неподвижна относительно стартовой системы координат. В этих условиях аэродинамические силы определяются формой и размерами ракеты, параметрами воздуха и скоростью ракеты (корпуса) относительно воздуха. Пренебрегая скоростью центра масс ракеты относительно ее корпуса, будем считать, что скорость корпуса ракеты относительно воздушной среды равна скорости ее центра масс V_C .

Равнодействующую всех аэродинамических сил, приложенных к ракете, будем называть полной аэродинамической силой и обозначать через R_A .

Если вектор скорости V_C лежит в плоскости симметрии ракеты, например в плоскости OXY , то полная аэродинамическая сила также будет лежать в той же плоскости. Точка ее приложения называется центром давления. При малых углах атаки ввиду предполагаемой симметрии внешней поверхности корпуса центр давления будет совпадать с аэродинамическим фокусом ракеты, который, как известно, определяется как точка, лежащая на продольной оси и обладающая тем свойством, что при закрепленных рулях момент аэродинамических сил относительно оси, проходящей через эту точку перпендикулярно плоскости симметрии (плоскость OXY), не зависит от угла атаки.

При наличии у ракеты оперения (стабилизаторов и воздушных рулей) вектор скорости V_C может и не располагаться в плоскости симметрии ракеты и тогда, строго говоря, вектор R_A может не лежать в одной плоскости с вектором V_C и продольной осью ракеты. Однако и в этом случае вектор R_A лишь незначительно выйдет из плоскости, проходящей через вектор V_C и ось OX , тем более, что управление баллистическими ракетами обычно строится так, что в плотных слоях атмосферы угол между вектором V_C и плоскостью симметрии ракеты не бывает большим. Учитывая это, мы будем считать, что и в этом случае центр давления лежит на продольной оси ракеты и совпадает с аэродинамическим фокусом, а вектор полной аэродинамической силы лежит в плоскости, проходящей через ось OX и вектор V_C .

Полную аэродинамическую силу R_A разложим на две составляющие: на силу лобового сопротивления X_a , направленную по линии действия вектора скорости V_C , и подъемную силу Y_a (рис. 1.8). Эти составляющие по модулю можно представить так:

$$X_a = c_{x_a} \rho S \frac{V_C^2}{2}, \quad Y_a = c_{y_a} \rho S \frac{V_C^2}{2},$$

где c_{x_a} – коэффициент лобового сопротивления; c_{y_a} – коэффициент подъемной силы; ρ – плотность воздуха; S – площадь миделевого сечения корпуса ракеты.

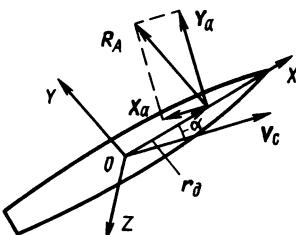


Рис. 1.8.

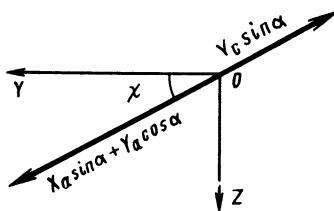


Рис. 1.9.

Спроектировав аэродинамическую силу на связанные оси, получим (рис. 1.9):

$$X = -X_a \cos \alpha + Y_a \sin \alpha; \quad Y = (X_a \sin \alpha + Y_a \cos \alpha) \cos \chi;$$

$$Z = (X_a \sin \alpha + Y_a \cos \alpha) \sin \chi,$$

где α — угол между вектором скорости V_C и осью OX , будем называть его углом атаки; χ — угол между проекцией аэродинамической силы R_A на плоскость OYZ и осью OY .

Из очевидных равенств $V_{Cy} = -V_C \sin \alpha \cos \chi$; $V_{Cz} = -V_C \sin \alpha \sin \chi$ имеем $\cos \chi = -V_{Cy}/V_C \sin \alpha$; $\sin \chi = -V_{Cz}/V_C \sin \alpha$. Поэтому

$$Y = -(X_a \sin \alpha + Y_a \cos \alpha) V_{Cy} / V_C \sin \alpha;$$

$$Z = -(X_a \sin \alpha + Y_a \cos \alpha) V_{Cz} / V_C \sin \alpha.$$

Подставляя в эти выражения значения X_a и Y_a , получим

$$X = -\frac{1}{2} (c_{x_a} \cos \alpha - c_{y_a} \sin \alpha) \rho S V_C^2;$$

$$Y = -\frac{1}{2} (c_{x_a} \sin \alpha + c_{y_a} \cos \alpha) \rho S \frac{V_{Cy} V_C}{\sin \alpha}; \quad (1.9.8)$$

$$Z = -\frac{1}{2} (c_{x_a} \sin \alpha + c_{y_a} \cos \alpha) \rho S \frac{V_{Cz} V_C}{\sin \alpha}.$$

Момент аэродинамических сил относительно центра масс ракеты равен векторному произведению радиуса-вектора центра давления r_d ($x_d, 0, 0$) на вектор полной аэродинамической силы

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_d \times \mathbf{R}_A,$$

или, так как в рассматриваемом случае центр давления и аэродинамический фокус совпадают,

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_F \times \mathbf{R}_A,$$

где $\mathbf{r}_F(x_F, 0, 0)$ — радиус-вектор фокуса летательного аппарата.

Проектируя это векторное произведение на оси OX , OY , OZ , получим

$$M_{Ax} = 0;$$

$$M_{Ay} = -x_F Z = \frac{1}{2} x_F (c_{x_a} \sin \alpha + c_{y_a} \cos \alpha) \rho S \frac{V_{Cz} V_C}{\sin \alpha}; \quad (1.9.9)$$

$$M_{Az} = x_F Y = -\frac{1}{2} x_F (c_{x_a} \sin \alpha + c_{y_a} \cos \alpha) \rho S \frac{V_{Cy} V_C}{\sin \alpha}.$$

Допустим теперь, что воздушная среда, в которой совершаются полет ракеты, сама движется относительно стартовой системы координат со скоростью \mathbf{W}_B . Тогда центр масс ракеты будет двигаться относительно воздуха со скоростью $\mathbf{V}_C - \mathbf{W}_B$ (рис. 1.10). Аэродинамические силы определяются как раз скоростью ракеты относительно воздушной среды. Поэтому с учетом движения воздушной среды относительно стартовой системы координат в формулах (1.9.8) и (1.9.9) скорость V_C должна быть заменена модулем скорости $\mathbf{V}_C - \mathbf{W}_B$, а проекции на связанные оси скорости центра масс относительно стартовых осей должны быть заменены проекциями скорости центра масс относительно воздуха.

Если ракета движется не только поступательно, но и вращается вокруг центра масс, то возникают дополнительные аэродинамические силы. Проекции равнодействующей этих сил на оси OX , OY , OZ обозначим X^* , Y^* , Z^* , а проекции соответствующего (демпфирующего) момента на те же оси — M_{Ax}^* , M_{Ay}^* , M_{Az}^* .

Таким образом, проекции аэродинамических сил и моментов на связанные оси в общем случае могут быть вычислены по формулам

$$\begin{aligned} X &= X^* - \frac{1}{2} (c_{x_a} \cos \alpha - c_{y_a} \sin \alpha) \rho S |\mathbf{V}_C - \mathbf{W}_B|^2; \\ Y &= Y^* - \frac{1}{2} (c_{x_a} + c_{y_a} \operatorname{ctg} \alpha) \rho S (V_{Cy} - W_{By}) |\mathbf{V}_C - \mathbf{W}_B|; \\ Z &= Z^* - \frac{1}{2} (c_{x_a} + c_{y_a} \operatorname{ctg} \alpha) \rho S (V_{Cz} - W_{Bz}) |\mathbf{V}_C - \mathbf{W}_B|, \end{aligned} \quad (1.9.10)$$

$$M_{Ax} = M_{Ax}^*;$$

$$M_{Ay} = M_{Ay}^* + \frac{1}{2} x_F (c_{x_a} + c_{y_a} \operatorname{ctg} \alpha) \rho S (V_{Cz} - W_{Bz}) |\mathbf{V}_C - \mathbf{W}_B|;$$

$$\begin{aligned} M_{Az} &= M_{Az}^* - \frac{1}{2} x_F (c_{x_a} + \\ &+ c_{y_a} \operatorname{ctg} \alpha) \rho S (V_{Cy} - W_{By}) |\mathbf{V}_C - \mathbf{W}_B|, \end{aligned} \quad (1.9.11)$$

где W_{Bx} , W_{By} , W_{Bz} — проекции вектора \mathbf{W}_B на связанные оси.

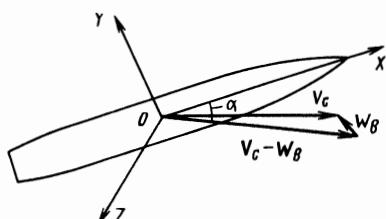


Рис. 1.10.

В этих формулах α – угол между вектором $\mathbf{V}_C - \mathbf{W}_B$ и осью OX (см. рис. 1.10). Для баллистических ракет и ракет-носителей характерно, что в полете угол α и угловая скорость ω малы. Используя это обстоятельство, можно значительно упростить формулы (1.9.10) и (1.9.11).

При малых α коэффициент подъемной силы

$$c_{y_a} = c_{y_a}^\alpha \alpha, \quad (1.9.12)$$

коэффициент лобового сопротивления

$$c_{x_a} = c_{x_0 a} + A \alpha^2, \quad (1.9.13)$$

где $c_{y_a}^\alpha$ – производная от коэффициента подъемной силы по углу α при $\alpha = 0$; $c_{x_0 a}$ – коэффициент лобового сопротивления при $\alpha = 0$; A – величина, не зависящая от угла α при малых α .

При малых ω проекции равнодействующей аэродинамических сил, вызванных вращением аппарата, и соответствующего момента на связанные оси пропорциональны проекциям угловой скорости ω на эти оси, а именно:

$$X^* = 0; \quad Y^* = Y^{\omega_z} \omega_z; \quad Z^* = Z^{\omega_y} \omega_y; \quad (1.9.14)$$

$$M_{Ax}^* = M_{Ax}^{\omega_x} \omega_x; \quad M_{Ay}^* = M_{Ay}^{\omega_y} \omega_y; \quad M_{Az}^* = M_{Az}^{\omega_z} \omega_z,$$

$$\text{где } Y^{\omega_z} = \frac{\partial Y}{\partial \omega_z}; \quad Z^{\omega_y} = \frac{\partial Z}{\partial \omega_y}; \quad M_{Ax}^{\omega_x} = \frac{\partial M_{Ax}}{\partial \omega_x};$$

$$M_{Ay}^{\omega_y} = \frac{\partial M_{Ay}}{\partial \omega_y}; \quad M_{Az}^{\omega_z} = \frac{\partial M_{Az}}{\partial \omega_z}.$$

Если точка приложения равнодействующей аэродинамических сил, вызванных вращением аппарата, расположена впереди центра масс, то $Y^{\omega_z} < 0$, $Z^{\omega_y} > 0$. Если же эта точка расположена позади центра масс, то $Y^{\omega_z} > 0$, $Z^{\omega_y} < 0$. В любом из этих случаев значения величин $M_{Ax}^{\omega_x}$, $M_{Ay}^{\omega_y}$, $M_{Az}^{\omega_z}$ меньше нуля.

Подставим c_{x_a} , c_{y_a} , X^* , Y^* , Z^* , M_{Ax}^* , M_{Ay}^* , M_{Az}^* , определенные формулами (1.9.12) – (1.9.14), в формулы (1.9.10) и (1.9.11) и исключим из них $|\mathbf{V}_C - \mathbf{W}_B|$ с помощью равенства

$$|\mathbf{V}_C - \mathbf{W}_B| = (V_{Cx} - W_{Bx}) \frac{1}{\cos \alpha}. \quad (1.9.15)$$

Тогда, полагая $\sin \alpha \approx \alpha$, $\cos \alpha \approx 1$ и пренебрегая членами, содержащими α в степени, выше первой, получим

$$X = -\frac{1}{2} c_{x_0 a} \rho S (V_{Cx} - W_{Bx})^2;$$

$$Y = Y^{\omega_z} \omega_z - \frac{1}{2} (c_{x_0 a} + c_{y_a}^\alpha) \rho S (V_{Cx} - W_{Bx})(V_{Cy} - W_{By}); \quad (1.9.16)$$

$$Z = Z^{\omega_y} \omega_y - \frac{1}{2} (c_{x_0 a} + c_{y_a}^\alpha) \rho S (V_{Cx} - W_{Bx})(V_{Cz} - W_{Bz});$$

$$M_{Ax} = M_{Ax}^{\omega_x} \omega_x;$$

$$M_{Ay} = M_{Ay}^{\omega_y} \omega_y + \frac{1}{2} x_F (c_{x_0 a} + c_{y_a}^\alpha) \rho S (V_{Cx} - W_{Bx})(V_{Cz} - W_{Bz}); \quad (1.9.17)$$

$$M_{Az} = M_{Az}^{\omega_z} \omega_z - \frac{1}{2} x_F (c_{x_0 a} + c_{y_a}^\alpha) \rho S (V_{Cx} - W_{Bx})(V_{Cy} - W_{By});$$

Управляющие силы

Для обеспечения полета ракеты по заданному закону необходимо иметь возможность нужным образом изменять в полете скорость центра масс ракеты и ориентацию ее осей в пространстве. Для этой цели используются различные органы управления. При отклонении органов управления от нейтрального положения возникают необходимые для управления силы и моменты.

В зависимости от выполняемых функций органы управления удобно разбить на четыре группы:

- 1) органы управления величиной скорости центра масс ракеты;
- 2) органы управления вращением ракеты вокруг поперечной оси OZ ;
- 3) органы управления вращением ракеты вокруг поперечной оси CY ;
- 4) органы управления вращением ракеты вокруг продольной оси OX .

Рассмотрим, какие силы и моменты возникают при отклонении органов управления той или иной группы.

Органы управления скоростью центра масс ракеты

Величину скорости центра масс ракеты можно изменить требуемым образом с помощью регулирования тяги двигателя и применения специальных тормозных устройств. Обычно на практике применяют регулирование тяги. В этом случае управляющая сила, направленная по оси OX , равна изменению тяги двигателя:

$$\Delta X = p$$

($p > 0$ при увеличении тяги по сравнению с номинальной тягой и $p < 0$ в противном случае).

Управляющую силу представим следующим образом:

$$\Delta X = c_{x_\delta} \delta_x,$$

где $c_{x\delta}$ – коэффициент, равный в данном случае номинальной тяге двигателя P , $\delta_x = p/P$ – величина, характеризующая относительное изменение тяги.

Органы управления вращением ракеты вокруг поперечной оси OZ

Управлять вращением ракеты вокруг оси OZ можно с помощью воздушных рулей, газовых (газоструйных) рулей, вспомогательных (верньерных) двигателей, путем поворота маршевых двигателей, изменения их тяги, с помощью поворотных сопел двигателей, дефлекторов и тд.

Несмотря на разнообразие средств, применяемых для управления вращением ракеты вокруг поперечной оси, во всех случаях силы и моменты, возникающие при отклонении органов управления, могут быть записаны одинаково. Рассмотрим для примера некоторые типы органов управления.

Воздушные рули представляют собой сравнительно небольшие несущие поверхности, устанавливаемые либо непосредственно на корпусе ракеты, либо на неподвижных поверхностях – стабилизаторах. При отклонении рулей симметрично плоскости OXY (рис. 1.11) возникает аэродинамическая сила, лежащая в этой плоскости. Составляющую аэродинамической силы по оси OY можно представить в виде

$$\Delta Y = c_y^\delta \delta_\vartheta q S_p,$$

где c_y^δ – производная от коэффициента подъемной силы руля в связанной системе координат по углу отклонения руля; δ_ϑ – угол отклонения руля; $q = \rho V_C^2 / 2$ – скоростной напор; S_p – площадь воздушных рулей.

Другая составляющая аэродинамической силы при небольших углах отклонения руля и малых углах атаки ракеты пренебрежимо мала, и мы будем в дальнейшем полагать $\Delta X = 0$.

Момент аэродинамических сил относительно оси OZ , возникающий при отклонении воздушных рулей,

$$\Delta M_z = -L_p \Delta Y,$$

где L_p – расстояние от центра давления рулей до центра масс ракеты.

Итак, при отклонении воздушных рулей симметрично плоскости OXY возникают сила и момент, проекции которых на связанные оси могут быть записаны в виде

$$\Delta X = 0; \quad \Delta Y = c_{y\delta} \delta_\vartheta; \quad \Delta Z = 0;$$

$$\Delta M_x = \Delta M_y = 0; \quad \Delta M_z = c_{\vartheta\delta} \delta_\vartheta,$$

где $c_{y\delta} = c_y^\delta q S_p$, $c_{\vartheta\delta} = -L_p c_{y\delta}$.

Газовые рули во многом подобны воздушным рулям. Существенным отличием является лишь то, что газовые рули устанавливаются в потоке газов, истекающих из двигателей (рис. 1.12). Силы и моменты, возникающие при отклонении газовых рулей, можно определять по формуле

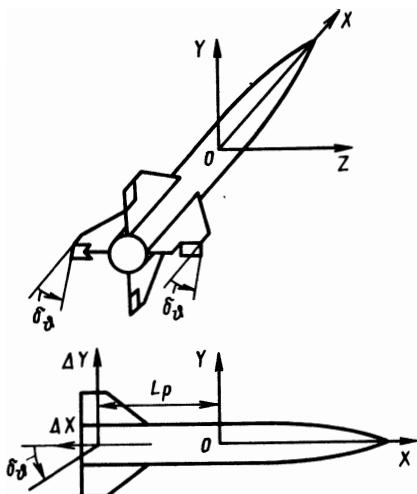


Рис. 1.11.

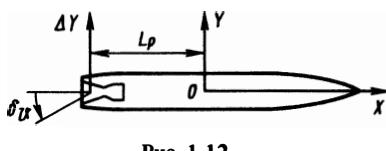


Рис. 1.12.

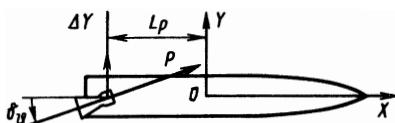


Рис. 1.13.

лам такого же вида, что и для воздушных рулей, с той разницей, что коэффициент c_y^δ должен быть определен для тех условий, в которых находятся газовые рули, а под q следует подразумевать скоростной напор газов в сопле двигателя в районе расположения газовых рулей.

Поворот двигателя вокруг оси, параллельной оси OZ (рис. 1.13), сопровождается появлением следующих сил и момента:

$$\Delta X = P \cos \delta_\vartheta - P = -2P \sin^2 \frac{\delta_\vartheta}{2};$$

$$\Delta Y = P \sin \delta_\vartheta; \quad \Delta M_z = -L_p P \sin \delta_\vartheta.$$

Обычно углы поворота двигателя малы, поэтому можно принять

$$\sin \delta_\vartheta \approx \delta_\vartheta; \quad \sin \frac{\delta_\vartheta}{2} \approx \frac{\delta_\vartheta}{2}; \quad \cos \delta_\vartheta \approx 1.$$

Тогда, отбросив величины второго порядка малости, будем иметь

$$\Delta X \approx 0; \quad \Delta Y = c_{y\delta} \delta_\vartheta; \quad \Delta M_z = c_{\vartheta\delta} \delta_\vartheta,$$

где $c_{y\delta} = P$, $c_{\vartheta\delta} = -L_p P$.

Если двигатель ракеты состоит из нескольких камер, то управлять движением вокруг оси OZ можно с помощью рассогласования тяг. Допустим, что для этой цели используются две камеры двигателя (рис. 1.14). Если тягу одной из камер увеличить, а другой — уменьшить на p , то суммарная тяга двигателя не изменится и в то же время появится момент относительно оси OZ :

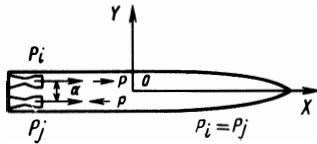


Рис. 1.14.

$$\Delta M_z = -ap = -aP_i \delta_{\vartheta},$$

где $\delta_{\vartheta} = p/P_i$.

Очевидно, что в данном случае можем записать

$$\Delta M_z = c_{\vartheta \delta} \delta_{\vartheta},$$

имея в виду, что $c_{\vartheta \delta} = -aP_i$.

Аналогичные выражения имеют место при применении и других типов органов управления.

Таким образом, при отклонении органов управления вращением ракеты вокруг оси OZ возникают силы, направленные по осям OX , OY , и момент относительно оси OZ , которые в общем случае при одновременном использовании нескольких типов органов управления можно представить в виде

$$\begin{aligned} \sum_i \Delta X_i &\approx 0; & \sum_i \Delta Y_i &= \sum_i c_{y \delta i} \delta_{\vartheta i}; \\ \sum_i \Delta M_{zi} &= \sum_i c_{\vartheta \delta i} \delta_{\vartheta i}. \end{aligned} \quad (1.9.18)$$

Формулы (1.9.18), разумеется, являются приближенными, потому что они получены без учета скорости изменения величин $\delta_{\vartheta i}$ и некоторых других факторов, влияющих на силы и моменты, создаваемые органами управления. Однако влияние неучтенных факторов невелико, и для баллистических ракет и ракет-носителей космических аппаратов выражения (1.9.18) вполне приемлемы.

Органы управления вращением ракеты вокруг поперечной оси OY

Для управления вращением вокруг оси OY применяются те же органы, что и для управления вращением вокруг оси OZ . В соответствии с этим силы и момент, возникающие при отклонении органов управления, можно представить следующим образом:

$$\sum_i \Delta X_i \approx 0; \quad \sum_i \Delta Z_i = \sum_i c_{z \delta i} \delta_{\psi i}; \quad \sum_i \Delta M_{yi} = \sum_i c_{\psi \delta i} \delta_{\psi i}. \quad (1.9.19)$$

Коэффициенты $c_{z \delta i}$, $c_{\psi \delta i}$ аналогичны коэффициентам $c_{y \delta i}$, $c_{\vartheta \delta i}$ в формулах (1.9.18), и в каждом конкретном случае их выражения легко могут быть найдены.

В третьем равенстве (1.9.19) в отличие от соответствующего равенства (1.9.18) коэффициенты $c_{\psi \delta i}$ положительны, потому что в данном случае при положительном $\delta_{\psi i}$ ¹ возникают положительная сила ΔZ_i и положительный момент ΔM_{yi} (рис. 1.15).

¹Авторы придерживаются следующего общепринятого правила: угловое отклонение руля, при котором возникает положительный управляющий момент в правой системе координат, рассматривается как положительное.

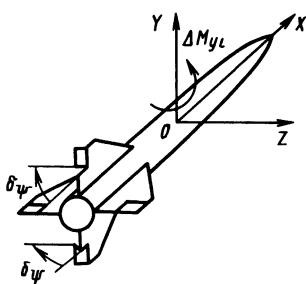


Рис. 1.15.

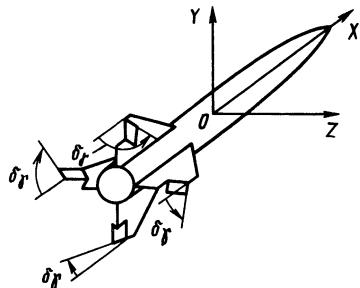


Рис. 1.16.

Органы управления вращением ракеты вокруг продольной оси OX

Управлять вращением вокруг оси OX можно с помощью воздушных и газовых рулей, поворотных камер сгорания или сопел двигателей, вспомогательных двигателей, установленных под некоторыми углами к продольной оси ракеты, и т.д.

При отклонении органов управления возникают момент относительно оси OX

$$\sum_i \Delta M_{xi} = \sum_i c_{\gamma\delta i} \delta_{\gamma i} \quad (c_{\gamma\delta i} < 0) \quad (1.9.20)$$

и сила

$$\sum_i \Delta X_i \approx 0. \quad (1.9.21)$$

Например, при отклонении воздушных рулей на угол δ_γ (рис. 1.16) возникает момент, пропорциональный этому углу отклонения. При положительных δ_γ возникает отрицательный момент относительно оси OX . Поэтому $c_{\gamma\delta} < 0$.

Силы, возникающие при отклонении органов управления от нейтрального положения, приводятся к главному вектору $F_{\text{упр}}$ (приложенному в центре масс ракеты) и главному моменту $M_{\text{упр}}$. Проекции силы $F_{\text{упр}}$ и момента $M_{\text{упр}}$ на оси связанный системы координат обозначим соответственно через $F_{\text{упр}x}$, $F_{\text{упр}y}$, $F_{\text{упр}z}$, $M_{\text{упр}x}$, $M_{\text{упр}y}$, $M_{\text{упр}z}$. На основании вышеизложенного

$$\begin{aligned} F_{\text{упр}x} &= c_{x\delta} \delta_x; \quad F_{\text{упр}y} = \sum_i \Delta Y_i = \sum_i c_{y\delta i} \delta_{\vartheta i}; \\ F_{\text{упр}z} &= \sum_i \Delta Z_i = \sum_i c_{z\delta i} \delta_{\psi i}; \quad M_{\text{упр}x} = \sum_i \Delta M_{xi} = \sum_i c_{\gamma\delta i} \delta_{\gamma i}; \\ M_{\text{упр}y} &= \sum_i \Delta M_{yi} = \sum_i c_{\psi\delta i} \delta_{\psi i}; \quad M_{\text{упр}z} = \sum_i \Delta M_{zi} = \sum_i c_{\vartheta\delta i} \delta_{\vartheta i}. \end{aligned} \quad (1.9.22)$$

Если между отклонениями органов управления каждой группы существует пропорциональная зависимость, то, приведя их отклонения к отклонению какого-нибудь руля из этой группы, формулы (1.9.22) можно представить в более простом виде

$$\begin{aligned} F_{\text{упр}x} &= c_{x\delta} \delta_x; & F_{\text{упр}y} &= c_{y\delta} \delta_\vartheta; & F_{\text{упр}z} &= c_{z\delta} \delta_\psi; \\ M_{\text{упр}x} &= c_{\gamma\delta} \delta_\gamma; & M_{\text{упр}y} &= c_{\psi\delta} \delta_\psi; & M_{\text{упр}z} &= c_{\vartheta\delta} \delta_\vartheta, \end{aligned} \quad (1.9.23)$$

где $c_{y\delta} = \sum_i c_{y\delta i} \frac{\delta_\vartheta i}{\delta_\vartheta}$; $c_{z\delta} = \sum_i c_{z\delta i} \frac{\delta_\psi i}{\delta_\psi}$;

$$c_{\gamma\delta} = \sum_i c_{\gamma\delta i} \frac{\delta_\gamma i}{\delta_\gamma}; \quad c_{\psi\delta} = \sum_i c_{\psi\delta i} \frac{\delta_\psi i}{\delta_\psi} \quad \text{и т.д.}$$

Силы Кориолиса

При вращении ракеты вокруг центра масс и движении топлива и газов относительно корпуса возникают кориолисовы силы, главный вектор и главный момент которых определяют по формулам

$$\mathbf{F}_K = - \int_{\Sigma} \mathbf{w}_K dm; \quad \mathbf{M}_K = - \int_{\Sigma} \mathbf{r}' \times \mathbf{w}_K dm.$$

Кориолисово ускорение

$$\mathbf{w}_K = 2\omega \times \mathbf{v}_r,$$

поэтому

$$\mathbf{F}_K = - 2 \int_{\Sigma} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r dm; \quad \mathbf{M}_K = - 2 \int_{\Sigma} \mathbf{r}' \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r dm. \quad (1.9.24)$$

Проектируя векторные уравнения (1.9.24) на связанные оси, получим

$$F_{Kx} = - 2\omega_y \int_{\Sigma} v_{rz} dm + 2\omega_z \int_{\Sigma} v_{ry} dm;$$

$$F_{Ky} = - 2\omega_z \int_{\Sigma} v_{rx} dm + 2\omega_x \int_{\Sigma} v_{rz} dm; \quad (1.9.25)$$

$$F_{Kz} = - 2\omega_x \int_{\Sigma} v_{ry} dm + 2\omega_y \int_{\Sigma} v_{rx} dm,$$

$$M_{Kx} = - 2\omega_x \int_{\Sigma} y' v_{ry} dm - 2\omega_x \int_{\Sigma} z' v_{rz} dm +$$

$$+ 2\omega_y \int_{\Sigma} y' v_{rx} dm + 2\omega_z \int_{\Sigma} z' v_{rx} dm; \quad (1.9.26)$$

$$M_{Ky} = - 2\omega_y \int_{\Sigma} z' v_{rz} dm - 2\omega_y \int_{\Sigma} x' v_{rx} dm +$$

$$+ 2\omega_z \int_{\Sigma} z' v_{ry} dm + 2\omega_x \int_{\Sigma} x' v_{ry} dm,$$

$$M_{Kz} = -2 \int_{\Sigma} \omega_z x' v_{rx} dm - 2 \int_{\Sigma} \omega_z y' v_{ry} dm + \\ + 2 \int_{\Sigma} \omega_x x' v_{rz} dm + 2 \int_{\Sigma} \omega_y y' v_{rz} dm, \quad (1.9.26)$$

где v_{rx} , v_{ry} , v_{rz} и x' , y' , z' – соответственно проекции относительной скорости \vec{v}_r и радиуса-вектора \vec{r}' частицы на оси связанный системы координат.

Если считать, что течение газов и жидкостей внутри корпуса ракеты обладает осевой симметрией, то

$$\int_{\Sigma} v_{ry} dm = 0; \quad \int_{\Sigma} v_{rz} dm = 0; \quad \int_{\Sigma} y' v_{rx} dm = 0; \quad \int_{\Sigma} z' v_{rx} dm = 0,$$

тогда

$$F_{Kx} = 0; \quad F_{Ky} = F_{Ky}^{\omega_z} \omega_z; \quad F_{Kz} = F_{Kz}^{\omega_y} \omega_y; \quad (1.9.27)$$

$$M_{Kx} = M_{Kx}^{\omega_x} \omega_x; \quad M_{Ky} = M_{Ky}^{\omega_y} \omega_y; \quad M_{Kz} = M_{Kz}^{\omega_z} \omega_z,$$

$$\text{где } F_{Ky}^{\omega_z} = -2 \int_{\Sigma} v_{rx} dm; \quad F_{Kz}^{\omega_y} = 2 \int_{\Sigma} v_{rx} dm;$$

$$M_{Kx}^{\omega_x} = -2 \int_{\Sigma} (y' v_{ry} + z' v_{rz}) dm;$$

$$M_{Ky}^{\omega_y} = -2 \int_{\Sigma} (z' v_{rz} + x' v_{rx}) dm;$$

$$M_{Kz}^{\omega_z} = -2 \int_{\Sigma} (x' v_{rx} + y' v_{ry}) dm.$$

В результате более подробного изучения вопроса можно сделать вывод, что $M_{Kx}^{\omega_x}$ пренебрежимо мал, т.е. можно принять $M_{Kx}^{\omega_x} = 0$, а коэффициенты $M_{Ky}^{\omega_y}$ и $M_{Kz}^{\omega_z}$ в основном определяются значением интеграла $\int x' v_{rx} dm$.

Σ Кориолисовы моменты могут быть как раскачивающими, так и демпфирующими. Для частиц, которые движутся к центру масс, $x' v_{rx} < 0$, и, следовательно, при движении этих частиц возникают раскачивающие моменты. Для частиц, движущихся от центра масс, $x' v_{rx} > 0$, и, значит, соответствующие моменты направлены против вращения ракеты, т.е. являются демпфирующими. В целом при расположении двигателей позади центра масс демпфирующие моменты превалируют над раскачивающими, и тогда $M_{Ky}^{\omega_y}, M_{Kz}^{\omega_z} < 0$.

Силы, обусловленные перемещением центра масс ракеты относительно ее корпуса

Силы, обусловленные перемещением центра масс ракеты относительно ее корпуса, определяются суммой (см. § 1.5)

$$\mathbf{F}_r = m\mathbf{w}_{Cr} + 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_{Cr}.$$

Первое слагаемое в этом выражении пренебрежимо мало. Поэтому отбрасывая его, приближенно будем иметь

$$\mathbf{F}_r = 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_{Cr}. \quad (1.9.28)$$

Спроектируем векторное равенство (1.9.28) на оси OX , OY , OZ :

$$\begin{aligned} F_{rx} &= (2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_{Cr})_x = 2m(\omega_y V_{Cry} - \omega_z V_{Crx}); \\ F_{ry} &= (2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_{Cr})_y = 2m(\omega_z V_{Crz} - \omega_x V_{Crx}); \\ F_{rz} &= (2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_{Cr})_z = 2m(\omega_x V_{Cry} - \omega_y V_{Crx}), \end{aligned} \quad (1.9.29)$$

где V_{Crz} , V_{Cry} , V_{Crx} – проекции относительной скорости центра масс на оси OX , OY , OZ .

Считая, что течение газов и жидкостей в корпусе ракеты осесимметричное, будем иметь

$$F_{rx} = 0; \quad F_{ry} = 2mV_{Crz}\omega_z; \quad F_{rz} = -2mV_{Crz}\omega_y. \quad (1.9.30)$$

§ 1.10. ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ РАКЕТЫ В РАЗВЕРНУТОМ ВИДЕ

Уравнения движения центра масс ракеты и уравнения вращения вокруг центра масс совместно составляют систему динамических уравнений пространственного движения ракеты.

Динамические уравнения движения ракеты в проекциях на оси связанный системы координат, которые совпадают с главными осями инерции ракеты, врачающимися в пространстве вместе с корпусом с одинаковой угловой скоростью, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} m\left(\frac{dV_{Cx}}{dt} + \omega_y V_{Cz} - \omega_z V_{Cy}\right) &= G_x + P_x + X + F_{Kx} + F_{rx} + F_{упрx}; \\ m\left(\frac{dV_{Cy}}{dt} + \omega_z V_{Cx} - \omega_x V_{Cz}\right) &= G_y + P_y + Y + F_{Ky} + F_{ry} + F_{упрy}; \\ m\left(\frac{dV_{Cz}}{dt} + \omega_x V_{Cy} - \omega_y V_{Cx}\right) &= G_z + P_z + Z + F_{Kz} + F_{rz} + F_{упрz}; \\ J_x \frac{d\omega_x}{dt} + (J_z - J_y)\omega_y\omega_z &= M_{Px} + M_{Ax} + M_{Kx} + M_{упрx}; \\ J_y \frac{d\omega_y}{dt} + (J_x - J_z)\omega_z\omega_x &= M_{Py} + M_{Ay} + M_{Ky} + M_{упрy}; \\ J_z \frac{d\omega_z}{dt} + (J_y - J_x)\omega_x\omega_y &= M_{Pz} + M_{Az} + M_{Kz} + M_{упрz}. \end{aligned} \quad (1.10.1)$$

Подставим в правые части уравнений (1.10.1) приближенные выражения сил и моментов, приведенные в § 1.9:

$$\begin{aligned}
 m \left(\frac{dV_{Cx}}{dt} + \omega_y V_{Cz} - \omega_z V_{Cy} \right) &= mg_x + P - \\
 &- \frac{1}{2} c_{x0_a} \rho S (V_{Cx} - W_{Bx})^2 + c_{x\delta} \delta_x; \\
 m \left(\frac{dV_{Cy}}{dt} + \omega_z V_{Cx} - \omega_x V_{Cz} \right) &= mg_y + \sum_j \eta_j P_j - \\
 &- \frac{1}{2} (c_{x0_a} + c_{y\alpha}) \rho S (V_{Cx} - W_{Bx})(V_{Cy} - W_{By}) - \\
 &- \nu_y \omega_z + 2m V_{Crx} \omega_z + c_{y\delta} \delta_\vartheta; \\
 m \left(\frac{dV_{Cz}}{dt} + \omega_x V_{Cy} - \omega_y V_{Cx} \right) &= mg_z + \sum_i \xi_j P_j - \\
 &- \frac{1}{2} (c_{x0_a} + c_{y\alpha}) \rho S (V_{Cx} - W_{Bx})(V_{Cz} - W_{Bz}) - \\
 &- \nu_z \omega_y - 2m V_{Crx} \omega_y + c_{z\delta} \delta_\psi, \tag{1.10.2}
 \end{aligned}$$

где $\nu_y = -Y^{\omega_z} - F_{ky}^{\omega_z}$;

$$\begin{aligned}
 \nu_z &= -Z^{\omega_y} - F_{kz}^{\omega_y} \\
 \text{и } J_x \frac{d\omega_x}{dt} + (J_z - J_y) \omega_y \omega_z &= -\mu_x \omega_x + \sum_j (y_j \xi_j - z_j \eta_j) P_j + c_{\gamma\delta} \delta_\gamma; \\
 J_y \frac{d\omega_y}{dt} + (J_x - J_z) \omega_z \omega_x &= -\mu_y \omega_y + \sum_j (z_j - x_j \xi_j) P_j + \\
 &+ \frac{1}{2} x_F (c_{x0_a} + c_{y\alpha}) \rho S (V_{Cx} - W_{Bx})(V_{Cz} - W_{Bz}) + c_{\psi\delta} \delta_\psi; \tag{1.10.3} \\
 J_z \frac{d\omega_z}{dt} + (J_y - J_x) \omega_x \omega_y &= -\mu_z \omega_z + \sum_j (x_j \eta_j - y_j) P_j - \\
 &- \frac{1}{2} x_F (c_{x0_a} + c_{y\alpha}) \rho S (V_{Cx} - W_{Bx})(V_{Cy} - W_{By}) + c_{\vartheta\delta} \delta_\vartheta,
 \end{aligned}$$

где $\mu_x = -M_{Ax}^{\omega_x} - M_{Kx}^{\omega_x}$, $\mu_y = -M_{Ay}^{\omega_y} - M_{Ky}^{\omega_y}$, $\mu_z = -M_{Az}^{\omega_z} - M_{Kz}^{\omega_z}$.

§ 1.11. НЕВОЗМУЩЕННОЕ И ВОЗМУЩЕННОЕ ДВИЖЕНИЯ

Несмотря на упрощения, допущенные при составлении динамических уравнений движения ракеты, эти уравнения с переменными коэффициентами, будучи нелинейными, остаются довольно сложными. Поэтому на практике в зависимости от характера решаемой задачи динамические уравнения подвергаются дополнительным упрощениям.

Так, при определении траектории движения центра масс считают, что параметры ракеты и системы управления имеют номинальные значения и полет происходит в атмосфере, параметры которой в точности соответствуют так называемой стандартной атмосфере (СА). Помимо этого, не редко пренебрегают колебаниями ракеты вокруг центра масс, исключая из рассмотрения уравнения вращения ракеты вокруг центра масс, т.е. отбрасывают все те факторы, которые либо мало влияют на траекторию движения центра масс, либо по своей природе носят случайный характер и не могут быть учтены. В результате получают некоторую новую, упрощенную систему уравнений, интегрированием которой находят соответствующую принятым идеализациям траекторию движения центра масс.

Полученная таким путем траектория, конечно, будет отличаться от действительной, реализуемой в конкретной обстановке, но при определенных условиях теоретическая и действительная траектории будут близки друг к другу.

Движение ракеты, описываемое упрощенной системой уравнений, при номинальных значениях параметров аппарата и системы управления, стандартных значениях параметров атмосферы и заданных начальных значениях параметров движения принято называть *невозмущенным движением*, а соответствующую траекторию центра масс – *невозмущенной траекторией*. В отличие от этого движение ракеты, описываемое исходными уравнениями при действительных значениях параметров аппарата и системы управления, параметров атмосферы и т.д., называется *возмущенным движением*, а соответствующая ему траектория – *возмущенной*.

При исследовании устойчивости движения летательных аппаратов обычно уравнения движения предварительно подвергают преобразованию, суть которого рассмотрим на следующем примере.

Допустим, что возмущенное и невозмущенное движения описываются соответственно системами дифференциальных уравнений

$$\frac{dy'_1}{dt} = f'_1(y'_1, y'_2, \dots, y'_n; z'_1, z'_2, \dots, z'_m); \quad \dots \quad (1.11.1)$$

$$\frac{dy'_n}{dt} = f'_n(y'_1, y'_2, \dots, y'_n; z'_1, z'_2, \dots, z'_m)$$

$$\text{и } \frac{dy_1}{dt} = f_1(y_1, y_2, \dots, y_n; z_1, z_2, \dots, z_m); \quad \dots \quad (1.11.2)$$

$$\frac{dy_n}{dt} = f_n(y_1, y_2, \dots, y_n; z_1, z_2, \dots, z_m),$$

где y_1, y_2, \dots, y_n – параметры движения, а z_1, z_2, \dots, z_m – некоторые постоянные или переменные параметры (аэродинамические, геометрические, весовые и другие параметры аппарата, параметры атмосферы и т.п.), которые в невозмущенном движении считаются известными. Здесь и в дальнейшем величины, относящиеся к возмущенному движению, обозначаются штрихами.

Для удобства изложения далее будем применять компактную запись систем уравнений. Так, системы (1.11.1) и (1.11.2) представим в виде

$$\frac{dy'_i}{dt} = f'_i(y'_1, \dots, y'_n; z'_1, \dots, z'_m) \quad (i = 1, \dots, n)$$

$$\text{и } \frac{dy_i}{dt} = f_i(y_1, \dots, y_n; z_1, \dots, z_m) \quad (i = 1, \dots, n).$$

Пусть нам известно соответствующее некоторым заданным начальным условиям невозмущенное движение рассматриваемого объекта, которому отвечает частное решение $y_i^0 = y_i^0(t)$ ($i = 1, \dots, n$) уравнений (1.11.2).

При подстановке частного решения $y_i^0(t)$ ($i = 1, \dots, n$) в уравнения (1.11.2) последние обращаются в тождества

$$\frac{dy_i^0}{dt} \equiv f_i(y_1^0, \dots, y_n^0; z_1, \dots, z_m) \quad (i = 1, \dots, n). \quad (1.11.3)$$

Положим

$$y'_i = y_i^0 + \Delta y_i \quad (i = 1, \dots, n); \quad (1.11.4)$$

$$z'_j = z_j + \Delta z_j \quad (j = 1, \dots, m).$$

Вычитая из (1.11.1) тождества (1.11.3) и учитывая (1.11.4), получим

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta y_i}{dt} &= f'_i(y_1^0 + \Delta y_1, \dots, y_n^0 + \Delta y_n; z_1 + \Delta z_1, \dots, z_m + \Delta z_m) - \\ &- f_i(y_1^0, \dots, y_n^0; z_1, \dots, z_m) \quad (i = 1, \dots, n). \end{aligned}$$

Отсюда, разложив в правых частях последних равенств функции f'_i в ряды Тейлора, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta y_i}{dt} &= \sum_{j=1}^n p_{ij}(t) \Delta y_j + \sum_{j=1}^m \pi_{ij}(t) \Delta z_j + \Delta f_i(t) + \\ &+ R_i(t, \Delta y_1, \dots, \Delta y_n; \Delta z_1, \dots, \Delta z_m) \quad (i = 1, \dots, n), \quad (1.11.5) \end{aligned}$$

где $p_{ij} = \left. \frac{\partial f'_i}{\partial y_j} \right|_{\Delta y_1, \dots, \Delta y_n, \Delta z_1, \dots, \Delta z_m = 0};$

$$\pi_{ij} = \left. \frac{\partial f'}{\partial z_j} \right|_{\Delta y_1, \dots, \Delta y_n; \Delta z_1, \dots, \Delta z_m = 0};$$

$$\Delta f_i = f'_i(y_1^0, \dots, y_n^0; z_1, \dots, z_m) - f_i(y_1^0, \dots, y_n^0; z_1, \dots, z_m),$$

а R_i – совокупность членов, имеющих относительно возмущений $\Delta y_1, \dots, \Delta y_n, \Delta z_1, \dots, \Delta z_m$ порядок выше первого.

В преобразованных уравнениях возмущенного движения (1.11.5) искомыми функциями являются возмущения Δy_i ($i = 1, \dots, n$). Каждому движению данной механической системы соответствует некоторое частное решение уравнений (1.11.5).

В задачах об устойчивости движения обычно рассматриваются решения системы (1.11.5) при малых начальных значениях возмущений. При этом естественно ожидать, что характер решений в основном определяется линейной частью уравнений (1.11.5). И действительно, часто оказывается достаточным рассмотреть линейную систему

$$\frac{d \Delta y_i}{dt} = \sum_{j=1}^n p_{ij}(t) \Delta y_j + \sum_{j=1}^m \pi_{ij}(t) \Delta z_j + \Delta f_i(t) \quad (i = 1, \dots, n), \quad (1.11.6)$$

называемую системой уравнений возмущенного движения первого приближения. Пренебрежение нелинейными членами значительно упрощает исследование уравнений.

§ 1.12. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

Основные предпосылки

При выводе дифференциальных уравнений возмущенного движения ракеты в качестве невозмущенного движения рассматривают ее программное движение, определяемое в ходе баллистического расчета, когда считается, что параметры ракеты и системы управления имеют номинальные значения, а параметры атмосферы соответствуют СА.

Все те факторы, которые в ходе баллистического расчета не учитываются и вызывают отклонение действительного движения от программного, рассматриваются как возмущения. Возмущения могут быть разбиты на следующие группы.

1. Весовые возмущения. В ходе баллистического расчета считается, что масса ракеты и ее моменты инерции изменяются с течением времени определенным, известным образом. Истинные значения массы ракеты и ее моментов инерции по разным причинам отличаются от расчетных. Пусть $m'(t), J'_x(t), J'_y(t), J'_z(t)$ – истинные значения массы и моментов инерции, а $m(t), J_x(t), J_y(t), J_z(t)$ – программные значения. Тогда имеем выражения возмущений этих величин

$$\Delta m(t) = m'(t) - m(t); \quad \Delta J_x(t) = J'_x(t) - J_x(t);$$

$$\Delta J_y(t) = J'_y(t) - J_y(t); \quad \Delta J_z(t) = J'_z(t) - J_z(t).$$

2. Аэродинамические возмущения. Основным аэродинамическим возмущающим фактором является ветер. Существенное значение имеет также положение аэродинамического фокуса. Расчетное значение координаты фокуса $x_F(t)$ из-за неточностей в определении положения центра масс и положения фокуса ракеты отличается от истинного значения $x'_F(t)$ на

$$\Delta x_F(t) = x'_F(t) - x_F(t).$$

Разброс значений аэродинамических коэффициентов c_{x_a} , $c_{y_a}^\alpha$ у различных однотипных изделий не имеет существенного значения. Однако определяются эти коэффициенты со значительными погрешностями. Запишем выражения возмущений аэродинамических коэффициентов

$$\Delta c_{x_a} = c'_{x_a} - c_{x_a}, \quad \Delta c_{y_a}^\alpha = c'^{\alpha}_{y_a} - c^{\alpha}_{y_a}.$$

Истинное значение плотности воздуха отличается от расчетного значения, принимаемого по СА, на

$$\Delta \rho = \rho' - \rho.$$

Отклонения площади миделевого сечения S также приводят к ошибкам в расчетах аэродинамических сил. Однако эти отклонения при изготовлении изделия незначительны и ими можно пренебречь.

3. Возмущения, связанные с тягой двигателя. При определении программного движения считается, что тяга двигателя направлена по продольной оси ракеты и что ее центр масс лежит на этой оси. Поэтому составляющие тяги двигателя по поперечным осям OY , OZ , а также момент относительно центра масс ракеты равны нулю. В действительности из-за особенностей компоновки и различных технологических погрешностей имеют место перекос и эксцентризитет тяги относительно центра масс ракеты. Поэтому составляющие тяги по поперечным осям и момент тяги относительно центра масс, вообще говоря, не равны нулю. Кроме того, истинное значение тяги P'_j будет отличаться от расчетного P_j на некоторую величину

$$\Delta P_j(t) = P'_j(t) - P_j(t).$$

4. Возмущения основных параметров движения. К основным параметрам движения отнесем углы тангенса ϑ , рыскания ψ , крена γ , скорость центра масс V_C . Получаем выражения возмущений основных параметров

$$\Delta \vartheta(t) = \vartheta'(t) - \vartheta(t); \quad \Delta \psi(t) = \psi'(t) - \psi(t);$$

$$\Delta \gamma(t) = \gamma'(t) - \gamma(t); \quad \Delta V_C(t) = V'_C(t) - V_C(t).$$

Пусть в момент времени t согласно баллистическому расчету связанная система координат должна занимать некоторое положение в пространстве. Истинное положение этих осей будет иное (рис. 1.17).

Проекции вектора ΔV_C на невозмущенные оси связанной системы обозначим следующим образом:

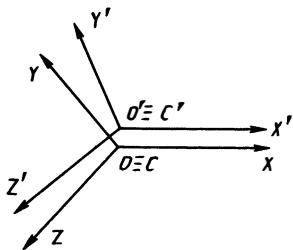


Рис. 1.17.

$$(\Delta V_C)_x = \Delta V_x; (\Delta V_C)_y = \Delta V_y;$$

$$(\Delta V_C)_z = \Delta V_z.$$

5. Возмущения коэффициентов ν_y , ν_z , μ_x , μ_y , μ_z , $c_{x\delta}$, $c_{\vartheta\delta}$, $c_{\psi\delta}$, $c_{\gamma\delta}$. Эти коэффициенты зависят от геометрических параметров ракеты, относительного движения частиц внутри корпуса, параметров движения ракеты. Возмущения перечисленных коэффициентов $\Delta\nu_y$, $\Delta\nu_z$, $\Delta\mu_x$, ... определяются погрешностями (возмущениями) соответствующих геометрических, кинематических и других параметров.

При выводе дифференциальных уравнений возмущенного движения ракеты условимся рассматривать как малые:

возмущения основных параметров движения $\Delta\vartheta$, $\Delta\psi$, $\Delta\gamma$, ΔV_x , ΔV_y , ΔV_z и их производные по времени;

возмущения массы Δm и моментов инерции ΔJ_x , ΔJ_y , ΔJ_z ;

скорость ветра W_B , возмущение плотности воздуха $\Delta\rho$, а также возмущения аэродинамических коэффициентов Δc_{x0a} , Δc_{ya}^α ;

возмущения, связанные с работой двигателя, а именно: ΔP_j , проекции тяги двигателя на оси OY и OZ и момент тяги относительно центра масс; производные по времени от углов тангажа, рыскания, крена;

угол атаки α и его производную по времени;

отклонения органов управления;

возмущения коэффициентов $\Delta\nu_y$, $\Delta\nu_z$, ..., $\Delta c_{\gamma\delta}$.

Из малости α и $d\alpha/dt$ следует малость V_{Cy} , V_{Cz} , dV_{Cy}/dt , dV_{Cz}/dt .

Обычно в программном движении углы рыскания и крена равны нулю. Мы также будем считать, что в невозмущенном движении

$$\psi = 0, \quad \gamma = 0. \quad (1.12.1)$$

Наконец, в силу условия (1.12.1), проекция ускорения свободного падения g на невозмущенную ось OZ в момент старта равна нулю, а вообще — является малой величиной.

Вспомогательные соотношения

Подготовим некоторые вспомогательные соотношения, связывающие величины в невозмущенном и возмущенном движении с точностью до членов второго порядка малости.

Пользуясь равенствами (1.8.2), будем иметь

$$\omega'_x = \frac{d(\gamma + \Delta\gamma)}{dt} - \frac{d(\vartheta + \Delta\vartheta)}{dt} \sin(\psi + \Delta\psi);$$

$$\omega'_y = \frac{d(\psi + \Delta\psi)}{dt} \cos(\gamma + \Delta\gamma) + \frac{d(\vartheta + \Delta\vartheta)}{dt} \cos(\psi + \Delta\psi) \times$$

$$\times \sin(\gamma + \Delta\gamma);$$

$$\omega'_{z'} = \frac{d(\vartheta + \Delta\vartheta)}{dt} \cos(\psi + \Delta\psi) \cos(\gamma + \Delta\gamma) - \\ - \frac{d(\psi + \Delta\psi)}{dt} \sin(\gamma + \Delta\gamma),$$

или, учитывая (1.12.1),

$$\begin{aligned}\omega'_{x'} &= \frac{d\Delta\gamma}{dt} - \frac{d(\vartheta + \Delta\vartheta)}{dt} \sin \Delta\psi; \\ \omega'_{y'} &= \frac{d\Delta\psi}{dt} \cos \Delta\gamma + \frac{d(\vartheta + \Delta\vartheta)}{dt} \cos \Delta\psi \sin \Delta\gamma; \\ \omega'_{z'} &= \frac{d(\vartheta + \Delta\vartheta)}{dt} \cos \Delta\psi \cos \Delta\gamma - \frac{d\Delta\psi}{dt} \sin \Delta\gamma.\end{aligned}$$

Отсюда с точностью до величин второго порядка малости

$$\omega'_{x'} = \frac{d\Delta\gamma}{dt}; \quad \omega'_{y'} = \frac{d\Delta\psi}{dt}; \quad \omega'_{z'} = \frac{d\vartheta}{dt} + \frac{d\Delta\vartheta}{dt}. \quad (1.12.2)$$

Дифференцируя равенства (1.12.2), получим

$$\begin{aligned}\frac{d\omega'_{x'}}{dt} &= \frac{d^2\Delta\gamma}{dt^2}; \quad \frac{d\omega'_{y'}}{dt} = \frac{d^2\Delta\psi}{dt^2}; \\ \frac{d\omega'_{z'}}{dt} &= \frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{d^2\Delta\vartheta}{dt^2}.\end{aligned} \quad (1.12.3)$$

Из равенств (1.12.2) и (1.12.3) видно, кстати, что проекции угловой скорости на связанные оси и их производные являются малыми величинами.

Между проекциями произвольного вектора a на оси двух разных систем координат имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned}a'_{x'} &= a_x \cos(x', x) + a_y \cos(x', y) + a_z \cos(x', z); \\ a'_{y'} &= a_x \cos(y', x) + a_y \cos(y', y) + a_z \cos(y', z); \\ a'_{z'} &= a_x \cos(z', x) + a_y \cos(z', y) + a_z \cos(z', z).\end{aligned} \quad (1.12.4)$$

Как видим, для перехода от одной системы осей к другой достаточно знать матрицу (таблицу) перехода

$$M = \begin{vmatrix} \cos(x', x) & \cos(x', y) & \cos(x', z) \\ \cos(y', x) & \cos(y', y) & \cos(y', z) \\ \cos(z', x) & \cos(z', y) & \cos(z', z) \end{vmatrix}.$$

Значения косинусов углов между осями можно определить как скалярные произведения единичных векторов, направленных по соответствующим осям.

Пусть i' , j' , k' – единичные направляющие векторы осей $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$, а i , j , k – единичные направляющие векторы осей OX , OY , OZ . Тогда

$$M = \begin{vmatrix} i' \cdot i & i' \cdot j & i' \cdot k \\ j' \cdot i & j' \cdot j & j' \cdot k \\ k' \cdot i & k' \cdot j & k' \cdot k \end{vmatrix} .$$

Как известно, скалярное произведение двух векторов равняется сумме произведений их соответствующих составляющих. Например,

$$i' \cdot i = i'_x i_x + i'_y i_y + i'_z i_z .$$

Составляя скалярные произведения, используя для этого табл. 1.1, легко вычислить элементы матрицы M :

$$\begin{aligned} i' \cdot i &= \cos \Delta\psi \cos(\vartheta + \Delta\vartheta) \cos \vartheta + \cos \Delta\psi \sin(\vartheta + \Delta\vartheta) \sin \vartheta = \\ &= \cos \Delta\psi \cos \Delta\vartheta ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i' \cdot j &= -\cos \Delta\psi \cos(\vartheta + \Delta\vartheta) \sin \vartheta + \cos \Delta\psi \sin(\vartheta + \Delta\vartheta) \cos \vartheta = \\ &= \cos \Delta\psi \sin \Delta\vartheta ; \end{aligned}$$

$$i' \cdot k = -\sin \Delta\psi ;$$

$$\begin{aligned} j' \cdot i &= -\cos \Delta\gamma \sin(\vartheta + \Delta\vartheta) \cos \vartheta + \sin \Delta\gamma \sin \Delta\psi \cos(\vartheta + \Delta\vartheta) \cos \vartheta + \\ &+ \cos \Delta\gamma \cos(\vartheta + \Delta\vartheta) \sin \vartheta + \sin \Delta\gamma \sin \Delta\psi \sin(\vartheta + \Delta\vartheta) \sin \vartheta = \\ &= \sin \Delta\gamma \sin \Delta\psi \cos \Delta\vartheta - \cos \Delta\gamma \sin \Delta\vartheta ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j' \cdot j &= \cos \Delta\gamma \sin(\vartheta + \Delta\vartheta) \sin \vartheta - \sin \Delta\gamma \sin \Delta\psi \cos(\vartheta + \Delta\vartheta) \sin \vartheta + \\ &+ \cos \Delta\gamma \cos(\vartheta + \Delta\vartheta) \cos \vartheta + \sin \Delta\gamma \sin \Delta\psi \sin(\vartheta + \Delta\vartheta) \cos \vartheta = \\ &= \cos \Delta\gamma \cos \Delta\vartheta + \sin \Delta\gamma \sin \Delta\psi \sin \Delta\vartheta ; \end{aligned}$$

$$j' \cdot k = \sin \Delta\gamma \cos \Delta\psi ;$$

$$\begin{aligned} k' \cdot i &= \cos \Delta\gamma \sin \Delta\psi \cos(\vartheta + \Delta\vartheta) \cos \vartheta + \sin \Delta\gamma \sin(\vartheta + \Delta\vartheta) \cos \vartheta - \\ &- \sin \Delta\gamma \cos(\vartheta + \Delta\vartheta) \sin \vartheta + \cos \Delta\gamma \sin \Delta\psi \sin(\vartheta + \Delta\vartheta) \sin \vartheta = \\ &= \sin \Delta\gamma \sin \Delta\vartheta + \cos \Delta\gamma \sin \Delta\psi \cos \Delta\vartheta ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k' \cdot j &= -\cos \Delta\gamma \sin \Delta\psi \cos(\vartheta + \Delta\vartheta) \sin \vartheta - \\ &- \sin \Delta\gamma \sin(\vartheta + \Delta\vartheta) \sin \vartheta - \sin \Delta\gamma \cos(\vartheta + \Delta\vartheta) \cos \vartheta + \\ &+ \cos \Delta\gamma \sin \Delta\psi \sin(\vartheta + \Delta\vartheta) \cos \vartheta = -\sin \Delta\gamma \cos \Delta\vartheta + \\ &+ \cos \Delta\gamma \sin \Delta\psi \sin \Delta\vartheta ; \end{aligned}$$

$$k' \cdot k = \cos \Delta\gamma \cos \Delta\psi .$$

Отсюда с точностью до величин второго порядка малости

$$\begin{aligned} \mathbf{i}' \cdot \mathbf{i} &= 1; & \mathbf{i}' \cdot \mathbf{j} &= \Delta\vartheta; & \mathbf{i}' \cdot \mathbf{k} &= -\Delta\psi; \\ \mathbf{j}' \cdot \mathbf{i} &= -\Delta\vartheta; & \mathbf{j}' \cdot \mathbf{j} &= 1; & \mathbf{j}' \cdot \mathbf{k} &= \Delta\gamma; \\ \mathbf{k}' \cdot \mathbf{i} &= \Delta\psi; & \mathbf{k}' \cdot \mathbf{j} &= -\Delta\gamma; & \mathbf{k}' \cdot \mathbf{k} &= 1. \end{aligned}$$

Значит, с этой точностью

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & \Delta\vartheta & -\Delta\psi \\ -\Delta\vartheta & 1 & \Delta\gamma \\ \Delta\psi & -\Delta\gamma & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.12.5)$$

На основании равенства (1.12.4), используя выражение (1.12.5), получаем

$$\begin{aligned} V'_{Cx'} &= V'_{Cx} + V'_{Cy} \Delta\vartheta - V'_{Cz} \Delta\psi; \\ V'_{Cy'} &= -V'_{Cx} \Delta\vartheta + V'_{Cy} + V'_{Cz} \Delta\gamma; \\ V'_{Cz'} &= V'_{Cx} \Delta\psi - V'_{Cy} \Delta\gamma + V'_{Cz}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $V'_{Cx} = V_{Cx} + \Delta V_x$; $V'_{Cy} = V_{Cy} + \Delta V_y$; $V'_{Cz} = V_{Cz} + \Delta V_z$, и сохраняя величины не выше первого порядка малости, будем иметь

$$\begin{aligned} V'_{Cx'} &= V_{Cx} + \Delta V_x; \\ V'_{Cy'} &= -V_{Cx} \Delta\vartheta + V_{Cy} + \Delta V_y; \\ V'_{Cz'} &= V_{Cx} \Delta\psi + V_{Cz} + \Delta V_z. \end{aligned} \quad (1.12.6)$$

Из равенств (1.12.6) путем дифференцирования находим

$$\begin{aligned} \frac{dV'_{Cx'}}{dt} &= \frac{dV_{Cx}}{dt} + \frac{d\Delta V_x}{dt}; \\ \frac{dV'_{Cy'}}{dt} &= -\frac{dV_{Cx}}{dt} \Delta\vartheta - V_{Cx} \frac{d\Delta\vartheta}{dt} + \frac{dV_{Cy}}{dt} + \frac{d\Delta V_y}{dt}; \\ \frac{dV'_{Cz'}}{dt} &= \frac{dV_{Cx}}{dt} \Delta\psi + V_{Cx} \frac{d\Delta\psi}{dt} + \frac{dV_{Cz}}{dt} + \frac{d\Delta V_z}{dt}. \end{aligned} \quad (1.12.7)$$

Для проекции ускорения свободного падения и скорости ветра получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} g_{x'} &= g_x + g_y \Delta\vartheta - g_z \Delta\psi; & g_{y'} &= -g_x \Delta\vartheta + g_y + g_z \Delta\gamma; \\ g_{z'} &= g_x \Delta\psi - g_y \Delta\gamma + g_z; & W_{Bx'} &= W_{Bx} + W_{By} \Delta\vartheta - W_{Bz} \Delta\psi; \\ W_{By'} &= -W_{Bx} \Delta\vartheta + W_{By} + W_{Bz} \Delta\gamma; \\ W_{Bz'} &= W_{Bx} \Delta\psi - W_{By} \Delta\gamma + W_{Bz}. \end{aligned}$$

Отбросив члены второго порядка малости, находим

$$\begin{aligned} g_{x'} &= g_x + g_y \Delta \vartheta; & g_{y'} &= -g_x \Delta \vartheta + g_y; \\ g_{z'} &= g_x \Delta \psi - g_y \Delta \gamma + g_z; \end{aligned} \quad (1.12.8)$$

$$W_{Bx'} = W_{Bx}; \quad W_{By'} = W_{By}; \quad W_{Bz'} = W_{Bz}. \quad (1.12.9)$$

Линеаризация уравнений возмущенного движения

Упростим систему уравнений (1.10.2) путем ее линеаризации. Рассматривая эти уравнения как уравнения действительного движения, входящие в них величины отметим штрихами, чтобы отличить их от соответствующих величин невозмущенного движения. Как указывалось выше, невозмущенным движением ракеты будем считать ее программное движение.

Запишем первое уравнение сил:

$$\begin{aligned} m \left(\frac{dV'_{Cx'}}{dt} + \omega'_y V'_{Cz'} - \omega'_z V'_{Cy'} \right) &= m' g_{x'} + P' - \\ - \frac{1}{2} c'_{x_0 a} \rho' S (V'_{Cx'} - W_{Bx'})^2 + c'_{x \delta} \delta'_x. \end{aligned} \quad (1.12.10)$$

Уравнение, соответствующее программному движению, имеет вид

$$m \left(\frac{dV_{Cx}}{dt} - \omega_z V_{Cy} \right) = mg_x + P - \frac{1}{2} c_{x_0 a} \rho S V_{Cx}^2 + c_{x \delta} \delta_x. \quad (1.12.11)$$

Уравнения (1.12.10) и (1.12.11) можно упростить, отбросив члены второго порядка малости:

$$\begin{aligned} m' \frac{dV'_{Cx'}}{dt} &= m' g_{x'} + P' - \frac{1}{2} c'_{x_0 a} \rho' S (V'_{Cx'}^2 - 2V'_{Cx'} W_{Bx'}) + \\ + c'_{x \delta} \delta'_x; \end{aligned} \quad (1.12.12)$$

$$m \frac{dV_{Cx}}{dt} = mg_x + P - \frac{1}{2} c_{x_0 a} \rho S V_{Cx}^2 + c_{x \delta} \delta_x. \quad (1.12.13)$$

Используя соотношения, полученные выше, запишем (1.12.2) в виде

$$\begin{aligned} (m + \Delta m) \left(\frac{dV_{Cx}}{dt} + \frac{d\Delta V_x}{dt} \right) &= (m + \Delta m)(g_x + g_y \Delta \vartheta) + P + \\ + \Delta P - \frac{1}{2} (c_{x_0 a} + \Delta c_{x_0 a})(\rho + \Delta \rho) S (V_{Cx}^2 + 2V_{Cx} \Delta V_x + \Delta V_x^2 - \\ - 2V_{Cx} W_{Bx} - 2\Delta V_x W_{Bx}) + (c_{x \delta} + \Delta c_{x \delta})(\delta_x + \Delta \delta_x). \end{aligned}$$

Снова отбросим члены второго и более высокого порядка малости:

$$\begin{aligned}
m \frac{dV_{Cx}}{dt} + m \frac{d\Delta V_x}{dt} + \Delta m \frac{dV_{Cx}}{dt} &= mg_x + mg_y \Delta \vartheta + \Delta mg_x + \\
+ P + \Delta P - \frac{1}{2} c_{x0_a} \rho S V_{Cx}^2 &- c_{x0_a} \rho S V_{Cx} \Delta V_x + \\
+ c_{x0_a} \rho S V_{Cx} W_{bx} - \frac{1}{2} c_{x0_a} \Delta \rho S V_{Cx}^2 &- \frac{1}{2} \Delta c_{x0_a} \rho S V_{Cx}^2 + \\
+ c_{x\delta} (\delta_x + \Delta \delta_x).
\end{aligned}$$

Производную dV_{Cx}/dt исключим с помощью уравнения (1.12.13). Получим

$$\begin{aligned}
m \frac{d\Delta V_x}{dt} + \frac{\Delta m}{m} (P - \frac{1}{2} c_{x0_a} \rho S V_{Cx}^2) &= mg_y \Delta \vartheta + \\
+ \Delta P - c_{x0_a} \rho S V_{Cx} \Delta V_x + c_{x0_a} \rho S V_{Cx} W_{bx} - & \\
- \frac{1}{2} c_{x0_a} S V_{Cx}^2 \Delta \rho - \frac{1}{2} \rho S V_{Cx}^2 \Delta c_{x0_a} + c_{x\delta} \Delta \delta_x,
\end{aligned}$$

или окончательно

$$m \frac{d\Delta V_x}{dt} + c_{x0_a} \rho S V_{Cx} \Delta V_x - mg_y \Delta \vartheta = \Delta F_x + c_{x\delta} \Delta \delta_x, \quad (1.12.14)$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta F_x = - \frac{\Delta m}{m} (P - \frac{1}{2} c_{x0_a} \rho S V_{Cx}^2) + \Delta P + c_{x0_a} \rho S V_{Cx} W_{bx} - \\
- \frac{1}{2} c_{x0_a} S V_{Cx}^2 \Delta \rho - \frac{1}{2} \rho S V_{Cx}^2 \Delta c_{x0_a} - \text{осевая возмущающая сила}.
\end{aligned}$$

Аналогичным образом осуществим линеаризацию остальных уравнений системы (1.10.2). Не оговаривая особо, при написании тех или иных соотношений в случае надобности будем отбрасывать члены второго и более высокого порядка малости.

Вторые уравнения сил при действительном и программном движении с точностью до членов второго порядка малости соответственно могут быть записаны таким образом:

$$\begin{aligned}
m' \left(\frac{dV'_{Cy'}}{dt} + \omega'_z V'_{Cx'} \right) &= m' g_{y'} + \sum_j \eta_j P'_j - \\
- \frac{1}{2} (c'_{x0_a} + c'^{\alpha'}_{y_a}) \rho' S V'_{Cx'} V'_{Cy'} + & \\
+ \frac{1}{2} (c'_{x0_a} + c'^{\alpha'}_{y_a}) \rho' S V'_{Cx'} W_{by'} - v'_y \omega'_z + c'_{y\delta} \delta'_\vartheta,
\end{aligned} \quad (1.12.15)$$

$$m \left(\frac{dV_{Cy}}{dt} + V_{Cx} \frac{d\vartheta}{dt} \right) = mg_y - \frac{1}{2} (c_{x0a} + c_{y_a}^\alpha) \rho S V_{Cx} V_{Cy} - \\ - \nu_y \frac{d\vartheta}{dt} + c_{y\delta} \delta_\vartheta. \quad (1.12.16)$$

Из выражения (1.12.15) имеем

$$(m + \Delta m) \left[\frac{dV_{Cy}}{dt} + \frac{d\Delta V_y}{dt} - \frac{dV_{Cx}}{dt} \Delta\vartheta - V_{Cx} \frac{d\Delta\vartheta}{dt} + \right. \\ \left. + \left(\frac{d\vartheta}{dt} + \frac{d\Delta\vartheta}{dt} \right) (V_{Cx} + \Delta V_x) \right] = (m + \Delta m) (g_y - g_x \Delta\vartheta) + \\ + \sum_j \eta_j P_j + \sum_j \eta_j \Delta P_j - \frac{1}{2} (c_{x0a} + \Delta c_{x0a} + c_{y_a}^\alpha + \Delta c_{y_a}^\alpha) \times \\ \times (\rho + \Delta\rho) S (V_{Cx} + \Delta V_x) (V_{Cy} + \Delta V_y - V_{Cx} \Delta\vartheta) + \\ + \frac{1}{2} (c_{x0a} + \Delta c_{x0a} + c_{y_a}^\alpha + \Delta c_{y_a}^\alpha) (\rho + \Delta\rho) S (V_{Cx} + \\ + \Delta V_x) W_{By} - (\nu_y + \Delta\nu_y) \left(\frac{d\vartheta}{dt} + \frac{d\Delta\vartheta}{dt} \right) + \\ + (c_{y\delta} + \Delta c_{y\delta}) (\delta_\vartheta + \Delta\delta_\vartheta).$$

Отсюда

$$m \left(\frac{dV_{Cy}}{dt} + \frac{d\Delta V_y}{dt} - \frac{dV_{Cx}}{dt} \Delta\vartheta + V_{Cx} \frac{d\vartheta}{dt} \right) = \\ = m(g_y - g_x \Delta\vartheta) + \Delta m g_y + \sum_j \eta_j P_j - \frac{1}{2} (c_{x0a} + \\ + c_{y_a}^\alpha) \rho S V_{Cx} (V_{Cy} + \Delta V_y - V_{Cx} \Delta\vartheta) + \frac{1}{2} (c_{x0a} + \\ + c_{y_a}^\alpha) \rho S V_{Cx} W_{By} - \nu_y \left(\frac{d\vartheta}{dt} + \frac{d\Delta\vartheta}{dt} \right) + c_{y\delta} (\delta_\vartheta + \Delta\delta_\vartheta).$$

Производные dV_{Cx}/dt , dV_{Cy}/dt исключим с помощью равенств (1.12.13) и (1.12.16). Тогда

$$m \frac{d\Delta V_y}{dt} + \nu_y \frac{d\Delta\vartheta}{dt} - (P - \frac{1}{2} c_{x0a} \rho S V_{Cx}^2) \Delta\vartheta = \\ = \Delta m g_y + \sum_j \eta_j P_j - \frac{1}{2} (c_{x0a} + c_{y_a}^\alpha) \rho S V_{Cx} (\Delta V_y -$$

$$- V_{Cx} \Delta \vartheta) + \frac{1}{2} (c_{x_0 a} + c_{y_a}^\alpha) \rho S V_{Cx} W_{By} + c_{y_\delta} \Delta \delta_\vartheta,$$

или

$$m \frac{d \Delta V_y}{dt} + v_y \frac{d \Delta \vartheta}{dt} + \frac{1}{2} (c_{x_0 a} + c_{y_a}^\alpha) \rho S V_{Cx} \Delta V_y - \\ - (P + \frac{1}{2} c_{y_a}^\alpha \rho S V_{Cx}^2) \Delta \vartheta = \Delta F_y + c_{y_\delta} \Delta \delta_\vartheta, \quad (1.12.17)$$

где $\Delta F_y = \Delta m g_y + \sum_j \eta_j P_j + \frac{1}{2} (c_{x_0 a} + c_{y_a}^\alpha) \rho S V_{Cx} W_{By}$ – возмущающая сила в направлении оси OY .

Третий уравнения сил при действительном и программном движении с точностью до членов второго порядка малости можно записать следующим образом:

$$m' \left(\frac{d V'_{Cz'}}{dt} - \omega'_{y'} V'_{Cx'} \right) = m' g_z' + \sum_j \xi_j P'_j - \\ - \frac{1}{2} (c'_{x_0 a} + c'_{y_a}^\alpha) \rho' S V'_{Cx'} (V'_{Cz'} - W_{Bz'}) - \\ - v'_z \omega'_{y'} + c'_{z_\delta} \delta'_\psi; \quad (1.12.18)$$

$$m \frac{d V_{Cz}}{dt} = m g_z - \frac{1}{2} (c_{x_0 a} + c_{y_a}^\alpha) \rho S V_{Cx} V_{Cz} + c_{z_\delta} \delta_\psi. \quad (1.12.19)$$

Как и ранее, из (1.12.18) получаем

$$(m + \Delta m) \left[\frac{d V_{Cx}}{dt} \Delta \psi + V_{Cx} \frac{d \Delta \psi}{dt} + \frac{d V_{Cz}}{dt} + \frac{d \Delta V_z}{dt} - \right. \\ \left. - \frac{d \Delta \psi}{dt} (V_{Cx} + \Delta V_x) \right] = (m + \Delta m) (g_x \Delta \psi + g_z - g_y \Delta \gamma) + \\ + \sum_j \xi_j (P_j + \Delta P_j) - \frac{1}{2} (c_{x_0 a} + \Delta c_{x_0 a} + c_{y_a}^\alpha + \\ + \Delta c_{y_a}^\alpha) (\rho + \Delta \rho) S (V_{Cx} + \Delta V_x) (V_{Cx} \Delta \psi + V_{Cz} + \Delta V_z - W_{Bz}) - \\ - (v_z + \Delta v_z) \frac{d \Delta \psi}{dt} + (c_{z_\delta} + \Delta c_{z_\delta}) (\delta_\psi + \Delta \delta_\psi),$$

или

$$m \left(\frac{d V_{Cx}}{dt} \Delta \psi + \frac{d V_{Cz}}{dt} + \frac{d \Delta V_z}{dt} \right) = m (g_x \Delta \psi + g_z - g_y \Delta \gamma) +$$

$$+ \sum_j \xi_j P_j - \frac{1}{2} (c_{x_0 a} + c_{y_a}^\alpha) \rho S V_{Cx} (V_{Cx} \Delta \psi + V_{Cz} + \Delta V_z - W_{Bz}) - \\ - v_z \frac{d \Delta \psi}{dt} + c_{z\delta} (\delta_\psi + \Delta \delta_\psi).$$

Подставим сюда значения dV_{Cx}/dt , dV_{Cz}/dt . Тогда

$$(P - \frac{1}{2} c_{x_0 a} \rho S V_{Cx}^2) \Delta \psi + m \frac{d \Delta V_z}{dt} = -mg_y \Delta \gamma + \sum_j \xi_j P_j - \\ - \frac{1}{2} (c_{x_0 a} + c_{y_a}^\alpha) \rho S V_{Cx} (V_{Cx} \Delta \psi + \Delta V_z - W_{Bz}) - v_z \frac{d \Delta \psi}{dt} + \\ + c_{z\delta} \Delta \delta_\psi.$$

Отсюда

$$m \frac{d \Delta V_z}{dt} + v_z \frac{d \Delta \psi}{dt} + \frac{1}{2} (c_{x_0 a} + c_{y_a}^\alpha) \rho S V_{Cx} \Delta V_z + \\ + (P + \frac{1}{2} c_{y_a}^\alpha \rho S V_{Cx}^2) \Delta \psi + mg_y \Delta \gamma = \Delta F_z + c_{z\delta} \Delta \delta_\psi, \quad (1.12.20)$$

где $\Delta F_z = \frac{1}{2} (c_{x_0 a} + c_{y_a}^\alpha) \rho S V_{Cx} W_{Bz} + \sum_j \xi_j P_j$ – возмущающая сила

в направлении оси OZ .

Первое уравнение моментов без учета членов второго порядка малости имеет вид

$$J'_x \frac{d \omega'_{x'}}{dt} = -\mu'_x \omega'_{x'} + \sum_j (y_j \xi_j - z_j \eta_j) P'_j + c'_{\gamma\delta} \delta'_\gamma. \quad (1.12.21)$$

Отсюда

$$(J_x + \Delta J_x) \frac{d^2 \Delta \gamma}{dt^2} = -(\mu_x + \Delta \mu_x) \frac{d \Delta \gamma}{dt} + \\ + \sum_j (y_j \xi_j - z_j \eta_j) (P_j + \Delta P_j) + (c_{\gamma\delta} + \Delta c_{\gamma\delta}) (\delta_\gamma + \Delta \delta_\gamma),$$

или, учитывая, что в программном движении $\delta_\gamma = 0$,

$$J_x \frac{d^2 \Delta \gamma}{dt^2} + \mu_x \frac{d \Delta \gamma}{dt} = \Delta M_x + c_{\gamma\delta} \Delta \delta_\gamma, \quad (1.12.22)$$

где $\Delta M_x = \sum_j (y_j \xi_j - z_j \eta_j) P_j$ – проекция момента возмущающих сил на ось OX .

Преобразуя второе уравнение моментов

$$J'_y \frac{d\omega'_{y'}}{dt} = -\mu'_y \omega'_{y'} + \sum_j (z_j - x_j \xi_j) P'_j + \\ + \frac{1}{2} x'_F (c'_{x_0 a} + c'_{y_a}) \rho' S V'_{Cx'} (V'_{Cz'} - W_{Bz'}) + c'_{\psi \delta} \delta'_{\psi},$$

получим

$$J_y \frac{d^2 \Delta \psi}{dt^2} + \mu_y \frac{d \Delta \psi}{dt} = \sum_j (z_j - x_j \xi_j) P_j + \frac{1}{2} x_F (c_{x_0 a} + c_{y_a}) \rho S V_{Cx} (V_{Cz} + \Delta V_z - W_{Bz}) + c_{\psi \delta} (\delta_{\psi} + \Delta \delta_{\psi}).$$

В случае программного движения

$$\frac{1}{2} x_F (c_{x_0 a} + c_{y_a}) \rho S V_{Cx} V_{Cz} + c_{\psi \delta} \delta_{\psi} = 0.$$

Поэтому

$$J_y \frac{d^2 \Delta \psi}{dt^2} + \mu_y \frac{d \Delta \psi}{dt} - \frac{1}{2} x_F (c_{x_0 a} + c_{y_a}) \rho S V_{Cx} (\Delta V_z + V_{Cx} \Delta \psi) = \Delta M_y + c_{\psi \delta} \Delta \delta_{\psi}, \quad (1.12.23)$$

$$\text{где } \Delta M_y = -\frac{1}{2} x_F (c_{x_0 a} + c_{y_a}) \rho S V_{Cx} W_{Bz} + \sum_j (z_j - x_j \xi_j) P_j -$$

проекция возмущающего момента на ось OY .

Наконец, третье уравнение моментов

$$J'_z \frac{d\omega'_{z'}}{dt} = -\mu'_z \omega'_{z'} + \sum_j (x_j \eta_j - y_j) P'_j - \frac{1}{2} x'_F (c'_{x_0 a} + c'_{y_a}) \rho' S V'_{Cx'} (V'_{Cy'} - W_{By'}) + c'_{\vartheta \delta} \delta'_{\vartheta}$$

приводится к виду

$$J_z \left(\frac{d^2 \vartheta}{dt^2} + \frac{d^2 \Delta \vartheta}{dt^2} \right) + \mu_z \left(\frac{d \vartheta}{dt} + \frac{d \Delta \vartheta}{dt} \right) = \\ = \sum_j (x_j \eta_j - y_j) P_j - \frac{1}{2} x_F (c_{x_0 a} + c_{y_a}) \rho S V_{Cx} (-V_{Cx} \Delta \vartheta + V_{Cy} + \Delta V_y - W_{By}) + c_{\vartheta \delta} (\delta_{\vartheta} + \Delta \delta_{\vartheta}).$$

При программном движении

$$-\frac{1}{2}x_F(c_{x_0a} + c_{y_a}^\alpha)\rho SV_{Cx}V_{Cy} + c_{\vartheta\delta}\delta_\vartheta = 0.$$

Учитывая это, будем иметь

$$\begin{aligned} J_z \frac{d^2\Delta\vartheta}{dt^2} + \mu_z \frac{d\Delta\vartheta}{dt} + \frac{1}{2}x_F(c_{x_0a} + c_{y_a}^\alpha)\rho SV_{Cx}(\Delta V_y - \\ - V_{Cx}\Delta\vartheta) = \Delta M_z + c_{\vartheta\delta}\Delta\delta_\vartheta, \end{aligned} \quad (1.12.24)$$

$$\text{где } \Delta M_z = \frac{1}{2}x_F(c_{x_0a} + c_{y_a}^\alpha)\rho SV_{Cx}W_{By} + \sum_j(x_j\eta_j - y_j)P_j - \\ - J_z \frac{d^2\vartheta}{dt^2} - \mu_z \frac{d\vartheta}{dt} \text{ — проекция возмущающего момента на ось } OZ.$$

Таким образом, система линеаризованных уравнений возмущенного движения имеет вид

$$\begin{aligned} m \frac{d\Delta V_x}{dt} + c_{x_0a}\rho SV_{Cx}\Delta V_x - mg_y\Delta\vartheta = c_{x\delta}\Delta\delta_x + \Delta F_x; \\ m \frac{d\Delta V_y}{dt} + \nu_y \frac{d\Delta\vartheta}{dt} + \frac{1}{2}(c_{x_0a} + c_{y_a}^\alpha)\rho SV_{Cx}\Delta V_y - \\ - (P + \frac{1}{2}c_{y_a}^\alpha\rho SV_{Cx}^2)\Delta\vartheta = c_{y\delta}\Delta\delta_\vartheta + \Delta F_y; \\ m \frac{d\Delta V_z}{dt} + \nu_z \frac{d\Delta\psi}{dt} + \frac{1}{2}(c_{x_0a} + c_{y_a}^\alpha)\rho SV_{Cx}\Delta V_z + \\ + (P + \frac{1}{2}c_{y_a}^\alpha\rho SV_{Cx}^2)\Delta\psi + mg_y\Delta\gamma = c_{z\delta}\Delta\delta_\psi + \Delta F_z; \end{aligned} \quad (1.12.25)$$

$$\begin{aligned} J_x \frac{d^2\Delta\gamma}{dt^2} + \mu_x \frac{d\Delta\gamma}{dt} = c_{\gamma\delta}\Delta\delta_\gamma + \Delta M_x; \\ J_y \frac{d^2\Delta\psi}{dt^2} + \mu_y \frac{d\Delta\psi}{dt} - \frac{1}{2}x_F(c_{x_0a} + c_{y_a}^\alpha)\rho SV_{Cx}\Delta V_z - \\ - \frac{1}{2}x_F(c_{x_0a} + c_{y_a}^\alpha)\rho SV_{Cx}^2\Delta\psi = c_{\psi\delta}\Delta\delta_\psi + \Delta M_y; \\ J_z \frac{d^2\Delta\vartheta}{dt^2} + \mu_z \frac{d\Delta\vartheta}{dt} + \frac{1}{2}x_F(c_{x_0a} + c_{y_a}^\alpha)\rho SV_{Cx}\Delta V_y - \\ - \frac{1}{2}x_F(c_{x_0a} + c_{y_a}^\alpha)\rho SV_{Cx}^2\Delta\vartheta = c_{\vartheta\delta}\Delta\delta_\vartheta + \Delta M_z. \end{aligned}$$

В уравнениях (1.12.25) искомыми являются функции ΔV_x , ΔV_y , ΔV_z , $\Delta \vartheta$, $\Delta \psi$, $\Delta \gamma$, $\Delta \delta_x$, $\Delta \delta_\vartheta$, $\Delta \delta_\psi$, $\Delta \delta_\gamma$. Коэффициенты при этих функциях и их производных, так называемые динамические коэффициенты, определяются конструктивными и геометрическими параметрами ракеты, ее аэродинамическими характеристиками и различными параметрами программного движения, которые находят в ходе баллистического расчета. При анализе системы (1.12.25) параметры невозмущенного (программного) движения рассматриваются как известные функции времени. Функции ΔF_x , ΔF_y , ΔF_z , ΔM_x , ΔM_y , ΔM_z зависят, кроме того, от различных возмущений (весовых, аэродинамических и т.п.), зависимость которых от искомых функций ΔV_x , ΔV_y , ... очень слабая, поэтому, пре-небрегая влиянием искомых функций, возмущающие силы и моменты ΔF_x , ΔF_y , ΔF_z , ΔM_x , ΔM_y , ΔM_z рассматривают как функции времени, не зависящие от ΔV_x , ΔV_y , ΔV_z , $\Delta \vartheta$, $\Delta \psi$, $\Delta \gamma$, $\Delta \delta_x$, $\Delta \delta_\vartheta$, $\Delta \delta_\psi$, $\Delta \delta_\gamma$.

§ 1.13. РАСПЕЛЕНИЕ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

Легко видеть, что система линеаризованных уравнений возмущенного движения (1.12.25) распадается на две независимые группы уравнений. Одна из них описывает изменение параметров ΔV_x , ΔV_y , $\Delta \vartheta$:

$$m \frac{d\Delta V_x}{dt} + c_{xx} \Delta V_x - mg_y \Delta \vartheta = c_{x\delta} \Delta \delta_x + \Delta F_x; \quad (1.13.1)$$

$$m \frac{d\Delta V_y}{dt} + v_y \frac{d\Delta \vartheta}{dt} + c_{yy} \Delta V_y + c_{y\vartheta} \Delta \vartheta = c_{y\delta} \Delta \delta_\vartheta + \Delta F_y;$$

$$J_z \frac{d^2 \Delta \vartheta}{dt^2} + \mu_z \frac{d\Delta \vartheta}{dt} + c_{\vartheta y} \Delta V_y + c_{\vartheta \vartheta} \Delta \vartheta = c_{\vartheta \delta} \Delta \delta_\vartheta + \Delta M_z,$$

где $c_{xx} = c_{x0a} \rho S V_{Cx}$; $c_{yy} = \frac{1}{2} (c_{x0a} + c_{y_a^\alpha}) \rho S V_{Cx}$;

$$c_{y\vartheta} = -(P + \frac{1}{2} c_{y_a^\alpha} \rho S V_{Cx}^2); \quad c_{\vartheta y} = \frac{1}{2} x_F (c_{x0a} + c_{y_a^\alpha}) \rho S V_{Cx}; \quad (1.13.2)$$

$$c_{\vartheta \vartheta} = -\frac{1}{2} x_F (c_{x0a} + c_{y_a^\alpha}) \rho S V_{Cx}^2.$$

Другая группа описывает изменение ΔV_z , $\Delta \psi$, $\Delta \gamma$:

$$\begin{aligned} m \frac{d\Delta V_z}{dt} + v_z \frac{d\Delta \psi}{dt} + c_{zz} \Delta V_z + c_{z\psi} \Delta \psi + mg_y \Delta \gamma = \\ = c_{z\delta} \Delta \delta_\psi + \Delta F_z; \end{aligned} \quad (1.13.3)$$

$$J_x \frac{d^2 \Delta \gamma}{dt^2} + \mu_x \frac{d\Delta \gamma}{dt} = c_{\gamma\delta} \Delta \delta_\gamma + \Delta M_x;$$

$$J_y \frac{d^2 \Delta \psi}{dt^2} + \mu_y \frac{d \Delta \psi}{dt} + c_{\psi z} \Delta V_z + c_{\psi \psi} \Delta \psi = c_{\psi \delta} \Delta \delta_\psi + \Delta M_y, \quad (1.13.3)$$

$$\text{где } c_{zz} = \frac{1}{2} (c_{x_0 a} + c_{y_a}^\alpha) \rho S V_{Cx}; \quad c_{z\psi} = P + \frac{1}{2} c_{y_a}^\alpha \rho S V_{Cx}^2;$$

$$c_{\psi z} = -\frac{1}{2} x_F (c_{x_0 a} + c_{y_a}^\alpha) \rho S V_{Cx}; \\ c_{\psi \psi} = -\frac{1}{2} x_F (c_{x_0 a} + c_{y_a}^\alpha) \rho S V_{Cx}^2. \quad (1.13.4)$$

При изменении параметров ΔV_x , ΔV_y , $\Delta \vartheta$ параметры ΔV_z , $\Delta \psi$, $\Delta \gamma$, как видно из уравнений (1.13.1) и (1.13.3), не изменяются, и наоборот. Значит, в условиях, когда возмущенное движение ракеты достаточно точно описывается линеаризованными уравнениями, это движение можно рассматривать как суперпозицию двух движений, представленных двумя независимыми системами (1.13.1) и (1.13.3), которые можно исследовать раздельно. Расщепление системы (1.12.25) на независимые подсистемы значительно упрощает решение задач, так как при этом рассматриваются системы, порядок которых значительно меньше, чем у исходной.

Обычно линеаризованные уравнения возмущенного движения разбивают на более мелкие группы, полагая, что каналы управления отклонениями $\Delta \delta_x$, $\Delta \delta_\vartheta$, $\Delta \delta_\psi$ и $\Delta \delta_\gamma$ работают независимо. В системе (1.13.1) второе и третье уравнения могут рассматриваться отдельно от первого уравнения, т.е. из системы (1.13.1) может быть выделена независимая подсистема

$$m \frac{d \Delta V_y}{dt} + \nu_y \frac{d \Delta \vartheta}{dt} + c_{yy} \Delta V_y + c_{y\vartheta} \Delta \vartheta = c_{y\delta} \Delta \delta_\vartheta + \Delta F_y; \\ J_z \frac{d^2 \Delta \vartheta}{dt^2} + \mu_z \frac{d \Delta \vartheta}{dt} + c_{\vartheta y} \Delta V_y + c_{\vartheta \vartheta} \Delta \vartheta = c_{\vartheta \delta} \Delta \delta_\vartheta + \Delta M_z, \quad (1.13.5)$$

которая описывает возмущенное движение ракеты по тангажу. Что касается первого уравнения системы (1.13.1), то оно также может рассматриваться самостоятельно, если из системы (1.13.5) уже определена $\Delta \vartheta$ как функция времени. Слагаемое $m g_y \Delta \vartheta$ в этом случае целесообразно включить в состав возмущающей силы ΔF_x . Тогда будем иметь

$$m \frac{d \Delta V_x}{dt} + c_{xx} \Delta V_x = c_{x\delta} \Delta \delta_x + \Delta F_x, \quad (1.13.6)$$

$$\text{где } \Delta F_x = -\frac{\Delta m}{m} (P - \frac{1}{2} c_{x_0 a} \rho S V_{Cx}^2) + \Delta P + c_{x_0 a} \rho S V_{Cx} W_{bx} -$$

$$-\frac{1}{2} c_{x_0 a} S V_{Cx}^2 \Delta \rho - \frac{1}{2} \rho S V_{Cx}^2 \Delta c_{x_0 a} + m g_y \Delta \vartheta. \quad (1.13.7)$$

Уравнение (1.13.6) описывает продольное возмущенное движение ракеты.

Из системы (1.13.3) может быть выделено и рассмотрено отдельно уравнение

$$J_x \frac{d^2 \Delta \gamma}{dt^2} + \mu_x \frac{d \Delta \gamma}{dt} = c_{\gamma \delta} \Delta \delta_\gamma + \Delta M_x, \quad (1.13.8)$$

описывающее возмущенное движение ракеты по крену.

Два других уравнения системы (1.13.3) можно также анализировать отдельно от остальных групп уравнений, если отбросить слагаемое $m g_y \Delta \gamma$, мало влияющее на точность описания возмущенного движения ракеты, или же рассматривать здесь $\Delta \gamma$ как известную функцию времени, определенную из уравнения (1.13.8); в последнем случае удобно включить слагаемое $m g_y \Delta \gamma$ в состав возмущающей силы. Тогда последняя группа уравнений примет вид

$$\begin{aligned} m \frac{d \Delta V_z}{dt} + v_z \frac{d \Delta \psi}{dt} + c_{zz} \Delta V_z + c_{z\psi} \Delta \psi &= c_{z\delta} \Delta \delta_\psi + \Delta F_z, \\ J_y \frac{d^2 \Delta \psi}{dt^2} + \mu_y \frac{d \Delta \psi}{dt} + c_{\psi z} \Delta V_z + c_{\psi \psi} \Delta \psi &= c_{\psi \delta} \Delta \delta_\psi + \Delta M_y. \end{aligned} \quad (1.13.9)$$

Уравнения (1.13.9) описывают возмущенное движение ракеты по рысканию.

§ 1.14. ЗАКОНЫ УПРАВЛЕНИЯ

При исследовании возмущенного движения ракеты как управляемого объекта к уравнениям движения нужно добавить уравнения, определяющие закон формирования управляющего воздействия на объект.

Входное воздействие на регулятор (автомат стабилизации), называемое далее управляющим сигналом регулятора, формируется обычно как линейная комбинация регулируемых величин и их производных. Пусть регулируемыми величинами являются q_1, q_2, \dots, q_n — некоторые обобщенные координаты рассматриваемой механической системы (например, углы тангажа, рыскания и т.д.). Тогда управляющей сигнал регулятора

$$v = \sum_{j=1}^n (b_{1j} \dot{q}_j + b_{2j} q_j). \quad (1.14.1)$$

Коэффициенты b_{1j}, b_{2j} могут быть как постоянными, так и функциями от времени t .

Иногда в формировании управляющего сигнала участвуют и вторые производные от обобщенных координат q_j .

Выходным сигналом регулятора является отклонение $\Delta\delta$ органа управления (руля).

Между управляющим и выходным сигналами регулятора в реальных системах обычно имеет место нелинейная связь.

Для упрощения анализа регулятор рассматривают как линейную систему, для этого накладывают некоторые ограничения на его работу.

Связь между управляющим и выходным сигналами линейного регулятора с параметрами, зависящими от времени, представляют в виде [14]

$$\Delta\delta = \int_{-\infty}^t g(t - t', t') v(t') dt',$$

где $g(t - t', t')$ – импульсная переходная функция регулятора, которая представляет собой реакцию предварительно невозбужденной системы на управляющий сигнал в виде дельта-функции.

В частности, если параметры регулятора в рассматриваемом промежутке времени неизменны, то

$$\Delta\delta = \int_{-\infty}^t g(t - t') v(t') dt'.$$

Линейные законы управления могут быть представлены и в форме линейного дифференциального уравнения, например:

$$T_2^2 \frac{d^2 \Delta\delta}{dt^2} + T_1 \frac{d \Delta\delta}{dt} + \Delta\delta_\vartheta = k \Delta\vartheta + k_1 \frac{d \Delta\vartheta}{dt}.$$

В общем случае эти дифференциальные уравнения можно представить в символической записи

$$P(D) \Delta\delta = \sum_j Q_j(D) q_j,$$

где $P(D)$, $Q_j(D)$ – содержащие D многочлены, коэффициенты которых, вообще говоря, являются функциями от t ; $D \equiv d/dt$ – символ дифференцирования.

§ 1.15. ОБЩИЙ ВИД УРАВНЕНИЙ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

При выводе уравнений (1.12.25) были отброшены члены, содержащие произведения возмущений или их степени выше первой. Если этого не делать, то после перехода к новым переменным ΔV_x , ..., $\Delta\gamma$ (возмущениям основных параметров) в правых частях уравнений появятся функции, нелинейные относительно этих переменных и остальных возмущений.

Для удобства представления системы уравнений возмущенного движения в таком виде перейдем к другим обозначениям.

Пусть x_C' , y_C' , z_C' – координаты центра инерции ракеты в возмущенном движении в системе координат $OXYZ$. Тогда очевидно,

$$\Delta V_x = \frac{dx_{C'}}{dt}, \quad \Delta V_y = \frac{dy_{C'}}{dt}, \quad \Delta V_z = \frac{dz_{C'}}{dt}.$$

Параметры движения $x_{C'}$, $y_{C'}$, $z_{C'}$, $\Delta\vartheta$, $\Delta\psi$, $\Delta\gamma$, если известно положение связанных осей при невозмущенном движении, определяют положение корпуса ракеты в пространстве и могут рассматриваться как обобщенные координаты ракеты. Уравнения возмущенного движения, написанные относительно этих обобщенных координат, представляют в виде системы нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Обозначая через q_j обобщенные координаты, через μ_k — прочие возмущения и опуская для удобства символ Δ при δ , уравнения возмущенного движения ракеты можно представить в общем виде:

$$\sum_{j=1}^n [m_{ij}(t) \frac{d^2 q_j}{dt^2} + r_{ij}(t) \frac{dq_j}{dt} + n_{ij}(t)q_j] = \\ = a_i(t)\delta_i + h_i(t, \mu_k) + f_i(t, q_j, \frac{dq_j}{dt}, \mu_k) \quad (i = 1, \dots, n). \quad (1.15.1)$$

Здесь под q_1 , q_2 , ..., q_n подразумеваются координаты $x_{C'}$, $y_{C'}$, $z_{C'}$, $\Delta\vartheta$, $\Delta\psi$, $\Delta\gamma$ или часть их в зависимости от того, рассматривается ли полная система уравнений или же какая-нибудь ее подсистема (например, подсистема, описывающая возмущенное движение ракеты по тангажу); символами m_{ij} , r_{ij} , n_{ij} , a_i заменены принятые в § 1.13 обозначения коэффициентов уравнений возмущенного движения (m , J_x , J_y , J_z , c_{xx} , c_{yy} , c_{zz} , $c_{y\vartheta}$ и т.д.); функции $h_i(t, \mu_k)$ представляют собой возмущающие силы и моменты; наконец, через f_i обозначены те нелинейные члены, которые в процессе вывода уравнений (1.12.25) были отброшены.

Линеаризованная система уравнений получается из (1.15.1), если отбросить члены, нелинейные относительно q_j , dq_j/dt , μ_k :

$$\sum_{j=1}^n [m_{ij}(t) \frac{d^2 q_j}{dt^2} + r_{ij}(t) \frac{dq_j}{dt} + n_{ij}(t)q_j] = \\ = a_i(t)\delta_i + h_i(t, \mu_k) \quad (i = 1, \dots, n). \quad (1.15.2)$$

Возмущения μ_k (например, $\Delta c_{x_0 a}$, $\Delta\rho$, $\Delta c_{y_a}^\alpha$, ...) незначительно зависят от возмущений основных параметров, поэтому этой зависимостью можно пренебречь. Рассматривая возмущения μ_k как функции только времени t , мы можем уравнения возмущенного движения (1.15.1) представить в виде

$$\sum_{j=1}^n [m_{ij}(t) \frac{d^2 q_j}{dt^2} + r_{ij}(t) \frac{dq_j}{dt} + n_{ij}(t)q_j] = \\ = a_i(t)\delta_i + h_i(t) + f_i(t, q_j, \frac{dq_j}{dt}) \quad (i = 1, \dots, n). \quad (1.15.3)$$

В соответствии с этим линеаризованную систему уравнений возмущенного движения можно записать следующим образом:

$$\sum_{j=1}^n [m_{ij}(t) \frac{d^2 q_j}{dt^2} + r_{ij}(t) \frac{dq_j}{dt} + n_{ij}(t) q_j] = a_i(t) \delta_i + h_i(t) \quad (i = 1, \dots, n). \quad (1.15.4)$$

Каждая из систем (1.15.3), (1.15.4) совместно с уравнениями системы управления образует замкнутую относительно переменных q_j , δ_i систему уравнений, описывающую возмущенное движение ракеты как системы автоматического управления.

Замечание. Форма записи уравнений возмущенного движения ракеты, принятая в настоящем параграфе, носит общий характер в том смысле, что уравнения возмущенного движения ракеты с учетом движения жидкостей в баках и упругости конструкции при некоторых упрощениях тоже могут быть представлены в форме системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений вида (1.15.3), (1.15.4).

ГЛАВА 2. УСТОЙЧИВОСТЬ И УПРАВЛЯЕМОСТЬ РАКЕТЫ

§ 2.1. ПОНЯТИЯ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И УПРАВЛЯЕМОСТИ

При отклонении органов управления или воздействии внешних возмущений ракета, как и любой другой летательный аппарат, совершает некоторое возмущенное движение, характер которого зависит от динамических свойств аппарата – управляемости и устойчивости.

Управляемость летательного аппарата характеризуется его реакцией на отклонение органов управления путем изменения параметров движения (скорости, углов тангажа, крена и т.д.). Органы управления ракеты должны обладать достаточной эффективностью для парирования различного рода возмущающих факторов (ветра, перекоса и эксцентризитета тяги двигателя и т.д.).

Выбор параметров органов управления и определение их эффективности связаны с интегрированием уравнений движения ракеты. Получить точное аналитическое решение этих уравнений обычно не представляется возможным, поэтому широко применяются методы приближенного интегрирования уравнений, электромоделирование и интегрирование уравнений с помощью быстродействующих электронно-вычислительных машин дискретного счета.

Понятие об устойчивости движения является одним из наиболее важных понятий в динамике ракет.

Можно сказать, что ракета как механическая система устойчива, если малые воздействия приводят к малым эффектам, и неустойчива, если это не всегда имеет место.

Такое определение устойчивости носит интуитивный характер и, разумеется, непригодно для решения конкретных задач. Оно должно быть заменено математически строгим определением, пригодным для установления количественных критериев устойчивости и неустойчивости движения механической системы. Определение устойчивости, с одной стороны, должно как можно полнее характеризовать это объективное свойство системы, а с другой стороны, предоставлять возможность построения удобного рабочего аппарата для исследования устойчивости движения конкретных объектов.

В настоящее время существует большое число разнообразных определений устойчивости. Это объясняется тем, что трудно, а может быть, и невозможно сформулировать такое универсальное определение устойчивости, которое всегда и полностью удовлетворяло бы требованиям практики и было бы принято всеми как единственно верное. Ниже приводятся некоторые определения устойчивости, успешно применяемые при решении различных задач математической физики, механики и техники.

Статическая устойчивость

Некоторое представление об устойчивости движения ракеты можно получить, исследуя движение ракеты с неподвижными органами управления (т.е. при $\delta \equiv 0$) при малых отклонениях параметров движения от их значений в равновесном состоянии, когда сумма моментов всех внешних и реактивных сил, действующих на ракету, равна нулю.

Рассмотрим, например, движение ракеты в плоскости тангажа, считая, что продольная ось ракеты и скорость центра масс лежат в одной вертикальной плоскости. Представим сумму моментов относительно оси Oz следующим образом:

$$\Sigma M_z = M_{Az} + M_{\text{пр}z}, \quad (2.1.1)$$

где M_{Az} – момент аэродинамических сил (без аэродинамического момента, создаваемого отклонением воздушных рулей, если таковые имеются); $M_{\text{пр}z}$ – момент всех прочих сил (внешних и реактивных), действующих на ракету.

Согласно (1.9.9)

$$\Sigma M_z = x_F Y + M_{\text{пр}z}, \quad (2.1.2)$$

где Y – составляющая аэродинамической силы по оси OY , определенная по второй формуле системы (1.9.8). Так как в данном случае

$$V_{Cy} = -V_C \sin \alpha,$$

$$\text{то } Y = (c_{x_a} \sin \alpha + c_{y_a} \cos \alpha) S \rho \frac{V_C^2}{2}. \quad (2.1.3)$$

Рассматривая малые углы атаки, когда можно принять $\sin \alpha \approx \alpha$, $\cos \alpha \approx 1$ и $c_{y_a} = c_{y_a}^\alpha \alpha$, вместо (2.1.3) будем иметь

$$Y = (c_{x_a} + c_{y_a}^\alpha) \alpha S \rho \frac{V_C^2}{2}. \quad (2.1.4)$$

При изменении угла атаки в выражении (2.1.2) изменяется только Y . Если момент $M_{\text{пр}z}$ не слишком велик, то при некотором значении $\alpha = \alpha_{\text{бал}}$ наступает балансировка летательного аппарата, когда сумма всех моментов, действующих на аппарат, равна нулю, т.е.

$$x_F Y|_{\alpha = \alpha_{\text{бал}}} + M_{\text{пр}z} = 0. \quad (2.1.5)$$

Вычитая из (2.1.2) равенство (2.1.5), получим

$$\Sigma M_z = x_F (Y - Y|_{\alpha = \alpha_{\text{бал}}}), \quad (2.1.6)$$

или в силу равенства (2.1.4)

$$\Sigma M_z = x_F (c_{x_a} + c_{y_a}^\alpha) S \rho \frac{V_C^2}{2} (\alpha - \alpha_{\text{бал}}). \quad (2.1.7)$$

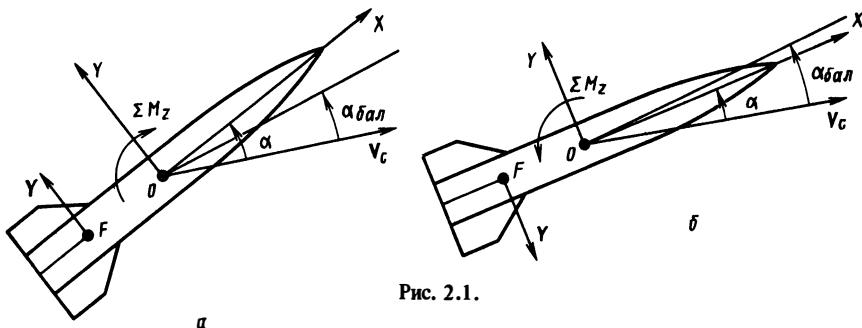


Рис. 2.1.

Возможны следующие три случая.

1. $x_F < 0$ (аэродинамический фокус расположен позади центра масс аппарата).

Если $\alpha > \alpha_{\text{бал}}$, то в этом случае $\Sigma M_z < 0$, т.е. на ракету действует момент, который направлен в сторону уменьшения разности $\alpha - \alpha_{\text{бал}}$ (рис. 2.1, а).

Если $\alpha < \alpha_{\text{бал}}$, то $\Sigma M_z > 0$, т.е. опять момент направлен в сторону уменьшения разности $\alpha_{\text{бал}} - \alpha$ (рис. 2.1, б).

Таким образом, если $x_F < 0$, то при нарушении балансировки летательного аппарата моменты, действующие на аппарат, направлены в сторону уменьшения $|\alpha - \alpha_{\text{бал}}|$. В этом случае говорят, что летательный аппарат обладает статической устойчивостью.

2. $x_F = 0$ (аэродинамический фокус совпадает с центром масс аппарата).

Как видно из выражения (2.1.7), при любом малом изменении угла атаки никакого момента не возникает. Летательный аппарат находится в состоянии безразличного равновесия.

3. $x_F > 0$ (аэродинамический фокус расположен переди центра масс аппарата).

В данном случае знак момента совпадает со знаком разности $\alpha - \alpha_{\text{бал}}$. Это означает, что при отклонении в любую сторону от положения равновесия возникает момент, направленный в сторону увеличения $|\alpha - \alpha_{\text{бал}}|$ (рис. 2.2). В таком случае говорят, что имеет место статическая неустойчивость.

Понятие статической устойчивости нельзя отождествлять с понятием устойчивости движения. Наличие статической устойчивости лишь свидетельствует о том, что в данный момент времени на летательный аппарат действуют силы, стремящиеся вернуть его в положение равновесия. Но это не исключает возможности возникновения такой ситуации, при которой аппарат в своем стремлении вернуться к положению равновесия начнет колебаться, при этом максимальное отклонение его от равновесного положения будет с течением времени увеличиваться. Далее, статическая устойчивость является характеристикой летательного аппарата с неподвижными органами управления. Отклонение органов управления кардинально

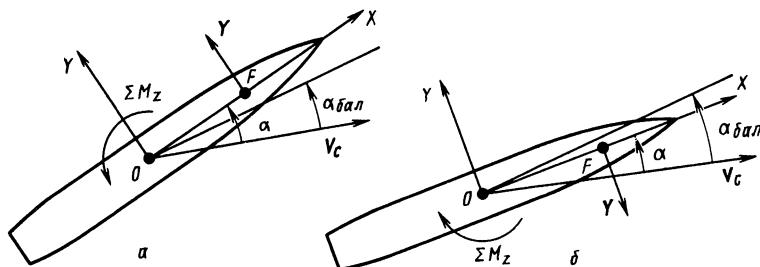


Рис. 2.2.

изменяет динамические свойства аппарата. Ракета, даже статически неустойчивая, благодаря системе управления может совершать движение, мало отличающееся от желаемого. И наоборот, если система управления спроектирована неверно, то ракета, обладающая статической устойчивостью, будет недопустимо сильно отклоняться от заданной траектории.

Понятие устойчивости движения ракеты, как и любой другой механической системы, должно отражать характер ее реального движения во времени.

Устойчивость по Ляпунову

Пусть движение механической системы описывается системой дифференциальных уравнений, приведенной к нормальному виду

$$\frac{dy_i}{dt} = Y_i(t, y_1, \dots, y_n) \quad (i = 1, \dots, n), \quad (2.1.8)$$

где y_i — некоторые параметры движения (координаты, скорости и т.п.).

Каждое решение системы (2.1.8) представляют собой некоторое частное движение рассматриваемой механической системы. Рассмотрим частное движение системы, которому отвечает решение $y_i^0 = f_i(t)$ ($i = 1, \dots, n$) уравнений (2.1.8). Это частное движение Ляпунов назвал невозмущенным в отличие от других возмущенных движений данной механической системы.

В уравнениях (2.1.8) произведем замену переменных:

$$x_i = y_i - f_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.1.9)$$

Получим следующую систему дифференциальных уравнений относительно возмущений x_i :

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2.1.10)$$

где $X_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv Y_i(t, x_1 + f_1, x_2 + f_2, \dots, x_n + f_n) - Y_i(t, f_1, \dots, f_n)$.

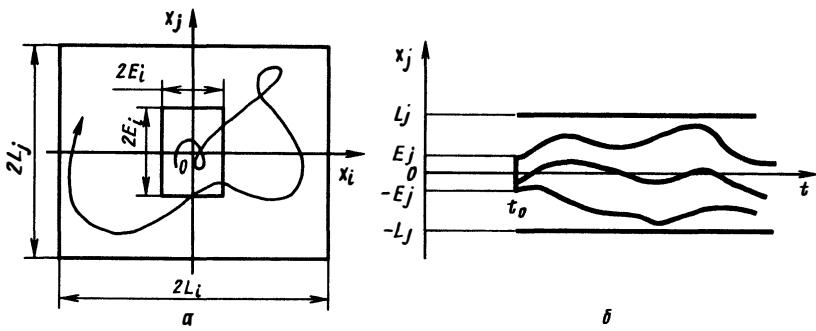


Рис. 2.3.

Каждому движению рассматриваемой механической системы соответствует в силу (2.1.9) частное решение уравнений (2.1.10). В частности, невозмущенному движению системы соответствует тривиальное (нулевое) решение $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ уравнений (2.1.10).

Ляпунов дал следующее определение устойчивости невозмущенного движения (тривиального решения уравнений (2.1.10)).

Пусть L_1, \dots, L_n суть произвольно задаваемые положительные числа. Если при любых L_i , как бы малы они ни были, можно выбрать положительные числа E_1, \dots, E_n так, чтобы при любых вещественных x_{i0} , удовлетворяющих условиям

$$|x_{i0}| \leq E_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2.1.11)$$

и при t , большем t_0 , выполнялись неравенства

$$|x_i| < L_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2.1.12)$$

то невозмущенное движение по отношению к величинам x_i устойчиво; в противном случае – неустойчиво.

Определению устойчивости по Ляпунову можно дать следующее геометрическое толкование.

В n -мерном пространстве величин x_1, x_2, \dots, x_n задается параллелепипед с центром в начале координат и гранями, параллельными координатным плоскостям. Размеры граней определяются числами $2L_1, \dots, 2L_n$. Эти числа задаются произвольным образом и могут быть какими угодно малыми (но не равными нулю). Если внутри данного параллелепипеда можно построить другой параллелепипед с гранями, размеры которых определены положительными числами $2E_1, \dots, 2E_n$, а именно такими, что начиная с момента времени t_0 функции $x_i(t)$ попадают внутрь первого параллелепипеда, если их начальные значения, т.е. x_{i0} , находились внутри второго параллелепипеда, то невозмущенное движение по отношению к величинам x_i устойчиво (на рис. 2.3, a показаны сечения этих параллелепипедов координатной плоскостью $Ox_i x_j$ и изменение координат x_i и x_j с течением времени в случае устойчивого нулевого решения). Другими

словами, невозмущенное движение устойчиво, если все возмущения x_j ($j = 1, \dots, n$), значения которых в начальный момент времени t_0 достаточно малы, ни при каких t , больших t_0 , не выходят за пределы, определенные заданными, сколь угодно малыми числами L_j (рис. 2.3, б).

Определение устойчивости по Ляпунову не содержит каких-либо конкретных количественных ограничений величин x_i . Устойчивость движения по Ляпунову является некоторой характеристикой сопротивляемости движения действующим возмущениям. В этом заключается механический смысл понятия устойчивости по Ляпунову.

Устойчивость на конечном промежутке времени.

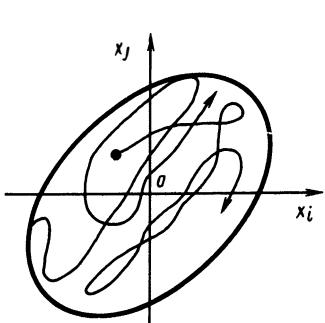
Техническая устойчивость

Существенным моментом в определении устойчивости по Ляпунову является ограничение отклонений x_i на бесконечном интервале времени условием (2.1.12). Если перейти к ограничениям на конечном промежутке, даже сколько угодно большом, всякий смысл в определении Ляпунова теряется, поскольку на любом конечном промежутке времени любое движение, в том числе и не обладающее механической устойчивостью, удовлетворяет условиям (2.1.11) и (2.1.12). Между тем реальные объекты функционируют в течение конечного промежутка времени и поэтому весьма целесообразно ввести понятие устойчивости в пределах конечного промежутка времени. Понятие устойчивости движения приобретает смысл для конечного промежутка времени, если ввести зависимость между областями, ограничивающими x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) при $t = t_0$ и $t > t_0$.

Приведем два различных определения устойчивости движения на конечном промежутке времени, предложенных Г.В. Каменковым и Н.Д. Моисеевым.

Каменков, сохраняя механический смысл понятия устойчивости, который вкладывал в него Ляпунов, сформулировал задачи устойчивости движения на конечном промежутке времени следующим образом.

Если дифференциальные уравнения возмущенного движения (2.1.10) таковы, что при достаточно малом положительном числе A величины x_s , рассматриваемые как функции времени, удовлетворяют условию



$$\sum_{s=1}^n (a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \dots + a_{sn}x_n)^2 \leq A \quad (2.1.13)$$

на конечном промежутке времени $[t_0, t_0 + \Delta t]$, если только начальные значения этих функций x_{i0} удовлетворяют условию

$$\sum_{s=1}^n (a_{s1}x_{10} + a_{s2}x_{20} + \dots + a_{sn}x_{n0})^2 \leq A, \quad (2.1.14)$$

Рис. 2.4.

$$\text{причем } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то невозмущенное движение будет устойчиво в течение времени Δt ; в противном случае – неустойчиво.

Приведенное определение устойчивости допускает следующую геометрическую интерпретацию (рис. 2.4).

Пусть в некоторый момент времени $t = t_0$ система получила некоторые отличные от нуля, произвольно малые отклонения x_{10}, \dots, x_{n0} , находящиеся внутри или на поверхности n -мерного эллипсоида

$$\sum_{s=1}^n (a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \dots + a_{sn}x_n)^2 = A. \quad (2.1.15)$$

Если затем отклонения $x_s(t)$ ($s = 1, 2, \dots, n$) остаются внутри или на поверхности этого эллипсоида по крайней мере до момента времени $t = t_1 > t_0$, то движение устойчиво на промежутке $[t_0, t_1]$; в противном случае – неустойчиво.

Число A , с помощью которого вводится ограничение на величины x_s , не предполагается наперед заданным: для устойчивости системы требуется лишь выполнение неравенств (2.1.13), (2.1.14) при достаточно малом значении A . Благодаря этому сравнительно легко устанавливаются условия устойчивости и неустойчивости системы и оценивается промежуток времени $\Delta t = t_1 - t_0$, в пределах которого эти условия соблюдаются.

Понятие устойчивости на конечном промежутке времени, предложенное Каменковым, носит локальный характер. Обычно требуется исследовать поведение механической системы в пределах определенного заданного промежутка времени. Чтобы судить об устойчивости движения в пределах заданного промежутка времени, требуется проведение некоторого числа однотипных исследований при различных начальных значениях t_0 из рассматриваемого промежутка.

Рассматривая механические системы, возмущенное движение которых описывается уравнениями

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, x_2, \dots, x_n) + p_s(t) \quad (s = 1, 2, \dots, n), \quad (2.1.16)$$

где $p_s(t)$ – возмущающие силы, действующие на систему, Моисеев дал следующее определение так называемой технической устойчивости триадального решения уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (s = 1, 2, \dots, n). \quad (2.1.17)$$

Движение, соответствующее нулевому решению $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ уравнений (2.1.17), называется технически устойчивым относительно заданных верхних пределов начальных отклонений $\bar{x}_{s0} > 0$, заданных верхних пределов возмущающих сил $\bar{p}_s > 0$ и заданных верхних пределов последующих отклонений $\bar{x}_s > 0$ на заданном интервале времени $0 \leq t \leq \bar{t}$ в том и только в том случае, если любое решение $x_s = x_s(t)$ системы уравнений (2.1.16) при любых начальных значениях x_{s0} , удовлетворяющих условию $|x_{s0}| \leq \bar{x}_{s0}$, и при произвольных возмущающих силах, на которые накладывается единственное ограничение $|p_s(t)| \leq \bar{p}_s$ при $0 \leq t \leq \bar{t}$, будет удовлетворять условию

$$|x_s(t)| \leq \bar{x}_s \quad (s = 1, 2, \dots, n)$$

для всех значений t , не превышающих \bar{t} .

В этом случае в отличие от определений устойчивости по Ляпунову и Каменкову предельно допустимые значения возмущений предполагаются конечными и наперед заданными. Вследствие этого техническая устойчивость является субъективной характеристикой движения механической системы: любое движение в зависимости от заданных значений предельных отклонений может оказаться как устойчивым, так и неустойчивым. Некоторые неудобства проистекают из необходимости задавать предельные отклонения: рациональные значения этих величин обычно неизвестны и трудно определимы.

Тем не менее постановка задачи устойчивости, предложенная Моисеевым, позволяя в каждом конкретном случае наиболее приемлемым образом оценить саму механическую систему исходя из ее потребительских качеств, является очень привлекательной для технических приложений и, в частности, для задач динамики ракет.

Более подробно о различных постановках задачи об устойчивости движения на конечном промежутке времени и методах ее решения в этих постановках, а также с подробной библиографией по этим вопросам можно ознакомиться по обзору [3].

Локальная устойчивость

Возмущенное движение ракеты описывается системой уравнений, в которую входят уравнения возмущенного движения аппарата как объекта регулирования (1.15.3) или линеаризованные уравнения (1.15.4) и уравнения системы управления. В полете на ракету постоянно действуют различные возмущения (ветровые, весовые и др.). Вследствие этого в уравнениях возмущенного движения фигурируют возмущающие силы. Так, в линеаризованных уравнениях возмущенного движения (1.15.4) эти возмущающие силы представлены функциями $h_i(t)$.

Каждому частному решению уравнений возмущенного движения соответствует некоторое возмущенное движение ракеты. Невозмущенному же движению соответствует тривиальное (нулевое) решение уравнений, которые получаются из уравнений возмущенного движения, если в них отбросить все возмущающие силы. Устойчивость и неустойчивость

невозмущенного движения эквивалентны устойчивости и неустойчивости указанного тривиального решения, а устойчивость этого тривиального решения определяется зависимостью от времени частных решений уравнений возмущенного движения, в которых фигурируют постоянно действующие возмущения.

Таким образом, как и в постановке Моисеева, решение задачи устойчивости невозмущенного движения ракеты связано с анализом решений системы уравнений при наличии возмущающих сил, в то время как исследуемое движение представляется частным решением другой системы уравнений, не содержащей возмущающих сил. Исследование устойчивости движения в этих условиях является трудной задачей, и рассмотрение ее строгого решения выходит за рамки учебной литературы.

В данном учебнике мы ограничимся упрощенной постановкой задачи, которой, кстати, широко пользуются и на практике.

Предположим, что в течение некоторого конечного промежутка времени на летательный аппарат действовали возмущающие силы и их действие в момент времени t_0 , который будем называть начальным моментом, прекращается. Вследствие воздействия возмущающих сил значения кинематических параметров движения летательного аппарата при $t = t_0$ будут отличаться от их значений при невозмущенном движении: $V'(t_0) = V(t_0) + \Delta V(t_0)$, $\vartheta'(t_0) = \vartheta(t_0) + \Delta \vartheta(t_0)$ и т.д.

Решение задачи устойчивости невозмущенного движения при $t > t_0$ связывают с характером изменения возмущений $\Delta V(t)$, $\Delta \vartheta(t)$, $\Delta \psi(t)$... Ракета считается устойчивой или неустойчивой при $t > t_0$ на некотором промежутке $[t_0, t_1]$ в зависимости от того, как изменяются возмущения кинематических параметров на этом промежутке.

Поскольку изменение возмущений $\Delta V(t)$, $\Delta \vartheta(t)$, $\Delta \psi(t)$, ... при $t > t_0$ происходит при отсутствии возмущающих сил, возмущения кинематических параметров представляются как соответствующее начальным значениям этих параметров ($\Delta V(t_0)$, $\Delta \vartheta(t_0)$, $\Delta \psi(t_0)$, ...) частное решение уравнений возмущенного движения ракеты, в которых все возмущающие силы отброшены. Таким образом, в приведенной постановке предметом исследований становятся более простые уравнения, благодаря чему задача устойчивости существенно облегчается.

Возмущающие силы, приложенные к ракете, в действительности и при $t > t_0$ продолжают оказывать влияние на кинематические параметры движения. Но если рассматривать достаточно малый промежуток времени $[t_0, t_1]$, то, вероятнее всего, эффект от действия в течение него возмущающих сил будет небольшим по сравнению с эффектом от действия этих сил за длительное время, предшествующее моменту t_0 .

Устойчивость при указанной схематизации возмущенного движения ракеты будем называть локальной устойчивостью.

О методах решения задачи устойчивости

Все способы решения задачи устойчивости движения могут быть разбиты на две категории. К первой категории относятся те способы, кото-

рые основаны на определении общего или частного решения уравнений возмущенного движения. Совокупность всех способов первой категории Ляпунов назвал первым методом. При исследовании устойчивости по первому методу центральным является вопрос об интегрировании уравнений возмущенного движения. Если удается проинтегрировать эти уравнения в замкнутом виде, то исследование устойчивости далее уже не представляет серьезных трудностей.

Ко второй категории относятся те способы, которые не требуют нахождения частных или общих решений уравнений возмущенного движения. Совокупность всех способов второй категории Ляпунов назвал вторым или прямым методом.

При решении задачи устойчивости любым методом обычно прибегают к различным приемам, упрощающим уравнения возмущенного движения. Так, задача значительно упростится, если ограничиться рассмотрением линеаризованных уравнений возмущенного движения – уравнений первого приближения.

Уравнения возмущенного движения ракеты первого приближения представляют в форме линейных уравнений, коэффициенты которых зависят от кинематических параметров невозмущенного движения (скорости, высоты полета и т.п.) и конструктивных параметров аппарата (массы, моментов инерции и т.п.). Так как при невозмущенном движении происходит быстрое изменение скорости и высоты полета, массы и моментов инерции, то оно носит явно выраженный неуставновившийся характер. Вследствие этого коэффициенты уравнений возмущенного движения являются функциями от времени t . Исследование систем с переменными коэффициентами, даже линейных, является очень сложной задачей. Поэтому на практике в целях дальнейшего упрощения задачи ее сводят к исследованию систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами посредством получившего в настоящее время широкое распространение приема "замораживания" коэффициентов.

§ 2.2. МЕТОД "ЗАМОРОЖЕННЫХ" КОЭФФИЦИЕНТОВ

Метод "замороженных" коэффициентов – это метод исследования уравнений возмущенного движения, основанный на приеме "замораживания" коэффициентов уравнений, суть которого заключается в следующем.

Пусть уравнения возмущенного движения представлены в форме

$$\sum_{j=1}^n [m_{ij}(t) \frac{d^2 q_j}{dt^2} + r_{ij}(t) \frac{dq_j}{dt} + n_{ij}(t) q_j] = a_i(t) \delta_i + h_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.2.1)$$

Коэффициенты уравнений $m_{ij}(t)$, $r_{ij}(t)$, $n_{ij}(t)$, $a_i(t)$, $h_i(t)$ зависят от кинематических параметров невозмущенного движения и конструктивных параметров летательного аппарата и являются известными функ-

циями времени. На невозмущенной траектории выбирают некоторое число характерных точек $t_1, \dots, t_k, \dots, t_m$ так, чтобы по поведению аппарата в окрестностях этих точек можно было бы с достаточной достоверностью судить о его поведении на всей траектории. Для изучения движения ракеты в окрестностях точки t_k вместо системы уравнений (2.2.1) с переменными коэффициентами рассматривают систему уравнений с постоянными коэффициентами, равными значениям этих коэффициентов в фиксированный момент времени t_k , т.е. систему

$$\sum_{j=1}^n [m_{ij}(t_k) \frac{d^2 q_j}{dt^2} + r_{ij}(t_k) \frac{dq_j}{dt} + n_{ij}(t_k) q_j] = a_i(t_k) \delta_i + h_i(t_k) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.2.2)$$

Новая система уравнений, как система с постоянными коэффициентами, может быть легко проинтегрирована. О поведении решения исходной системы (2.2.1) судят по решению системы (2.2.2).

Ясно, что решения этих двух систем не совпадают, но если коэффициенты уравнений изменяются достаточно медленно, то с некоторой уверенностью можно утверждать, что в окрестности точки t_k решение исходной системы будет мало отличаться от решения системы с "замороженными" коэффициентами. В качестве меры изменения коэффициентов уравнений иногда принимается степень изменения за время переходного процесса. Коэффициенты уравнений считаются медленно меняющимися, если их изменение за время переходного процесса не превышает 10...15 % точного значения динамических коэффициентов.

Надо сказать, что судить о правомерности применения приема "замороженных" коэффициентов только по поведению коэффициентов уравнений на некотором отрезке времени можно лишь с известной осторожностью. Этот прием может оказаться допустимым при быстром изменении коэффициентов и, наоборот, недопустимым при более медленном их изменении. Применение приема "замораживания" коэффициентов в каждом конкретном случае следует обосновать. Использование этого приема вполне оправдано на начальном этапе создания летательного аппарата для предварительного выбора конструктивных параметров и параметров системы управления. Окончательная проверка устойчивости и управляемости летательного аппарата должна производиться на основе более строгих методов с учетом переменности коэффициентов уравнений возмущенного движения.

§ 2.3. КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ПО МЕТОДУ "ЗАМОРОЖЕННЫХ" КОЭФФИЦИЕНТОВ

Допустим, что возмущенное движение описывается следующей системой линейных дифференциальных уравнений:

$$\sum_{j=1}^n [m_{ij}(t) \frac{d^2 q_j}{dt^2} + r_{ij}(t) \frac{dq_j}{dt} + n_{ij}(t) q_j] = f_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.3.1)$$

Такой вид имеют линеаризованные уравнения возмущенного движения ракеты в случае, когда отклонения органов управления заданы как функции времени или когда связь между управляющими и выходными сигналами регулятора описывается линейным дифференциальным уравнением. В последнем случае отклонения органов управления δ_i рассматриваются наряду с q_j как обобщенные координаты данной механической системы.

Невозмущенному движению соответствует тривиальное решение $q_j = 0, dq_j/dt = 0 (j = 1, 2, \dots, n)$ уравнений

$$\sum_{j=1}^n [m_{ij}(t) \frac{d^2 q_j}{dt^2} + r_{ij}(t) \frac{dq_j}{dt} + n_{ij}(t) q_j] = 0 \\ (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.3.2)$$

Зафиксируем момент времени $t = t_k$ и исследуем локальную устойчивость тривиального решения системы (2.3.2) при значениях t , близких к t_k . Для этого нужно изучить поведение частных решений уравнений возмущенного движения при $t \geq t_k$ в предположении, что действие возмущающих сил в момент времени t_k прекращается, т.е. нужно исследовать решения однородной системы (2.3.2).

Следуя методу "замороженных" коэффициентов, далее вместо уравнений (2.3.2) введем в рассмотрение уравнения с "замороженными" коэффициентами

$$\sum_{j=1}^n [m_{ij} \frac{d^2 q_j}{dt^2} + r_{ij} \frac{dq_j}{dt} + n_{ij} q_j] = 0 \\ (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2.3.3)$$

где $m_{ij} = m_{ij}(t_k); r_{ij} = r_{ij}(t_k); n_{ij} = n_{ij}(t_k)$,

и исследуем сначала решения этих уравнений.

Частное решение системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (2.3.3) будем искать в виде

$$q_j = k_j e^{\lambda t} (j = 1, \dots, n), \quad (2.3.4)$$

где λ, k_j – постоянные величины, которые определяются следующим образом.

Подставим (2.3.4) в уравнения (2.3.3). После сокращения на $e^{\lambda t}$ получим

$$\sum_{j=1}^n [m_{ij} \lambda^2 + r_{ij} \lambda + n_{ij}] k_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.3.5)$$

Система алгебраических уравнений (2.3.5) обладает тривиальным решением $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$, которое, как это видно из (2.3.4), определяет тривиальное решение системы уравнений (2.3.3). Система линейных

однородных уравнений (2.3.5) имеет и ненулевое решение, если только определитель системы

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} m_{11}\lambda^2 + r_{11}\lambda + n_{11} & m_{1n}\lambda^2 + r_{1n}\lambda + n_{1n} \\ m_{21}\lambda^2 + r_{21}\lambda + n_{21} & m_{2n}\lambda^2 + r_{2n}\lambda + n_{2n} \\ \dots & \dots \\ m_{n1}\lambda^2 + r_{n1}\lambda + n_{n1} & m_{nn}\lambda^2 + r_{nn}\lambda + n_{nn} \end{vmatrix} \quad (2.3.6)$$

равен нулю.

Раскрыв этот определитель, получим многочлен

$$D(\lambda) = a_0\lambda^{2n} + a_1\lambda^{2n-1} + \dots + a_{2n-1}\lambda + a_{2n}, \quad (2.3.7)$$

называемый характеристическим многочленом системы. Коэффициент при λ^{2n} равен определителю, составленному из коэффициентов уравнений (2.3.5) при λ^2 :

$$a_0 = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{vmatrix}.$$

Будем считать, что $a_0 \neq 0$ и поэтому многочлен (2.3.7) является многочленом степени $2n$ относительно λ .

Из курса высшей алгебры известно, что многочлен степени $2n$ с вещественными коэффициентами имеет $2n$ корней, вещественных или комплексных. Среди этих корней, вообще говоря, могут быть и равные между собой. Для простоты будем предполагать, что все корни характеристического многочлена разные.

Пусть λ_i — один из корней характеристического многочлена. Так как $D(\lambda_i) = 0$, система (2.3.5) при $\lambda = \lambda_i$ имеет ненулевое решение

$$k_j = k_{ji} \quad (j = 1, \dots, n). \quad (2.3.8)$$

Это решение с точностью до произвольного постоянного множителя, отличного от нуля, является единственным решением системы (2.3.5), так как λ_i — простой корень характеристического многочлена.

Таким образом, корню λ_i соответствует частное решение системы дифференциальных уравнений (2.3.3)

$$q_{ji} = k_{ji} e^{\lambda_i t} \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (2.3.9)$$

или в развернутом виде

$$q_{1i} = k_{1i} e^{\lambda_i t}; \quad q_{2i} = k_{2i} e^{\lambda_i t}; \quad \dots; \quad q_{ni} = k_{ni} e^{\lambda_i t}. \quad (2.3.10)$$

Вводя в рассмотрение вектор $q^{(i)}$ с компонентами $q_{1i}, q_{2i}, \dots, q_{ni}$ и вектор $k^{(i)}$ с компонентами $k_{1i}, k_{2i}, \dots, k_{ni}$, представим частное решение, соответствующее корню λ_i , в следующей компактной форме:

$$q^{(i)} = k^{(i)} e^{\lambda_i t}. \quad (2.3.11)$$

Каждому корню характеристического многочлена отвечает частное решение вида (2.3.11). Рассматриваемая система дифференциальных уравнений является линейной, поэтому справедлив принцип суперпозиции, согласно которому любая линейная комбинация частных решений является также решением этой системы. Общее решение системы уравнений (2.3.3) можно представить линейной комбинацией

$$q = \sum_{i=1}^{2n} c_i q^{(i)} = \sum_{i=1}^{2n} c_i k^{(i)} e^{\lambda_i t}, \quad (2.3.12)$$

содержащей $2n$ произвольных постоянных c_1, c_2, \dots, c_{2n} , которые определяются из начальных условий (по начальным значениям возмущений $q(t_k)$ и $\frac{dq}{dt}|_{t=t_k}$).

Если λ – комплексный корень характеристического многочлена, т.е. $\lambda_i = \alpha_i + i\beta_i$ ($\beta_i \neq 0$), то компоненты вектора $k^{(i)}$ как решения алгебраических уравнений (2.3.5) с комплексными коэффициентами также будут комплексными числами. Поэтому $k^{(i)}$ есть вектор вида $p^{(i)} + iq^{(i)}$, где $p^{(i)}$ и $q^{(i)}$ – векторы с вещественными компонентами. Среди остальных корней непременно существует корень λ_k , комплексно сопряженный корню λ_i . Соответствующий вектор $k^{(k)}$ есть вектор, комплексно сопряженный вектору $k^{(i)}$, т.е.

$$k^{(k)} = \bar{k}^{(i)} = p^{(i)} - iq^{(i)}.$$

Таким образом, паре комплексно сопряженных корней λ_i и $\lambda_k = \bar{\lambda}_i$ соответствует частное решение системы (2.3.3)

$$q^{(i, k)} = k^{(i)} e^{\lambda_i t} c_i + \bar{k}^{(i)} e^{\bar{\lambda}_i t} c_k. \quad (2.3.13)$$

Для того чтобы это частное решение было вещественным, необходимо, чтобы c_i и c_k были бы комплексно сопряженными числами.

Считая, что $c_k = c_i$, и представляя комплексное число c_i в виде

$$c_i = c_{i0} e^{i\varphi_i},$$

можно это частное решение записать так:

$$q^{(i, k)} = (p^{(i)} + iq^{(i)}) e^{(\alpha_i + i\beta_i)t} c_{i0} e^{i\varphi_i} +$$

$$+ (\rho^{(i)} - iq^{(i)}) e^{(\alpha_i - i\beta_i)t} c_{i0} e^{-i\varphi_i}.$$

Отсюда, используя соотношение $e^{\pm ix} = \cos x + i \sin x$, получим

$$q^{(i,k)} = 2c_{i0} e^{\alpha_i t} [p^{(i)} \cos(\beta_i t + \varphi_i) - q^{(i)} \sin(\beta_i t + \varphi_i)]. \quad (2.3.14)$$

Значения c_{i0} и φ_i определяются начальными условиями.

Приведенные соотношения позволяют легко получить условия устойчивости и неустойчивости тривиального решения уравнений с постоянными коэффициентами (2.3.3).

Вычислим модуль вектора $q^{(i)}$, представляющего частное решение (2.3.10). Используя (2.3.11), находим

$$\begin{aligned} |q^{(i)}| &= \sqrt{\bar{q}^{(i)} q^{(i)}} = \sqrt{\bar{k}^{(i)} k^{(i)} e^{\lambda_i t} e^{\lambda_i t}} = \\ &= |k^{(i)}| e^{\operatorname{Re} \lambda_i t} = |k^{(i)}| e^{\alpha_i t}. \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

Отсюда видно, что модуль вектора $q^{(i)}$ при $t \rightarrow \infty$ неограниченно возрастает, если $\alpha_i > 0$, уменьшается, асимптотически приближаясь к нулю, если $\alpha_i < 0$, и остается неизменным, если $\alpha_i = 0$ (рис. 2.5).

Аналогичным образом ведут себя модули компонент вектора $q^{(i)}$. Имеем

$$q_{ji} = k_{ji} e^{(\alpha_i + i\beta_i)t}.$$

Так как $|e^{i\beta_i}| = 1$, то

$$|q_{ji}| = |k_{ji}| e^{\alpha_i t}, \quad (2.3.16)$$

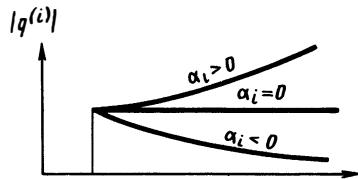


Рис. 2.5.

следовательно, модуль компоненты q_{ji} вектора $q^{(i)}$ при $t \rightarrow \infty$ неограниченно растет, когда $\alpha_i > 0$, асимптотически стремится к нулю, когда $\alpha_i < 0$, и остается неизменным, если $\alpha_i = 0$. Положим $A_{ji} = k_{ji} e^{\alpha_i t}$.

$$\text{Тогда } q_{ji} = A_{ji} e^{i\beta_i t}. \quad (2.3.17)$$

Множитель A_{ji} можно рассматривать как комплексную амплитуду с модулем $|A_{ji}| = |k_{ji}| e^{\alpha_i t}$ и аргументом $\arg A_{ji} = \arg k_{ji}$. На рис. 2.6 показано поведение компоненты q_{ji} на комплексной плоскости в зависимости от знака вещественной части корня λ_i . Приведенные рисунки соответствуют случаю, когда $\beta_i > 0$.

Характер изменения вещественной части координаты q_{ji} (когда $\beta_i \neq 0$) при $\alpha_i > 0$, $\alpha_i < 0$ и $\alpha_i = 0$ показан на рис. 2.7.

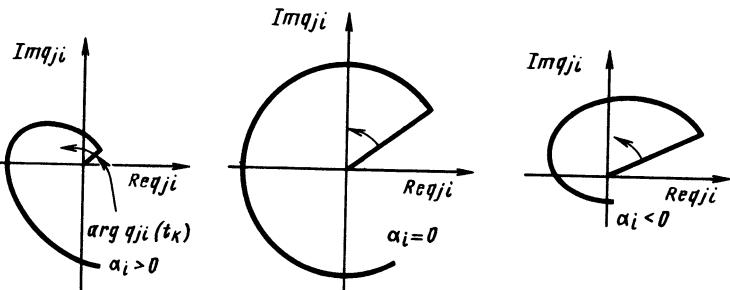


Рис. 2.6.

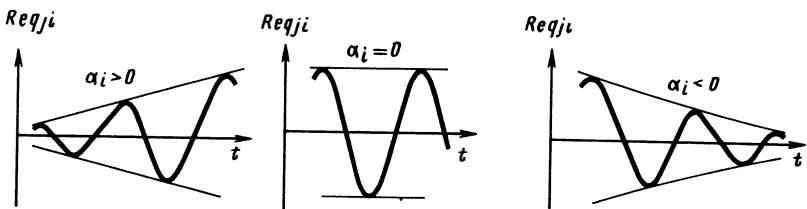


Рис. 2.7.

Если λ_i вещественный корень, то в этом случае q_{ji} изменяется по экспоненте (рис. 2.8).

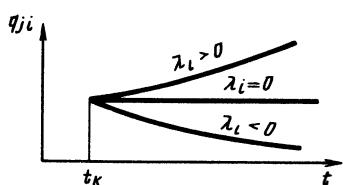


Рис. 2.8.

Дифференцируя (2.3.10), получим

$$\begin{aligned}\frac{dq_{ji}}{dt} &= k_{1i} \lambda_i e^{\lambda_i t}; \\ \dots \dots \dots \\ \frac{dq_{ni}}{dt} &= k_{ni} \lambda_i e^{\lambda_i t}.\end{aligned}$$

Отсюда видно, что поведение dq_{ji}/dt аналогично поведению q_{ji} : если $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$, то $|dq_{ji}/dt|$ – возрастающая функция; если $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, то $|dq_{ji}/dt|$ – убывающая функция, а если $\operatorname{Re} \lambda_i = 0$, то $|dq_{ji}/dt| = \text{const}$. Точно также ведет себя модуль вектора $dq^{(i)}/dt$.

Допустим, что все корни характеристического многочлена имеют отрицательные вещественные части. В этом случае все частные решения $q^{(i)}$ и их производные по времени при неограниченном возрастании t стремятся к нулю. Каковы бы ни были постоянные c_i , общее решение (2.3.12) и его производная по времени также стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$. Следовательно, тривиальное решение системы (2.3.3) устойчиво по Ляпунову, и при том при любых начальных возмущениях.

Если исследуемое частное решение не только устойчиво, но и обладает

тем свойством, что все возмущения, начальные значения которых достаточно малы, при неограниченном возрастании t стремятся асимптотически к нулю, то говорят, что данное частное решение устойчиво асимптотически. В рассматриваемом случае, как мы видим, тривиальное решение уравнений (2.3.3) не только устойчиво, но устойчиво асимптотически. Если имеется хотя бы один корень с положительной вещественной частью, то из любой сколь угодно малой области начальных значений выходит решение, неограниченное при $t \rightarrow \infty$.

Действительно, пусть, например, $\operatorname{Re} \lambda_j > 0$ и

$$|q(t_k)| \leq \delta, \quad (2.3.18)$$

где δ — сколь угодно малая положительная величина. Положим

$$c_i = 0, \quad c_j \neq 0 \quad (i \neq j).$$

При этом будем иметь

$$q(t) = k^{(j)} e^{\lambda_j t} c_j. \quad (2.3.19)$$

$$\text{При } t = t_k \quad q(t_k) = k^{(j)} e^{\lambda_j t_k} c_j.$$

Ясно, что c_j всегда может быть выбрано так, чтобы условие (2.3.18) выполнялось. Но независимо от этого решение (2.3.19) при $t \rightarrow \infty$ не ограничено; условия (2.1.11) и (2.1.12) не соблюдаются и, значит, тривиальное решение уравнений (2.3.3) неустойчиво по Ляпунову.

Наконец, допустим, что наряду с корнями с отрицательными вещественными частями имеются корни с нулевыми вещественными частями и нет корней с положительными вещественными частями. В этом случае все решения системы (2.3.3) и их производные по времени при $t > t_k$ ограничены, но существуют решения, модули которых остаются постоянными. Пусть, например, $\lambda_j = i\beta_j$. Тогда таким решением является

$$q^{(j)} = k^{(j)} e^{i\beta_j t} c_j. \quad (2.3.20)$$

Решения вида (2.3.20) не нарушают устойчивости тривиального решения уравнений (2.3.3), но устойчивость этих решений уже не является асимптотической.

Таким образом, для того чтобы тривиальное решение системы уравнений с постоянными коэффициентами (2.3.3) было асимптотически устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического многочлена имели отрицательные вещественные части. Если среди корней характеристического многочлена имеется хотя бы один с положительной вещественной частью, то тривиальное решение неустойчиво. Это остается справедливым и в том случае, когда имеются кратные корни.

Если среди корней характеристического многочлена нет корней с положительными вещественными частями, но имеются простые корни с нулевыми вещественными частями, то тривиальное решение устойчиво, но не-

асимптотически. Устойчивость тривиального решения сохраняется и при наличии кратных корней с нулевыми вещественными частями, если только число групп решений, соответствующих этим корням, равно их кратности.

Таким образом, устойчивость тривиального решения уравнений (2.3.3) определяют знаки вещественных частей корней характеристического многочлена (2.3.7).

Итак, мы установили условия устойчивости и неустойчивости тривиального решения уравнений (2.3.3) на бесконечном интервале времени. Но нас интересует поведение решений не при $t \rightarrow \infty$, а в пределах конечного промежутка времени начиная с момента t_k .

Поскольку (2.3.3) является системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, то поведение ее частных решений на бесконечном интервале времени, за исключением случаев кратных корней характеристического многочлена, вполне определяет их поведение на любом конечном промежутке времени и наоборот. Действительно, если тривиальное решение уравнений (2.3.3) устойчиво по Ляпунову, то все частные решения этих уравнений вида (2.3.11) являются по модулю невозрастающими функциями при $t \geq t_k$. Если же тривиальное решение уравнений (2.3.3) неустойчиво по Ляпунову, то непременно существует по крайней мере одно частное решение вида (2.3.11), которое при $t \geq t_k$ на любом сколь угодно малом промежутке времени является возрастающей по модулю функцией. К этим рассуждениям добавим следующее. Можно было бы показать, что если в момент времени t_k вещественные части всех корней характеристического многочлена отрицательны, то имеет место устойчивость на конечном промежутке времени по Каменкову, т.е. начиная с момента времени t_k имеется конечный промежуток времени, в течение которого все возмущения, заключенные в начальный момент t_k внутри некоторого эллипсоида, не выходят за пределы этого эллипса. Если же имеется хотя бы один корень с положительной вещественной частью, то исследуемое движение не обладает устойчивостью на конечном промежутке времени в смысле Каменкова.

Учитывая сказанное и исключая из рассмотрения случай кратных корней характеристического многочлена, сформулированные выше условия устойчивости тривиального решения уравнений (2.3.3) по Ляпунову можно рассматривать и как условия устойчивости этого решения на конечном промежутке времени с началом в фиксированной точке t_k . Тем самым вопрос об устойчивости тривиального решения уравнений с "замороженными" коэффициентами (2.3.3) как на бесконечном, так и на конечном промежутке времени решен.

Если бы решения системы (2.3.2) и системы с "замороженными" коэффициентами (2.3.3) совпадали, то сформулированные условия устойчивости тривиального решения системы (2.3.3) непосредственно можно было бы перенести на тривиальное решение системы уравнений (2.3.2), которое представляет собой исследуемое невозмущенное движение. На самом деле системы (2.3.2) и (2.3.3) разные, и их решения могут рассматри-

ваться как близкие, если ограничиться малыми окрестностями точки t_k . Поэтому знаки вещественных частей корней характеристического многочлена могут рассматриваться лишь как приближенные критерии устойчивости невозмущенного движения (тривиального решения уравнений (2.3.2)) в пределах небольшого промежутка времени.

Поскольку возмущенное движение при $t \geq t_k$ изучалось в предположении, что действие возмущающих сил при $t = t_k$ прекратилось, то эти критерии являются, по существу, приближенными критериями локальной устойчивости.

Для исследования уравнений возмущенного движения не обязательно определять корни характеристического многочлена. Достаточно получить характеристический многочлен системы, а затем воспользоваться каким-нибудь критерием, позволяющим по коэффициентам характеристического многочлена судить о его корнях, например, критерием Гурвица.

Для характеристического многочлена

$$D(\lambda) \equiv a_0 \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \dots + a_{m-1} \lambda + a_m$$

условие отрицательности вещественных частей всех корней сводится к тому, что при $a_0 > 0$ должны быть больше нуля все m определителей Гурвица, получаемых из определителя, составленного из коэффициентов характеристического многочлена

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & | & 0 & | & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & | & 0 & | & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & | & 0 & | & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots & | & 0 & | & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & | & \dots & | & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & | & a_{m-1} & | & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & | & a_{m-2} & | & a_m \end{vmatrix},$$

а именно :

$$\Delta_1 = a_1 > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0; \dots; \quad \Delta_m = a_m \Delta_{m-1} > 0. \quad (2.3.21)$$

При анализе возмущенного движения ракет широко применяется критерий Найквиста. Формулировка критерия Найквиста приводится в § 2.5, где этот критерий используется для установления предельно допустимых значений частотных характеристик автомата стабилизации из условия устойчивости системы автоматического управления ракеты.

Обоснование критериев Гурвица, Найквиста и других критериев устойчивости стационарных систем дается в курсах теории автоматического управления.

§ 2.4. РАКЕТА КАК ЛИНЕЙНЫЙ ОБЪЕКТ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Возмущенное движение ракеты как замкнутой системы автоматического управления описывается системой уравнений, состоящей из уравнений возмущенного движения ракеты как объекта управления, и уравнений, описывающих работу системы управления. Неизвестными функциями в этой системе уравнений являются возмущения параметров движения ΔV_x , ΔV_y , ΔV_z , $\Delta \vartheta$, $\Delta \psi$, $\Delta \gamma$ и отклонения органов управления $\Delta \delta_x$, $\Delta \delta_\vartheta$, $\Delta \delta_\psi$, $\Delta \delta_\gamma$.

Для исследования замкнутой системы автоматического управления нужно знать динамические свойства отдельных ее звеньев и, в частности, динамические свойства ракеты как объекта управления. Знание динамических свойств аппарата необходимо также при выборе рациональных значений его параметров и параметров системы управления. Для определения динамических свойств аппарата рассматривают отдельно уравнения возмущенного движения ракеты как объекта управления, полагая в них отклонения органов управления известными функциями времени.

Система летательный аппарат – регулятор является, вообще говоря, нелинейной; и аппарат, и регулятор описываются нелинейными уравнениями. В задачах динамики нелинейными членами уравнений возмущенного движения ракеты как объекта управления обычно пренебрегают, ограничиваясь рассмотрением линеаризованных уравнений возмущенного движения (1.13.5), (1.13.6), (1.13.8), (1.13.9). В большинстве случаев линейное приближение оказывается достаточным и по отношению к регулятору. Однако нередко возникает необходимость в исследовании системы с учетом нелинейности регулятора, например при исследовании автоколебаний в системе летательный аппарат – регулятор.

Линейные системы (1.13.5), (1.13.6), (1.13.8), (1.13.9) состоят из неоднородных дифференциальных уравнений, правые части которых при заданных значениях отклонений $\Delta \delta_x$, $\Delta \delta_\vartheta$, $\Delta \delta_\psi$, $\Delta \delta_\gamma$ представляют собой некоторые функции времени, не зависящие от неизвестных функций ΔV_x , ΔV_y , ΔV_z , $\Delta \vartheta$, $\Delta \psi$, $\Delta \gamma$.

Общее решение неоднородной линейной системы, как известно, складывается из общего решения однородной системы и частного решения неоднородной системы.

Общее решение однородной системы описывает свободное, или собственное, движение летательного аппарата¹, а частное решение неоднородной системы – его вынужденное движение. В соответствии с этим возмущенное движение, возникающее при отклонении органов управления

¹ Собственное движение происходит при закрепленных органах управления.

или воздействии на аппарат внешних возмущающих сил, складывается из свободного и вынужденного движений.

Динамические свойства ракеты как объекта управления определяются характером возмущенного движения, возникающего при отклонении органов управления или при воздействии возмущающих сил. Обычно исследуются реакции аппарата на ступенчатое отклонение органов управления и отклонение их по гармоническому закону.

Реакция аппарата на ступенчатое отклонение органов управления описывается переходными функциями, которые являются решениями дифференциальных уравнений при нулевых начальных условиях и в предположении, что возмущающие силы отсутствуют, а отклонения органов управления ($\Delta\delta_x$, $\Delta\delta_\phi$, $\Delta\delta_\psi$, $\Delta\delta_y$) до зафиксированного момента времени t_0 (начального момента) тождественно равны нулю, а при $t \geq t_0$ имеют постоянные ненулевые значения.

Реакция аппарата на отклонение органов управления по гармоническому закону описывается частотными характеристиками летательного аппарата. Эти характеристики являются составными частями решения дифференциальных уравнений возмущенного движения при отсутствии возмущающих сил и отклонении органов управления по гармоническому закону.

Исследование возмущенного движения аппарата, возникающего при воздействии внешних возмущающих сил, например атмосферных возмущений, часто проводят по следующей схеме.

Предполагают, что в течение некоторого промежутка времени вплоть до момента времени t_0 на аппарат действовала возмущающая сила, вследствие чего кинематические параметры движения летательного аппарата при $t = t_0$ будут отличаться от их значений при невозмущенном движении, т.е. $\Delta V_x(t_0) \neq 0$, $\Delta V_y(t_0) \neq 0$, $\Delta V_z(t_0) \neq 0$ и т.д. Дальнейшее поведение аппарата изучают в предположении, что отклонения органов управления $\Delta\delta_i$ равны нулю и возмущающие силы отсутствуют. Тем самым задача сводится к изучению собственного движения аппарата, вызванного начальными возмущениями параметров движения (возмущениями при $t = t_0$).

При анализе возмущенного движения ниже используется прием "замораживания" коэффициентов. Следовательно, этот анализ надо рассматривать как приближенный, так как фактически изучаются динамические свойства летательного аппарата в искусственных условиях, когда коэффициенты уравнений возмущенного движения начиная с момента времени t_0 остаются неизменными. В действительности коэффициенты уравнений являются переменными величинами, а переменность коэффициентов иногда может быть причиной таких динамических эффектов, которые в рамках метода "замороженных" коэффициентов не могут быть выявлены.

2.4.1. ХАРАКТЕР СВОБОДНОГО ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ПО ТАНГАЖУ И РЫСКАНИЮ

Свободное возмущенное движение летательного аппарата по тангажу описывается системой уравнений (1.13.5) при нулевых правых частях

$$\begin{aligned} m \frac{d\Delta V_y}{dt} + \nu_y \frac{d\Delta \vartheta}{dt} + c_{yy} \Delta V_y + c_{y\vartheta} \Delta \vartheta &= 0; \\ J_z \frac{d^2 \Delta \vartheta}{dt^2} + \mu_z \frac{d\Delta \vartheta}{dt} + c_{\vartheta y} \Delta V_y + c_{\vartheta\vartheta} \Delta \vartheta &= 0. \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

Пусть

$$\Delta V_y(t_0) = \Delta V_{y0}; \quad \Delta \vartheta(t_0) = \Delta \vartheta_0; \quad \dot{\Delta \vartheta}(t_0) = \dot{\Delta \vartheta}_0. \quad (2.4.2)$$

Требуется решить систему (2.4.1) при начальных условиях (2.4.2).

Считая коэффициенты уравнений "замороженными", будем искать частное решение системы (2.4.1) в виде

$$\Delta V_y = A e^{\lambda t}; \quad \Delta \vartheta = B e^{\lambda t}. \quad (2.4.3)$$

После подстановки (2.4.3) в (2.4.1) и сокращения на общий множитель $e^{\lambda t}$ получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} (m\lambda + c_{yy})A + (\nu_y \lambda + c_{y\vartheta})B &= 0; \\ c_{\vartheta y}A + (J_z \lambda^2 + \mu_z \lambda + c_{\vartheta\vartheta})B &= 0. \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Однородная система линейных алгебраических уравнений (2.4.4) кроме тривиального решения $A = B = 0$ имеет и ненулевые решения, если определитель системы равен нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix} m\lambda + c_{yy} & \nu_y \lambda + c_{y\vartheta} \\ c_{\vartheta y} & J_z \lambda^2 + \mu_z \lambda + c_{\vartheta\vartheta} \end{vmatrix} = 0. \quad (2.4.5)$$

Раскрыв определитель, запишем характеристическое уравнение (2.4.5) в виде

$$D(\lambda) \equiv (m\lambda + c_{yy})(J_z \lambda^2 + \mu_z \lambda + c_{\vartheta\vartheta}) - \nu_y c_{\vartheta y} \lambda - c_{\vartheta y} c_{y\vartheta} = 0. \quad (2.4.6)$$

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – корни характеристического уравнения. Обычно все три корня получаются различными. При этом каждому корню λ_i ($i = 1, 2, 3$) соответствует частное решение системы (2.4.1)

$$\Delta V_{yi} = A_i e^{\lambda_i t}; \quad \Delta \vartheta_i = B_i e^{\lambda_i t}, \quad (2.4.7)$$

где A_i, B_i – решение алгебраической системы (2.4.4) при $\lambda = \lambda_i$.

Общее решение системы (2.4.1) можно представить в виде линейной комбинации частных решений

$$\begin{aligned} \Delta V_y &= C_1 A_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 A_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 A_3 e^{\lambda_3 t}; \\ \Delta \vartheta &= C_1 B_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 B_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 B_3 e^{\lambda_3 t}, \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

где C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные, которые определяются начальными условиями (2.4.2).

Коэффициенты характеристического уравнения являются вещественными величинами, поэтому при анализе свободного возмущенного движения возможны следующие два случая:

1) все три корня вещественные;

2) один корень вещественный и два корня комплексно сопряженные.

В первом случае каждое частное решение (2.4.7) имеет апериодический характер, функции $\Delta V_{y_i}, \Delta \vartheta_i$ по модулю со временем возрастают, если соответствующий корень положительный, и уменьшаются, если этот корень отрицательный. Свободное движение летательного аппарата складывается из трех апериодических движений. Если среди корней характеристического многочлена будет хотя бы один положительный корень, то возмущения $\Delta V_y, \Delta \vartheta$ при любых ненулевых начальных условиях начиная с некоторого момента времени t_1 ($t_0 \leq t_1 < \infty$) будут возрастающими функциями.

Во втором случае паре комплексно сопряженных корней $\lambda_2 = \alpha + i\beta, \lambda_3 = \alpha - i\beta$ соответствует частное решение

$$\Delta \vartheta_{2,3} = C_2 B_2 e^{(\alpha + i\beta)t} + C_3 B_3 e^{(\alpha - i\beta)t}. \quad (2.4.9)$$

Аналогичную форму имеет и выражение для $\Delta V_{y_{2,3}}$ [см. выражения (2.4.8)].

Так как начальные возмущения ΔV_{y_0} и $\Delta \vartheta_0$ представляются вещественными числами, то $C_2 B_2$ и $C_3 B_3$ будут комплексно сопряженными величинами, т.е. если $C_2 B_2 = a - ib$, то $C_3 B_3 = a + ib$.

Учитывая это и имея в виду, что $e^{\pm i\beta t} = \cos \beta t \pm i \sin \beta t$, будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta \vartheta_{2,3} &= (a - ib)e^{(\alpha + i\beta)t} + (a + ib)e^{(\alpha - i\beta)t} = \\ &= e^{\alpha t} [(a - ib)(\cos \beta t + i \sin \beta t) + (a + ib)(\cos \beta t - i \sin \beta t)] = \\ &= 2e^{\alpha t}(a \cos \beta t + b \sin \beta t). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\Delta \vartheta_{2,3} = \Re e^{\alpha t} \sin(\beta t + \varphi), \quad (2.4.10)$$

$$\text{где } B = 2 \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{a}{b}.$$

Как видим, паре комплексно сопряженных корней соответствует колебательное движение с частотой β , фазой φ и переменной амплитудой $B e^{\alpha t}$, возрастающей по экспоненте при $\alpha > 0$ и убывающей при $\alpha < 0$.

Корни характеристического уравнения (2.4.6) легко определить в случае, когда полет совершается вне атмосферы ($\rho = 0$). При этом $c_{\vartheta\vartheta} = c_{\vartheta y} = c_{yy} = 0$, и поэтому

$$D(\lambda) \equiv m\lambda(J_z\lambda^2 + \mu_z\lambda).$$

Отсюда $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -\mu_z/J_z$.

Корни характеристического уравнения определяются просто и в том случае, когда $\rho \neq 0$, но аэродинамический фокус аппарата совпадает с центром масс ($x_F = 0$). При этом $c_{\vartheta\vartheta} = c_{\vartheta y} = 0$, потому

$$D(\lambda) \equiv (m\lambda + c_{yy})(J_z\lambda^2 + \mu_z\lambda).$$

В соответствии с этим $\lambda_1 = -c_{yy}/m$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -\mu_z/J_z$.

В общем случае корни характеристического многочлена могут быть приближенно определены путем разложения многочлена на множители следующим образом.

Введем в рассмотрение числа z_1 , z_2 , z_3 и определим их так, чтобы выполнялось равенство

$$\begin{aligned} & (m\lambda + c_{yy})(J_z\lambda^2 + \mu_z\lambda + c_{\vartheta\vartheta}) - \nu_y c_{\vartheta y} \lambda - c_{y\vartheta} c_{\vartheta y} = \\ & = (m\lambda + c_{yy} + z_1)[J_z\lambda^2 + (\mu_z + z_2)\lambda + c_{\vartheta\vartheta} + z_3]. \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

Приравнивая в этом равенстве коэффициенты при одинаковых степенях λ , получим систему уравнений

$$J_z z_1 + mz_2 = 0;$$

$$\mu_z z_1 + c_{yy} z_2 + mz_3 + z_1 z_2 = -\nu_y c_{\vartheta y};$$

$$c_{\vartheta\vartheta} z_1 + c_{yy} z_3 + z_1 z_3 = -c_{\vartheta y} c_{y\vartheta}$$

относительно z_1 , z_2 , z_3 .

Полученную систему нелинейных алгебраических уравнений перепишем следующим образом:

$$J_z z_1 + mz_2 = 0;$$

$$\mu_z z_1 + (c_{yy} + z_1) z_2 + mz_3 = -\nu_y c_{\vartheta y}; \quad (2.4.12)$$

$$c_{\vartheta\vartheta} z_1 + (c_{yy} + z_1) z_3 = -c_{\vartheta y} c_{y\vartheta}.$$

Решая (2.4.12) формально как систему линейных уравнений, коэффициенты которых зависят от параметра $c_{yy} + z_1$, будем иметь

$$z_1 = \frac{-m^2 c_{\vartheta y} c_{y\vartheta} + \nu_y m c_{\vartheta y} (c_{yy} + z_1)}{J_z (c_{yy} + z_1)^2 + m^2 c_{\vartheta\vartheta} - \mu_z m (c_{yy} + z_1)} ;$$

$$z_2 = -\frac{J_z}{m} z_1; \quad (2.4.13)$$

$$z_3 = -\frac{1}{m} [\mu_z - \frac{J_z}{m} (c_{yy} + z_1)] z_1 - \frac{1}{m} \nu_y c_{\vartheta y}.$$

Таким образом, задача сводится к определению z_1 из первого уравнения системы (2.4.13). Определить z_1 удобно методом последовательных приближений. Положим

$$z_1^{[0]} = -c_{yy}. \quad (2.4.14)$$

Подставляя значения z_1 в первое уравнение (2.4.13), получим уточненное значение z_1 :

$$z_1^{[1]} = -\frac{c_{\vartheta y} c_{y\vartheta}}{c_{\vartheta\vartheta}}. \quad (2.4.15)$$

Учитывая, что $c_{\vartheta y} = x_F c_{yy}$, $c_{\vartheta\vartheta} = -x_F V_{Cx} c_{yy}$, а $c_{y\vartheta} = -(P + \frac{1}{2} c_{ya}^\alpha \rho S \frac{V_{Cx}^2}{2})$, будем иметь

$$z_1^{[1]} = \frac{c_{y\vartheta}}{V_{Cx}} = -(c_{yy} + \frac{P - X_0}{V_{Cx}}), \quad (2.4.16)$$

где $X_0 = \frac{1}{2} c_{x0a} \rho S V_{Cx}^2$ – аэродинамическая продольная сила при угле атаки $\alpha = 0$.

Следующее приближение дает

$$z_1^{[2]} = \frac{-c_{\vartheta y} c_{y\vartheta} - \nu_y c_{\vartheta y} \frac{P - X_0}{m V_{Cx}}}{J_z \left(\frac{P - X_0}{m V_{Cx}} \right)^2 + \mu_z \frac{P - X_0}{m V_{Cx}} + c_{\vartheta\vartheta}}. \quad (2.4.17)$$

За исключением тех участков траектории, где произведение $\rho x_F V_{Cx}$ близко к нулю, обычно, как показывают расчеты,

$$|c_{\vartheta\vartheta}| \gg J_z \left(\frac{P - X_0}{m V_{Cx}} \right)^2 + \mu_z \frac{P - X_0}{m V_{Cx}}. \quad (2.4.18)$$

Кроме того,

$$|c_{y\vartheta}| \gg |\nu_y \frac{P - X_0}{m V_{Cx}}|.$$

Поэтому при условии (2.4.18) $z_1^{[2]} \approx z_1^{[1]}$, так что можно ограничиться приближением (2.4.16).

Наконец, можно пренебречь и величиной z_3 по сравнению с $c_{\vartheta\vartheta}$. Действительно, если $x_F = 0$, то $c_{\vartheta y} = 0$ и, значит, $z_1 = 0$, $z_2 = 0$, $z_3 = 0$ [см. уравнения (2.4.13)]. Если же $x_F \neq 0$, то, как показывают расчеты, обычно $|c_{\vartheta\vartheta}| \gg |z_3|$.

Итак, характеристический многочлен приближенно можно представить в виде

$$D(\lambda) \cong (m\lambda + c_{yy} + z_1)[J_z \lambda^2 + (\mu_z - \frac{J_z}{m} z_1)\lambda + c_{\vartheta\vartheta}], \quad (2.4.19)$$

где z_1 определяют по приближенным формулам (2.4.16) или (2.4.17). Многочлен (2.4.19) имеет корни

$$\lambda_1 = -\frac{1}{m}(c_{yy} + z_1); \quad (2.4.20)$$

$$\lambda_{2,3} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_z}{J_z} - \frac{z_1}{m}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{\mu_z}{J_z} - \frac{z_1}{m}\right)^2 - \frac{c_{\vartheta\vartheta}}{J_z}}.$$

Если $\rho x_F V_{Cx} = 0$, то $z_1 = 0$ и $\lambda_1 = -c_{yy}/m < 0$. Если же $\rho x_F V_{Cx} \neq 0$ и выполняется условие (2.4.18), то

$$c_{yy} + z_1 \approx -\frac{P - X_0}{V_{Cx}} < 0$$

и, значит, $\lambda_1 \approx (P - X_0)/m V_{Cx} > 0$. Во всяком случае действительный корень λ_1 , как показывают расчеты, мал по абсолютной величине, поэтому этому корню отвечает медленное апериодическое движение ракеты.

Два других корня (λ_2 и λ_3) в зависимости от знака $c_{\vartheta\vartheta}$ могут быть как вещественными, так и комплексно сопряженными.

1. Если $c_{\vartheta\vartheta} < 0$ ($x_F > 0$, т.е. ракета статически неустойчива), то корни λ_2 и λ_3 вещественные, причем один из них положительный, а другой отрицательный. Положительному корню отвечает апериодическое движение, в процессе которого соответствующие составляющие возмущений $\Delta\vartheta$, ΔV_y возрастают по модулю; отрицательному корню отвечает апериодическое движение, в процессе которого эти составляющие возмущений по модулю уменьшаются.

2. Если $c_{\vartheta\vartheta} > 0$ ($x_F < 0$, т.е. ракета статически устойчива), то $\frac{\mu_z}{J_z} - \frac{z_1}{m} > 0$, так как $z_1 < 0$. Поэтому если

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\mu_z}{J_z} - \frac{z_1}{m}\right)^2 - \frac{c_{\vartheta\vartheta}}{J_z} \geqslant 0, \quad (2.4.21)$$

то корни λ_2 и λ_3 вещественны и отрицательны; движение аппарата носит апериодический затухающий характер.

Пусть теперь

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\mu_z}{J_z} - \frac{z_1}{m}\right)^2 - \frac{c_{\vartheta\vartheta}}{J_z} < 0. \quad (2.4.22)$$

В этом случае корни λ_2 , λ_3 удобно представить в виде

$$\lambda_{2,3} = \frac{1}{T} (-\xi \pm i \sqrt{1 - \xi^2}), \quad (2.4.23)$$

$$\text{где } T = \sqrt{\frac{J_z}{c_{\vartheta\vartheta}}} ; \quad (2.4.24)$$

$$\xi = \frac{1}{2 \sqrt{J_z c_{\vartheta\vartheta}}} (\mu_z - \frac{J_z}{m} z_1). \quad (2.4.25)$$

Из условия (2.4.22) следует $1 - \xi^2 > 0$, т.е. λ_2 , λ_3 – комплексно сопряженные корни. Соответствующее этим корням движение носит колебательный характер. Так как вещественные части корней λ_2 , λ_3 всегда отрицательны, то этот колебательный процесс является затухающим.

$$\text{Отношение } \frac{\xi}{T} = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_z}{J_z} - \frac{z_1}{m} \right) \quad (2.4.26)$$

определяет скорость затухания и называется коэффициентом демпфирования (или затухания), а ξ – логарифмическим декрементом.

Частота свободных колебаний определяется мнимой частью корней $\lambda_{2,3}$:

$$\omega = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T} = \sqrt{\frac{c_{\vartheta\vartheta}}{J_z} - \frac{1}{4} \left(\frac{\mu_z}{J_z} - \frac{z_1}{m} \right)^2}. \quad (2.4.27)$$

На частоту свободных колебаний наибольшее влияние оказывает степень статической устойчивости, мерой которой служит координата аэродинамического фокуса x_F . Чем больше $|x_F|$ ($x_F < 0$), тем больше $c_{\vartheta\vartheta}$ и, значит, большее ω .

При отсутствии демпфирования ($\frac{\mu_z}{J_z} - \frac{z_1}{m} = 0$) имеем

$$\omega_c = \sqrt{\frac{c_{\vartheta\vartheta}}{J_z}} = \frac{1}{T}. \quad (2.4.28)$$

Частота свободных колебаний при отсутствии демпфирования ω_c называется частотой собственных колебаний аппарата. Частота собственных колебаний в Гц

$$f = \omega_c / 2\pi. \quad (2.4.29)$$

Период собственных колебаний определяется формулой

$$T_c = 2\pi / \omega_c = 2\pi T. \quad (2.4.30)$$

Свободное возмущенное движение ракеты по рысканию описывается уравнениями

$$\begin{aligned} m \frac{d \Delta V_z}{dt} + v_z \frac{d \Delta \psi}{dt} + c_{zz} \Delta V_z + c_{z\psi} \Delta \psi &= 0; \\ J_y \frac{d^2 \Delta \psi}{dt^2} + \mu_y \frac{d \Delta \psi}{dt} + c_{\psi z} \Delta V_z + c_{\psi \psi} \Delta \psi &= 0 \end{aligned} \quad (2.4.31)$$

при начальных условиях

$$\Delta V_z(t_0) = \Delta V_{z0}, \quad \Delta \psi(t_0) = \Delta \psi_0, \quad \dot{\Delta \psi}(t_0) = \dot{\Delta \psi}_0.$$

Система уравнений (2.4.31) с точностью до обозначений совпадает с системой (2.4.1), описывающей свободное возмущенное движение ракеты по тангажу, поэтому анализ уравнений (2.4.1) непосредственно может быть отнесен к уравнениям (2.4.31).

2.4.2. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ АППАРАТА ПО ТАНГАЖУ И РЫСКАНИЮ

Прием "замораживания" коэффициентов позволяет использовать удобные методы исследования стационарных систем автоматического управления ракет. Применение этих методов основано на знании передаточных функций или частотных характеристик ракеты как объекта управления.

Как известно, передаточной функцией линейного звена системы автоматического управления называется отношение изображения Лапласа выходной величины к изображению Лапласа входной величины при нулевых начальных условиях [4, 27]. Для ракеты как звена системы автоматического управления входными величинами являются отклонения органов управления, а также возмущающие силы и моменты; выходными величинами – приращения параметров движения ($\Delta\vartheta$, $\Delta\gamma$, ΔV_y и т.п.).

Передаточные функции можно получить из уравнений возмущенного движения ракеты путем их преобразования по Лапласу при "замороженных" коэффициентах.

Для преобразования по Лапласу уравнений возмущенного движения ракеты по тангажу при начальных условиях

$$\Delta V_y(t_0) = \Delta \vartheta(t_0) = \dot{\Delta \vartheta}(t_0) = 0 \quad (2.4.32)$$

умножим левые и правые части уравнений (1.13.5) на e^{-pt} и проинтегрируем их по t в пределах от t_0 до ∞ . Тогда, обозначая через $V_y(p)$, $\vartheta(p)$, $\delta_\vartheta(p)$, $F_y(p)$, $M_z(p)$ соответственно изображения по Лапласу функций ΔV_y , $\Delta \vartheta$, $\Delta \delta_\vartheta$, ΔF_y , ΔM_z :

$$V_y(p) = \int_0^\infty \Delta V_y e^{-p\tau} d\tau; \quad \vartheta(p) = \int_0^\infty \Delta \vartheta e^{-p\tau} d\tau;$$

$$\delta_\vartheta(p) = \int_0^\infty \Delta\delta_\vartheta e^{-pt} d\tau; \quad F_y(p) = \int_0^\infty \Delta F_y e^{-pt} d\tau;$$

$$M_z(p) = \int_0^\infty \Delta M_z e^{-pt} d\tau \quad (\tau = t - t_0)$$

и учитывая, что при условии (2.4.32)

$$\int_{t_0}^\infty \Delta\vartheta e^{-pt} dt = e^{-pt_0} \int_0^\infty \Delta\vartheta e^{-p\tau} d\tau = e^{-pt_0} \vartheta(p);$$

$$\int_{t_0}^\infty \frac{d\Delta\vartheta}{dt} e^{-pt} dt = [\Delta\vartheta e^{-pt}] \Big|_{t_0}^\infty + p \int_{t_0}^\infty \Delta\vartheta e^{-pt} dt = e^{-pt_0} p \vartheta(p);$$

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^\infty \frac{d^2\Delta\vartheta}{dt^2} e^{-pt} dt &= \left[\frac{d\Delta\vartheta}{dt} e^{-pt} \right] \Big|_{t_0}^\infty + p \int_{t_0}^\infty \frac{d\Delta\vartheta}{dt} e^{-pt} dt = \\ &= e^{-pt_0} p^2 \vartheta(p) \end{aligned}$$

и точно так же

$$\int_{t_0}^\infty \Delta V_y e^{-pt} dt = e^{-pt_0} V_y(p);$$

$$\int_{t_0}^\infty \frac{d\Delta V_y}{dt} e^{-pt} dt = e^{-pt_0} p V_y(p);$$

$$\int_{t_0}^\infty \Delta\delta_\vartheta e^{-pt} dt = e^{-pt_0} \delta_\vartheta(p); \quad \int_{t_0}^\infty \Delta F_y e^{-pt} dt = e^{-pt_0} F_y(p);$$

$$\int_{t_0}^\infty \Delta M_z e^{-pt} dt = e^{-pt_0} M_z(p),$$

получим

$$(mp + c_{yy}) V_y(p) + (\nu_y p + c_{y\vartheta}) \vartheta(p) = c_{y\delta} \delta_\vartheta(p) + F_y(p); \quad (2.4.33)$$

$$c_{\vartheta y} V_y(p) + (J_z p^2 + \mu_z p + c_{\vartheta\vartheta}) \vartheta(p) = c_{\vartheta\delta} \delta_\vartheta(p) + M_z(p).$$

Разрешая систему алгебраических уравнений (2.4.33) относительно $\vartheta(p)$ и $V_y(p)$, получим

$$\vartheta(p) = \frac{\begin{vmatrix} mp + c_{yy} & c_{y\delta}\delta_\vartheta(p) + F_y(p) \\ c_{\vartheta y} & c_{\vartheta\delta}\delta_\vartheta(p) + M_z(p) \end{vmatrix}}{(mp + c_{yy})(J_z p^2 + \mu_z p + c_{\vartheta\vartheta}) - \nu_y c_{\vartheta y} p - c_{y\delta} c_{\vartheta y}} ; \quad (2.4.34)$$

$$V_y(p) = \frac{\begin{vmatrix} c_{y\delta}\delta_\vartheta(p) + F_y(p) & \nu_y p + c_{y\vartheta} \\ c_{\vartheta\delta}\delta_\vartheta(p) + M_z(p) & J_z p^2 + \mu_z p + c_{\vartheta\vartheta} \end{vmatrix}}{(mp + c_{yy})(J_z p^2 + \mu_z p + c_{\vartheta\vartheta}) - \nu_y c_{\vartheta y} p - c_{y\delta} c_{\vartheta y}} . \quad (2.4.35)$$

Раскрыв определители, стоящие в числителях, будем иметь

$$\vartheta(p) = W_\vartheta^\delta(p)\delta_\vartheta(p) + W_V^F(p)F_y(p) + W_V^M(p)M_z(p); \quad (2.4.36)$$

$$V_y(p) = W_V^\delta(p)\delta_\vartheta(p) + W_V^F(p)F_y(p) + W_V^M(p)M_z(p), \quad (2.4.37)$$

где $W_\vartheta^\delta(p)$, $W_V^\delta(p)$, $W_V^F(p)$, $W_V^M(p)$, $W_V^M(p)$ – передаточные функции ракеты, отвечающие различным парам входных и выходных сигналов.

В развернутом виде, в частности,

$$W_\vartheta^\delta(p) = \frac{(mp + c_{yy})c_{\vartheta\delta} - c_{\vartheta y}c_{y\delta}}{(mp + c_{yy})(J_z p^2 + \mu_z p + c_{\vartheta\vartheta}) - \nu_y c_{\vartheta y} p - c_{y\delta} c_{\vartheta y}} . \quad (2.4.38)$$

В знаменателях передаточных функций стоит характеристический многочлен системы уравнений (1.13.5). Этот многочлен, как было показано выше, можно приближенно представить в виде (2.4.19). Заменяя характеристический многочлен его приближенным выражением, будем иметь

$$W_\vartheta^\delta(p) = \frac{(mp + c_{yy})c_{\vartheta\delta} - c_{\vartheta y}c_{y\delta}}{(mp + c_{yy} + z_1)[J_z p^2 + (\mu_z - \frac{J_z}{m}z_1)p + c_{\vartheta\vartheta}]} . \quad (2.4.39)$$

Передаточную функцию (2.4.39) удобно представить в виде

$$W_\vartheta^\delta(p) = \frac{k(\tau_1 p + 1)}{(\tau_2 p + 1)(T^2 p^2 + 2\xi p + 1)}, \quad (2.4.40)$$

где $k = \frac{c_{yy}c_{\vartheta\delta} - c_{\vartheta y}c_{y\delta}}{(c_{yy} + z_1)c_{\vartheta\vartheta}}$ – передаточный коэффициент аппарата;

τ_1 , τ_2 , T – постоянные времени, причем

$$\tau_1 = \frac{mc_{\vartheta\delta}}{c_{yy}c_{\vartheta\delta} - c_{\vartheta y}c_{y\delta}} ; \quad \tau_2 = \frac{m}{c_{yy} + z_1},$$

а T определяется формулой (2.4.24).

Используя передаточную функцию (2.4.40), можно построить переход-

ную функцию, отражающую реакцию аппарата по углу $\Delta\vartheta$ на отклонения органов управления.

При ступенчатом отклонении органов управления

$$\delta_{\vartheta}(p) = \frac{\Delta\delta_{\vartheta}}{p} .$$

Учитывая это, из (2.4.40) находим

$$\frac{\vartheta(p)}{\Delta\delta_{\vartheta}} = \frac{k(\tau_1 p + 1)}{p(\tau_2 p + 1)(T^2 p^2 + 2T\xi p + 1)} . \quad (2.4.41)$$

Отсюда, произведя обратное преобразование Лапласа, можно определить переходную функцию $\Delta\vartheta(t)/\Delta\delta_{\vartheta}$, которая представляет собой закон изменения угла $\Delta\vartheta$ при ступенчатом отклонении рулей и начальных условиях (2.4.32).

Аналогичным образом можно построить переходную функцию $\Delta V_y(t)/\Delta\delta_{\vartheta}$, представляющую собой закон изменения возмущения скорости ΔV_y при ступенчатом отклонении рулей и начальных условиях (2.4.32).

Явные выражения переходных функций будут приведены ниже.

Передаточные функции ракеты по рысканию по виду аналогичны передаточным функциям ракеты по тангажу. Так, например,

$$W_{\psi}^{\delta}(p) = \frac{\psi(p)}{\delta_{\psi}(p)} = \frac{k(\tau_1 p + 1)}{(\tau_2 p + 1)(T^2 p^2 + 2T\xi p + 1)} ,$$

только в данном случае

$$k = \frac{c_{zz} c_{\psi\delta} - c_{\psi z} c_{z\delta}}{(c_{zz} + z_1) c_{\psi\psi}} ; \quad \tau_1 = \frac{m c_{\psi\delta}}{c_{zz} c_{\psi\delta} - c_{\psi z} c_{z\delta}} ;$$

$$\tau_2 = \frac{m}{c_{zz} + z_1} ; \quad T = \sqrt{\frac{J_y}{c_{\psi\psi}}} ;$$

$$\xi = \frac{1}{2 \sqrt{J_y c_{\psi\psi}}} \left(\mu_y - \frac{J_y}{m} z_1 \right),$$

а z_1 определяется приближенными формулами

$$z_1^{[1]} \cong - \left(c_{zz} + \frac{P - X_0}{V_{Cx}} \right)$$

$$\text{и } z_1^{[2]} \cong - \frac{c_{\psi z} c_{z\psi} + v_z c_{\psi z}}{J_y \left(\frac{P - X_0}{m V_{Cx}} \right)^2 + \mu_y \frac{P - X_0}{m V_{Cx}} + c_{\psi\psi}} .$$

2.4.3. УПРОЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ И ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ПО ТАНГАЖУ И РЫСКАНИЮ

Переходный процесс, который начинается при отклонении органов управления, имеет следующую особенность.

В первые секунды после отклонения органов управления вариация скорости ΔV_y , которая была равна нулю в начальный момент t_0 , изменяется очень медленно. Поэтому на первом этапе возмущенного движения влияние вариации скорости центра масс аппарата на его вращение вокруг центра масс мало. Учитывая это, можно упростить уравнения возмущенного движения (1.13.5), полагая во втором уравнении системы $\Delta V_y = 0$ и отбрасывая первое уравнение. Тогда возмущенное движение ракеты на первом этапе приближенно будет описываться дифференциальным уравнением

$$J_z \frac{d^2 \Delta \vartheta}{dt^2} + \mu_z \frac{d \Delta \vartheta}{dt} + c_{\vartheta \vartheta} \Delta \vartheta = c_{\vartheta \delta} \Delta \delta_\vartheta + \Delta M_z. \quad (2.4.42)$$

Целесообразность такого упрощения системы (1.13.5) диктуется еще и тем, что поскольку мы пользуемся приемом "замораживания" коэффициентов, то можем рассчитывать на надежность получаемых выводов применительно лишь к малым отрезкам времени.

При указанном упрощении уравнений передаточные функции $W_\vartheta^\delta(p)$ и $W_\vartheta^M(p)$ можно представить в виде

$$W_\vartheta^\delta(p) = \frac{c_{\vartheta \delta}}{J_z p^2 + \mu_z p + c_{\vartheta \vartheta}} ; \quad (2.4.43)$$

$$W_\vartheta^M(p) = \frac{1}{J_z p^2 + \mu_z p + c_{\vartheta \vartheta}} . \quad (2.4.44)$$

Полагая

$$T = \sqrt{\frac{J_z}{c_{\vartheta \vartheta}}} ; \quad \xi = \frac{\mu_z}{2 \sqrt{J_z c_{\vartheta \vartheta}}} ; \quad k = \frac{c_{\vartheta \delta}}{c_{\vartheta \vartheta}} ;$$

$$k_M = \frac{1}{c_{\vartheta \vartheta}} , \quad (2.4.45)$$

будем иметь

$$W_\vartheta^\delta(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2 T \xi p + 1} ; \quad (2.4.46)$$

$$W_\vartheta^M(p) = \frac{k_M}{T^2 p^2 + 2 T \xi p + 1} . \quad (2.4.47)$$

После аналогичного упрощения уравнений возмущенного движения по рысканию получим

$$J_y \frac{d^2 \Delta \psi}{dt^2} + \mu_y \frac{d \Delta \psi}{dt} + c_{\psi \psi} \Delta \psi = c_{\psi \delta} \Delta \delta + \Delta M_y. \quad (2.4.48)$$

Отсюда следуют выражения для передаточных функций

$$W_\psi^\delta(p) = \frac{c_{\psi \vartheta}}{J_y p^2 + \mu_y p + c_{\psi \psi}}; \quad (2.4.49)$$

$$W_\psi^M(p) = \frac{1}{J_y p^2 + \mu_y p + c_{\psi \psi}}. \quad (2.4.50)$$

Исследуем реакцию аппарата по углу тангажа на ступенчатое отклонение органов управления.

При ступенчатом отклонении органов управления

$$\vartheta(p) = W_\vartheta^\delta(p) \delta_\vartheta(p) = \frac{c_{\vartheta \delta} \Delta \delta_\vartheta}{p(J_z p^2 + \mu_z p + c_{\vartheta \vartheta})}. \quad (2.4.51)$$

Отсюда, разлагая трехчлен $D(p) \equiv J_z p^2 + \mu_z p + c_{\vartheta \vartheta}$ на множители, получаем

$$\frac{\vartheta(p)}{\Delta \delta_\vartheta} = \frac{c_{\vartheta \delta}}{J_z} \frac{1}{p(p - p_1)(p - p_2)}. \quad (2.4.52)$$

Здесь p_1, p_2 — корни трехчлена $D(p)$,

$$p_1 = -\frac{1}{2} \frac{\mu_z}{J_z} + \sqrt{\frac{\mu_z^2}{4J_z^2} - \frac{c_{\vartheta \vartheta}}{J_z}}; \quad (2.4.53)$$

$$p_2 = -\frac{1}{2} \frac{\mu_z}{J_z} - \sqrt{\frac{\mu_z^2}{4J_z^2} - \frac{c_{\vartheta \vartheta}}{J_z}}.$$

Применим к (2.4.52) обратное преобразование Лапласа; получим переходную функцию

$$\frac{\Delta \delta_\vartheta(t)}{\Delta \delta_\vartheta} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{c_{\vartheta \delta}}{J_z} \frac{e^{pt}}{p(p - p_1)(p - p_2)} dp, \quad (2.4.54)$$

где c — произвольное вещественное число, превосходящее вещественные части корней (2.4.53).

Правая часть соотношения (2.4.54) равна сумме вычетов подынтегральной функции. Вычет функции $f(p)$, отвечающий полюсу p_i кратности χ , как известно, определяется так:

$$R_i \equiv \text{Выч } f(p) = \frac{1}{(\chi - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_i} \frac{d^{\chi-1} [f(p)(p - p_i)^\chi]}{dp^{\chi-1}}. \quad (2.4.55)$$

В частности, если p_i – простой полюс функции $f(p)$, то

$$R_i \equiv \underset{p=p_i}{\text{Выч}} f(p) = \lim_{p \rightarrow p_i} [f(p)(p - p_i)].$$

Рассмотрим следующие возможные случаи.

Статически неустойчивый летательный аппарат ($x_F > 0$). В этом случае $c_{\vartheta\vartheta} < 0$, поэтому $p_1 > 0$, а $p_2 < 0$. Подынтегральная функция в выражении (2.4.54) имеет три простых полюса: p_1 , p_2 , 0. Соответствующие вычеты подынтегральной функции равны:

$$R_1 = \frac{c_{\vartheta\delta}}{J_z} \frac{e^{p_1 t}}{p_1(p_1 - p_2)} ; \quad R_2 = \frac{c_{\vartheta\delta}}{J_z} \frac{e^{p_2 t}}{p_2(p_2 - p_1)} ;$$

$$R_3 = \frac{c_{\vartheta\delta}}{J_z} \frac{1}{p_1 p_2} .$$

Так как $p_1 p_2 = \frac{c_{\vartheta\vartheta}}{J_z}$, то вычет R_3 равен передаточному коэффициенту k [см. выражения (2.4.45)].

Учитывая это, получаем

$$\frac{\Delta\vartheta(t)}{\Delta\delta_\vartheta} = \sum_i R_i = \frac{c_{\vartheta\delta}}{J_z} \frac{e^{p_1 t}}{p_1(p_1 - p_2)} + \frac{c_{\vartheta\delta}}{J_z} \frac{e^{p_2 t}}{p_2(p_2 - p_1)} + k. \quad (2.4.56)$$

Переходная функция (2.4.56) определяет закон изменения возмущения $\Delta\vartheta(t)$ при ступенчатом отклонении органов управления и нулевых начальных значениях возмущений $\Delta\vartheta$ и $\Delta\dot{\vartheta}$. Так как $p_1 > 0$, а $p_2 < 0$, то первая составляющая переходной функции с течением времени возрастает, а вторая составляющая – убывает, приближаясь к нулю.

Статически нейтральный летательный аппарат ($x_F = 0$). В этом случае $c_{\vartheta\vartheta} = 0$, поэтому $p_1 = 0$, а $p_2 = -\mu_z/J_z$.

Подынтегральная функция имеет двукратный полюс 0 и простой полюс p_2 . Соответствующие вычеты равны:

$$R_1 = -\frac{c_{\vartheta\delta}}{J_z} \frac{1 + tp_2}{p_2^2} ; \quad R_2 = \frac{c_{\vartheta\delta}}{J_z} \frac{e^{p_2 t}}{p_2^2} .$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta\vartheta(t)}{\Delta\delta_\vartheta} = \frac{c_{\vartheta\delta}}{J_z} \frac{e^{p_2 t} - 1}{p_2^2} - \frac{c_{\vartheta\delta}}{J_z} \frac{t}{p_2} . \quad (2.4.57)$$

Как видим, и в этом случае переходная функция имеет составляющую, возрастающую по модулю с течением времени, однако теперь этот рост происходит по линейному закону.

Статически устойчивый летательный аппарат ($x_F < 0$). В этом случае $c_{\vartheta\vartheta} > 0$ и возможны следующие варианты:

а) $\mu_z^2/4J_z^2 > c_{\vartheta\vartheta}/J_z$. При этом корни p_1 и p_2 отрицательны и различны. Переходная функция $\Delta\vartheta(t)/\Delta\delta_\vartheta$ представляется снова формулой (2.4.56), но теперь и первая, и вторая ее составляющие являются по модулю убывающими функциями, с увеличением t возмущение $\Delta\vartheta(t)$ стремится к установленному значению, равному $k\Delta\delta_\vartheta$;

б) $\mu_z^2/4J_z^2 = c_{\vartheta\vartheta}/J_z$. Из (2.4.53) имеем $p_1 = p_2 = -\mu_z/2J_z$. Для переходной функции получаем следующее выражение:

$$\frac{\Delta\vartheta(t)}{\Delta\delta_\vartheta} = \frac{c_{\vartheta\vartheta}}{J_z} \left[\frac{1}{p_2^2} - \frac{1 - tp_2}{p_2^2} e^{p_2 t} \right]. \quad (2.4.58)$$

$$\text{С ростом } t \quad \Delta\vartheta(t) \rightarrow \frac{c_{\vartheta\vartheta} \Delta\delta_\vartheta}{J_z p_2^2} = \frac{4J_z c_{\vartheta\vartheta}}{\mu_z^2} \Delta\delta_\vartheta;$$

в) $\mu_z^2/4J_z^2 < c_{\vartheta\vartheta}/J_z$. В этом случае корни p_1 , p_2 – комплексно сопряженные,

$$p_1 = -\frac{1}{2} \frac{\mu_z}{J_z} + i \sqrt{\frac{c_{\vartheta\vartheta}}{J_z} - \frac{\mu_z^2}{4J_z^2}} ;$$

$$p_2 = -\frac{1}{2} \frac{\mu_z}{J_z} - i \sqrt{\frac{c_{\vartheta\vartheta}}{J_z} - \frac{\mu_z^2}{4J_z^2}} .$$

Используя обозначения (2.4.45), будем иметь

$$p_1 = -\frac{\xi}{T} + i \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T}; \quad p_2 = -\frac{\xi}{T} - i \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T}. \quad (2.4.59)$$

Так как $p_1 \neq p_2$, $p_1 \neq 0$, $p_2 \neq 0$ и, значит, полюсы подынтегральной функции простые, то переходная функция определяется формулой (2.4.56) при значениях p_1 и p_2 , вычисленных по формулам (2.4.59).

Подставляя значения p_1 и p_2 в (2.4.56), после некоторых преобразований получим

$$\frac{\Delta\vartheta(t)}{\Delta\delta_\vartheta} = k \left[1 - e^{-\frac{\xi}{T}t} \left(\cos \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T}t + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \times \right. \right.$$

$$\left. \left. \times \sin \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T}t \right) \right]. \quad (2.4.60)$$

Последнее соотношение можно привести к виду

$$\frac{\Delta \vartheta(t)}{\Delta \delta_\vartheta} = k \left[1 - \frac{e^{-\frac{t}{T}}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cos \left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} t - \varphi \right) \right], \quad (2.4.61)$$

где $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$.

Из (2.4.61) видно, что переходный процесс является колебательным, причем колебания затухающие, так как $-\frac{\xi}{T} = -\frac{1}{2} \frac{\mu_z}{J_z} < 0$. Чем больше коэффициент демпфирования ξ/T , тем быстрее затухает колебательный процесс. С течением времени возмущение $\Delta\vartheta(t)$ стремится к установившемуся значению, равному $k\Delta\delta_\vartheta$. Передаточный коэффициент k в данном случае можно трактовать как отношение установившегося значения выходной величины $\Delta\vartheta$ к значению входного сигнала $\Delta\delta_\vartheta$.

2.4.4. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ АППАРАТА ПО КРЕНУ

Применяя к уравнениям возмущенного движения по крену (1.13.8) преобразование Лапласа при нулевых начальных условиях, получим

$$(J_x p^2 + \mu_x p)\gamma(p) = c_{\gamma\delta} \delta_\gamma(p) + M_x(p), \quad (2.4.62)$$

где $\gamma(p) = \int_0^\infty \Delta\gamma e^{-pt} dt$; $\delta_\gamma(p) = \int_0^\infty \Delta\delta_\gamma e^{-pt} dt$;

$$M_x(p) = \int_0^\infty \Delta M_x e^{-pt} dt.$$

Отсюда

$$\gamma(p) = \frac{c_{\gamma\delta}}{p(J_x p + \mu_x)} \delta_\gamma(p) + \frac{1}{p(J_x p + \mu_x)} M_x(p). \quad (2.4.63)$$

Коэффициенты при $\delta_\gamma(p)$ и $M_x(p)$ являются передаточными функциями аппарата по крену W_γ^δ и W_γ^M . Эти передаточные функции можно представить в виде

$$W_\gamma^\delta(p) = \frac{k}{p(Tp + 1)}; \quad W_\gamma^M(p) = \frac{k_M}{p(Tp + 1)}, \quad (2.4.64)$$

где $k = c_{\gamma\delta}/\mu_x$; $k_M = 1/\mu_x$ — передаточные коэффициенты; $T = J_x/\mu_x$ — постоянная времени.

Реакция аппарата на ступенчатое отклонение органов управления по крену описывается переходной функцией $\Delta\gamma(t)/\Delta\delta_\gamma$, которую мож-

но получить путем обратного преобразования Лапласа, используя передаточную функцию $W_{\gamma}^{\delta}(p)$. При ступенчатом отклонении рулей

$$\frac{\gamma(p)}{\Delta \delta_{\gamma}} = \frac{1}{p} W_{\gamma}^{\delta}(p) = \frac{k}{p^2(Tp + 1)}.$$

Отсюда

$$\frac{\Delta \gamma(t)}{\Delta \delta_{\gamma}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{k}{p^2(Tp + 1)} e^{pt} dp \quad (2.4.65)$$

и после вычисления интеграла

$$\frac{\Delta \gamma(t)}{\Delta \delta_{\gamma}} = k [t - T(1 - e^{-\frac{t}{T}})]. \quad (2.4.66)$$

Дифференцируя (2.4.66), получим выражение для угловой скорости аппарата по крену как функцию времени

$$\frac{\Delta \dot{\gamma}(t)}{\Delta \delta_{\gamma}} = k(1 - e^{-\frac{t}{T}}). \quad (2.4.67)$$

С увеличением t угловая скорость $\Delta \dot{\gamma}$, изменяясь апериодически, стремится к своему значению в установившемся режиме, равному $k \Delta \delta_{\gamma}$. От значения постоянной времени T зависит скорость протекания этого апериодического переходного процесса: чем больше T , тем медленнее происходит процесс, и наоборот.

Передаточный коэффициент k можно трактовать как отношение установившегося значения выходной величины $\Delta \dot{\gamma}$ к значению входного сигнала $\Delta \delta_{\gamma}$.

2.4.5. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ РАКЕТЫ В ПРОДОЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ

Преобразование по Лапласу уравнения возмущенного продольного движения ракеты (1.13.6) при нулевых условиях приводит к равенству

$$(mp + c_{xx}) V_x(p) = c_{x\delta} \delta_x(p) + F_x(p), \quad (2.4.68)$$

где $V_x(p)$; $\delta_x(p)$; $F_x(p)$ – изображения Лапласа функций ΔV_x , $\Delta \delta_x$, ΔF_x .

Из (2.4.68) находим передаточные функции ракеты в продольном движении:

$$W_V^{\delta}(p) = \frac{c_{x\delta}}{mp + c_{xx}}; \quad W_V^F(p) = \frac{1}{mp + c_{xx}}. \quad (2.4.69)$$

В более удобной записи

$$W_V^\delta(p) = \frac{k}{Tp + 1} ; \quad W_V^F(p) = \frac{k_F}{Tp + 1} , \quad (2.4.70)$$

где $k = c_{x\delta}/c_{xx}$; $k_F = 1/c_{xx}$ – передаточные коэффициенты; $T = m/c_{xx}$ – постоянная времени аппарата.

При ступенчатом отклонении входного сигнала начинается переходный процесс, который описывается переходной функцией

$$\frac{\Delta V_x(t)}{\Delta \delta_x} = k \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) . \quad (2.4.71)$$

Как видим, динамические свойства аппарата по отношению к ΔV_x совпадают со свойствами апериодического звена. При увеличении t выходной сигнал ΔV_x стремится по экспоненте к установившемуся значению возмущения $\Delta \delta_x$. От значения постоянной времени T зависит скорость протекания этого апериодического процесса: чем больше T , тем медленнее происходит процесс.

Из (2.4.71) видно, что передаточный коэффициент k можно трактовать как отношение установившегося значения выходной величины ΔV_x к значению входной величины $\Delta \delta_x$.

Аналогичный физический смысл имеет и передаточный коэффициент k_F : он равен отношению установившегося значения выходной величины ΔV_x к значению входной величины ΔF_x .

2.4.6. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РАКЕТЫ

Процессы в системе управления ракет часто трудно описать простыми дифференциальными уравнениями, достаточно удобными для анализа. Поэтому на практике широко применяются методы исследования, использующие частотные характеристики системы. Частотные характеристики элементов системы, уравнения которых неизвестны, могут быть получены экспериментально. Применение частотных методов особенно целесообразно для системы высокого порядка, так как в этом случае решения дифференциальных уравнений и алгебраические критерии устойчивости становятся очень громоздкими.

Для применения частотных методов надо знать частотные характеристики ракеты как объекта управления и частотные характеристики систем управления. Частотные характеристики ракеты могут быть получены путем замены параметра p на $i\omega$. Однако для большей наглядности мы получим частотные характеристики непосредственно из уравнений возмущенного движения. Что касается частотных характеристик системы управления, то их обычно определяют экспериментально.

Частотные характеристики ракеты отражают ее вынужденное движение при отклонении органов управления по гармоническому закону и отсутствии возмущающих сил.

Рассмотрим движение по тангажу. Для построения частотных характеристик в уравнениях (1.13.5) положим

$$\Delta F_y = 0; \quad \Delta M_z = 0; \quad \Delta \delta_\vartheta = e^{i\omega t} \quad (2.4.72)$$

и, считая, что коэффициенты уравнений "заморожены", будем искать неизвестные функции ΔV_y , $\Delta \vartheta$ в виде

$$\Delta V_y = V_y e^{i\omega t}; \quad \Delta \vartheta = \theta e^{i\omega t}. \quad (2.4.73)$$

После подстановки (2.4.72) и (2.4.73) в уравнения (1.13.5) получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} (c_{yy} + i\omega m)V_y + (c_{y\vartheta} + i\omega v_y)\theta &= c_{y\delta}; \\ c_{\vartheta y}V_y + (c_{\vartheta\vartheta} + i\mu_z\omega - \omega^2 J_z)\theta &= c_{\vartheta\delta}. \end{aligned} \quad (2.4.74)$$

Систему (2.4.74) разрешим относительно θ . Получим частотную передаточную функцию

$$\begin{aligned} \theta = \frac{(c_{yy}c_{\vartheta\delta} - c_{\vartheta y}c_{y\delta}) + i\omega m c_{\vartheta\delta}}{c_{yy}(c_{\vartheta\vartheta} - \omega^2 J_z) - \omega^2 \mu_z m - c_{y\vartheta}c_{\vartheta y} + i[\omega m(c_{\vartheta\vartheta} - \omega^2 J_z) + \\ \leftarrow \dots \frac{+ \mu_z \omega c_{yy} - c_{\vartheta y} \omega v_y]}{+ \dots} \quad . \end{aligned} \quad (2.4.75)$$

Сравнивая ее с (2.4.38), можно видеть, что

$$\theta(i\omega) = W_\vartheta^\delta(p)|_{p=i\omega}.$$

Запишем θ в виде

$$\theta = \theta_1(\omega) + i\theta_2(\omega), \quad (2.4.76)$$

где θ_1 , θ_2 – соответственно вещественная и мнимая составляющие частотной передаточной функции,

$$\theta_1 = \frac{c_1(c_{yy}c_{\vartheta\delta} - c_{\vartheta y}c_{y\delta}) + c_2\omega m c_{\vartheta\delta}}{c_1^2 + c_2^2}, \quad (2.4.77)$$

$$\theta_2 = \frac{c_1\omega m c_{\vartheta\delta} - c_2(c_{yy}c_{\vartheta\delta} - c_{\vartheta y}c_{y\delta})}{c_1^2 + c_2^2}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} c_1 &= c_{yy}(c_{\vartheta\vartheta} - \omega^2 J_z) - \omega^2 \mu_z m - c_{y\vartheta}c_{\vartheta y}; \\ c_2 &= \omega m(c_{\vartheta\vartheta} - \omega^2 J_z) + \omega^2 \mu_z c_{yy} - v_y \omega c_{\vartheta y}. \end{aligned} \quad (2.4.78)$$

Частотную передаточную функцию можно представить и так:

$$\theta = k(\omega)e^{i\varphi(\omega)}, \quad (2.4.79)$$

$$\text{где } k(\omega) = |\theta(i\omega)| = \sqrt{\theta_1^2(\omega) + \theta_2^2(\omega)} \quad (2.4.80)$$

— амплитудная частотная характеристика объекта (коэффициент усиления);

$$\varphi = \arg \theta(i\omega) \quad (2.4.81)$$

— фазовая частотная характеристика объекта (фазовый сдвиг).

В соответствии с этим функцию $\Delta\vartheta$, являющуюся выходной величиной для объекта как линейного звена системы автоматического управления и входной величиной для автомата стабилизации, можно представить в виде

$$\Delta\vartheta = k(\omega)e^{i[\omega t + \varphi(\omega)]}. \quad (2.4.82)$$

Как видим, гармонические колебания органов управления вызывают гармонические колебания выходной величины объекта с той же частотой, но с измененными амплитудой и фазой. Эти изменения характеризуются коэффициентом усиления $k(\omega)$ и фазовым сдвигом $\varphi(\omega)$.

Подставив (2.4.77) в (2.4.80), будем иметь

$$k(\omega) = \frac{|c_{\vartheta\delta}|}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \sqrt{(1 - x_F \frac{c_{y\delta}}{c_{\vartheta\delta}})^2 c_{yy}^2 + \omega^2 m}. \quad (2.4.83)$$

Если управление осуществляется путем рассогласования тяг, то $c_{y\delta} = 0$ и в этом случае

$$k(\omega) = \frac{|c_{\vartheta\delta}|}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \sqrt{c_{yy}^2 + \omega^2 m}. \quad (2.4.84)$$

При управлении с помощью воздушных или газовых рулей или путем поворота маршевых двигателей $c_{\vartheta\delta} = -L_p c_{y\delta}$. При этом формула (2.4.83) принимает вид

$$k(\omega) = \frac{|c_{\vartheta\delta}|}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \sqrt{(1 + \frac{x_F}{L_p})^2 c_{yy}^2 + \omega^2 m}. \quad (2.4.85)$$

Фазовый сдвиг $\varphi(\omega)$ представляют как разность аргументов чисителя и знаменателя частотной передаточной функции.

Перейдем к рассмотрению движения ракеты по крену. В уравнении возмущенного движения (1.13.8) положим

$$\Delta M_x = 0; \quad \Delta\delta_\gamma = e^{i\omega t}. \quad (2.4.86)$$

Снова, считая коэффициенты уравнения "замороженными", будем искать неизвестную функцию $\Delta\gamma$ в виде

$$\Delta\gamma = \Gamma e^{i\omega t}. \quad (2.4.87)$$

После подстановки (2.4.86) и (2.4.87) в уравнение (1.13.8) получим

$$(-\omega^2 J_x + i\omega\mu_x)\Gamma = c_{\gamma\delta}.$$

Отсюда

$$\Gamma = \frac{c_{\gamma\delta}}{-J_x \omega^2 + i\mu_x \omega}, \quad (2.4.88)$$

$$\text{или } \Gamma = \Gamma_1(\omega) + i\Gamma_2(\omega), \quad (2.4.89)$$

$$\text{где } \Gamma_1(\omega) = \frac{-c_{\gamma\delta} J_x}{J_x^2 \omega^2 + \mu_x^2}; \quad \Gamma_2(\omega) = \frac{-c_{\gamma\delta} \mu_x}{(J_x^2 \omega^2 + \mu_x^2)\omega}. \quad (2.4.90)$$

Здесь $\Gamma_1(\omega)$, $\Gamma_2(\omega)$ – соответственно вещественная и мнимая составляющие частотной передаточной функции.

Частотную передаточную функцию можно представить и в таком виде:

$$\Gamma = k(\omega)e^{i\varphi(\omega)}, \quad (2.4.91)$$

$$\text{где } k(\omega) = |\Gamma(i\omega)| = \frac{|c_{\gamma\delta}|}{\sqrt{J_x^2 \omega^4 + \mu_x^2 \omega^2}}; \quad (2.4.92)$$

$$\varphi(\omega) = \arg \Gamma(i\omega) = \arg \left(-\frac{c_{\gamma\delta}}{J_x \omega^2} \right) - \arg \left(1 - i \frac{\mu_x}{J_x \omega} \right).$$

Так как $c_{\gamma\delta} < 0$, то

$$\varphi = -\arg \left(1 - i \frac{\mu_x}{J_x \omega} \right) = -\arctg \left(-\frac{\mu_x}{J_x \omega} \right) = \arctg \frac{\mu_x}{J_x \omega}. \quad (2.4.93)$$

Функции $k(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ представляют соответственно амплитудную частотную и фазовую частотную характеристики ракеты как объекта управления.

§ 2.5. ТРЕБОВАНИЯ К ЧАСТОТНЫМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ АВТОМАТА СТАБИЛИЗАЦИИ ИЗ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ РАКЕТЫ

Если частотные характеристики ракеты как объекта управления и частотные характеристики автомата стабилизации известны, то можно определить частотные характеристики разомкнутой системы автоматического управления.

Пусть $k_o(\omega)$ и $\varphi_o(\omega)$ – соответственно коэффициент усиления и фазовый сдвиг объекта, а $k_a(\omega)$ и $\varphi_a(\omega)$ – коэффициент усиления и фазовый сдвиг автомата стабилизации. Тогда, как известно, коэффициент усиления и фазовый сдвиг разомкнутой системы автоматического управления при последовательном соединении звеньев определяются соотношениями

$$k(\omega) = k_o(\omega)k_a(\omega); \quad (2.5.1)$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_o(\omega) + \varphi_a(\omega).$$

Если θ_{o1} , θ_{o2} – соответственно вещественная и мнимая составляющие частотной передаточной функции объекта, а θ_{a1} , θ_{a2} – вещественная и мнимая составляющие частотной передаточной функции автомата стабилизации, то вещественная и мнимая составляющие частотной передаточной функции разомкнутой системы определяются равенствами

$$\begin{aligned}\theta_1(\omega) &= \theta_{o1}(\omega)\theta_{a1}(\omega) - \theta_{o2}(\omega)\theta_{a2}(\omega); \\ \theta_2(\omega) &= \theta_{o1}(\omega)\theta_{a2}(\omega) + \theta_{o2}(\omega)\theta_{a1}(\omega).\end{aligned}\quad (2.5.2)$$

По соотношениям (2.5.1) или (2.5.2) можно построить амплитудно-фазовую частотную характеристику (годограф) разомкнутой системы. По виду этого годографа, руководствуясь критерием устойчивости Найквиста, можно судить об устойчивости движения ракеты.

Критерий устойчивости Найквиста формулируется следующим образом.

Пусть $W_o(p)$ – передаточная функция ракеты как объекта управления, а $W_a(p)$ – передаточная функция автомата стабилизации. Тогда передаточная функция разомкнутой системы автоматического управления, как известно,

$$W(p) = W_o(p)W_a(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}, \quad (2.5.3)$$

где $R(p)$ и $Q(p)$ – многочлены от p , причем степень многочлена $R(p)$ не выше, чем степень многочлена $Q(p)$.

Из (2.5.3), кстати, при подстановке $p = i\omega$ получается частотная передаточная функция разомкнутой системы

$$W(i\omega) \equiv \theta(i\omega) = k(\omega)e^{i\varphi(\omega)} = \theta_1(\omega) + i\theta_2(\omega). \quad (2.5.4)$$

Критерий устойчивости Найквиста. Пусть знаменатель передаточной функции разомкнутой системы автоматического управления (2.5.3) содержит l корней в правой полуплоскости комплексной плоскости и $n - l$ корней – в левой. Тогда при изменении частоты ω от $-\infty$ до $+\infty$ для устойчивой в замкнутом состоянии системы результирующий поворот конца вектора частотной передаточной функции $\theta(i\omega)$ разомкнутой системы относительно точки $(+1,0)$ против часовой стрелки должен составить угол, равный $2\pi l$, т.е. амплитудно-фазовая частотная характеристика должна охватывать точку $(+1,0)$ столько раз, сколько корней содержит знаменатель передаточной функции разомкнутой системы в правой полуплоскости.

Замечание. Приведенная формулировка критерия устойчивости Найквиста справедлива в предположении, что выходная величина объекта с тем же знаком является и входной величиной или частью входной (управляющей) величины регулятора. В теории автоматического управления при формировании управляющей величины регулятора обычно используется выходная величина объекта как звено системы автоматического регулирования, взятая с противоположным знаком. В этом случае характерной точкой, относительно которой рассматривается вращение конца вектора $\theta(i\omega)$, становится точка $(-1,0)$.

На начальном этапе проектирования ракеты, когда параметры автомата стабилизации еще не определены, но уже известны частотные характеристики ракеты как объекта управления, с помощью критерия устойчивости Найквиста можно установить необходимые ограничения на частотные характеристики автомата стабилизации из условия устойчивости системы. Это позволит уточнить диапазон возможных значений параметров автомата стабилизации и тем самым упростит задачу выбора их рациональных значений.

Ниже мы ограничимся рассмотрением движения ракеты по тангажу и крену, имея в виду, что соответствующий анализ по другим каналам управления проводится аналогичным образом.

2.5.1. ТРЕБОВАНИЯ К ЧАСТОТНЫМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ АВТОМАТА СТАБИЛИЗАЦИИ ПО КАНАЛУ ТАНГАЖА

Для простоты и наглядности анализа воспользуемся уравнением (2.5.42), описывающим приближенно возмущенное движение ракеты по тангажу. В этом случае передаточная функция ракеты как объекта управления имеет следующий вид:

$$W_o(p) \equiv W_{\vartheta}^{\delta}(p) = \frac{c_{\vartheta\delta}}{J_z p^2 + \mu_z p + c_{\vartheta\vartheta}} . \quad (2.5.5)$$

Подставляя в (2.5.5) $i\omega$ вместо p , получим частотную передаточную функцию объекта

$$W_o(i\omega) \equiv \theta_o(i\omega) = \frac{-c_{\vartheta\delta}}{J_z \omega^2 - c_{\vartheta\vartheta} - i\mu_z \omega} . \quad (2.5.6)$$

Разделяя действительную и мнимую части частотной передаточной функции, будем иметь

$$\theta_o(i\omega) = \theta_{o1}(\omega) + i\theta_{o2}(\omega), \quad (2.5.7)$$

$$\text{где } \theta_{o1}(\omega) = \frac{-c_{\vartheta\delta}(J_z \omega^2 - c_{\vartheta\vartheta})}{(J_z \omega^2 - c_{\vartheta\vartheta})^2 + \mu_z^2 \omega^2} ; \quad (2.5.8)$$

$$\theta_{o2}(\omega) = \frac{-c_{\vartheta\delta} \mu_z \omega}{(J_z \omega^2 - c_{\vartheta\vartheta})^2 + \mu_z^2 \omega^2} .$$

Формулы (2.5.8) удобно записать так:

$$\theta_{o1}(\omega) = \frac{-\bar{c}_{\vartheta\delta}(\omega^2 - \bar{c}_{\vartheta\vartheta})}{(\omega^2 - \bar{c}_{\vartheta\vartheta})^2 + \bar{\mu}_z^2 \omega^2} ; \quad (2.5.9)$$

$$\theta_{o2}(\omega) = \frac{-\bar{c}_{\vartheta\delta} \bar{\mu}_z \omega}{(\omega^2 - \bar{c}_{\vartheta\vartheta})^2 + \bar{\mu}_z^2 \omega^2} ,$$

$$\text{где } \bar{c}_{\vartheta\vartheta} = c_{\vartheta\vartheta}/J_z, \quad \bar{\mu}_z = \mu_z/J_z, \quad \bar{c}_{\vartheta\delta} = c_{\vartheta\delta}/J_z. \quad (2.5.10)$$

Возможны следующие три случая.

1. Ракета статически устойчива, т.е. $x_F < 0$. При этом

$$\bar{c}_{\vartheta\vartheta} > 0, \quad (2.5.11)$$

и поэтому знаменатель передаточной функции (2.5.5) не имеет корней в правой полуплоскости.

При изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ конец вектора частотной передаточной функции $\theta_0(i\omega)$ описывает, как это следует из анализа формул (2.5.9) с учетом того, что $c_{\vartheta\delta} < 0$, $\mu_z > 0$, кривую, изображенную на рис. 2.9, а. Из условия устойчивости Найквиста следует, что годограф разомкнутой системы не должен охватывать точку $(+1,0)$ ¹. Желательный вид годографа разомкнутой системы показан на рис. 2.9, б пунктирной линией. В этом случае будет иметь место запас устойчивости по фазе, равный углу $\varphi_{\text{зап}}$ между осью абсцисс и лучом, проведенным из начала координат через точку пересечения годографа разомкнутой системы с окружностью единичного радиуса. Для создания такого запаса устойчивости необходимо, чтобы автомат стабилизации на частотах, близких к частоте ω^* , на которой коэффициент усиления разомкнутой системы равен единице, имел фазовое опережение. Фазовый сдвиг автомата стабилизации должен удовлетворять условию²

$$2k\pi \leq \varphi_a + \varphi_0 \leq (2k + 1)\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.5.12)$$

2. Ракета статически нейтральна, т.е. $x_F = 0$. При этом

$$\bar{c}_{\vartheta\vartheta} = 0, \quad (2.5.13)$$

и поэтому

$$\theta_{01}(\omega) = \frac{-\bar{c}_{\vartheta\delta}}{\omega^2 + \bar{\mu}_z^2}, \quad \theta_{02}(\omega) = \frac{-\bar{c}_{\vartheta\delta}\bar{\mu}_z}{(\omega^2 + \bar{\mu}_z^2)\omega}. \quad (2.5.14)$$

Конец вектора $\theta_0(i\omega)$ описывает кривую, изображенную на рис. 2.10.

Знаменатель передаточной функции (2.5.5) снова не имеет корней в правой полуплоскости. Поэтому, так же как и в случае $x_F < 0$, автомат стабилизации должен иметь фазовое опережение согласно условию (2.5.12) (показано пунктирной кривой на рис. 2.10).

3. Ракета статически неустойчива, т.е. $x_F > 0$. При этом

$$\bar{c}_{\vartheta\vartheta} < 0, \quad (2.5.15)$$

и поэтому знаменатель передаточной функции (2.5.5) имеет один корень в правой полуплоскости. В данном случае частотная передаточная функция

¹ Здесь и далее предполагается, что знаменатель передаточной функции автомата стабилизации не имеет корней в правой полуплоскости.

² Подробнее смотри книгу М.А. Айзermana [4].

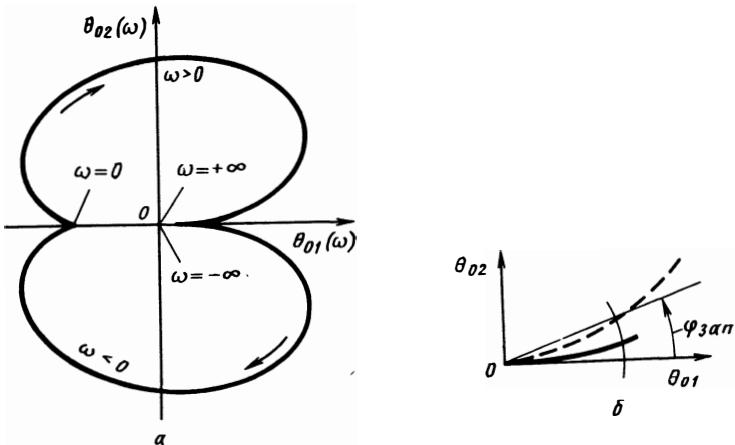


Рис. 2.9.

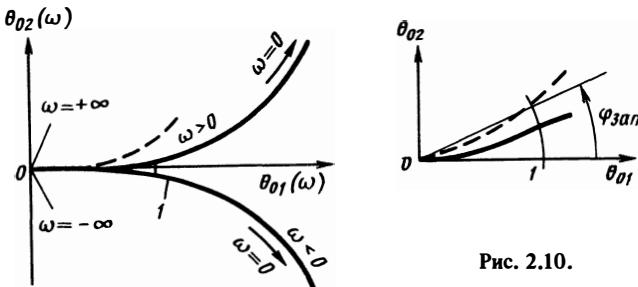


Рис. 2.10.

объекта управления имеет вид кривой, изображенной на рис. 2.11. Согласно критерию Найквиста для устойчивости замкнутой системы конец вектора частотной передаточной функции разомкнутой системы при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ должен повернуться на угол 2π . Из рис. 2.11 видно, что для обеспечения устойчивости с некоторым запасом по фазе необходимо, чтобы фаза φ_a автомата стабилизации удовлетворяла условию (2.5.12). Но этого в рассматриваемом случае недостаточно. Нужно еще, чтобы годограф разомкнутой системы пересекал ось абсцисс при $\omega = 0$ правее точки $(+1, 0)$. Поэтому необходимо выполнение еще одного условия:

$$k_o(0) k_a(0) > 1. \quad (2.5.16)$$

Так как коэффициент усиления объекта

$$k_o(\omega) = \sqrt{\theta_{01}^2(\omega) + \theta_{02}^2(\omega)} = \\ = \frac{|\bar{c}_{\vartheta\delta}|}{\sqrt{(\omega^2 - \bar{c}_{\vartheta\vartheta})^2 + \bar{\mu}_z^2 \omega^2}}, \quad (2.5.17)$$

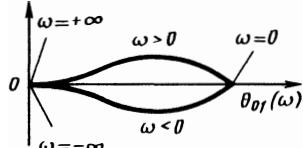


Рис. 2.11.

то при $\omega = 0$ имеем

$$k_o(0) = \bar{c}_{\vartheta\delta} / \bar{c}_{\vartheta\vartheta}. \quad (2.5.18)$$

Учитывая (2.5.18), из (2.5.16) находим нижнюю границу допустимых значений коэффициента усиления автомата стабилизации

$$k_a(0) \geq \bar{c}_{\vartheta\vartheta} / \bar{c}_{\vartheta\delta}. \quad (2.5.19)$$

Таким образом, во всех рассматриваемых случаях требуется фазовое опережение автомата стабилизации на частотах, близких к частоте ω^* , а если ракета статически неустойчива, то кроме того коэффициент усиления автомата стабилизации при $\omega = 0$ должен удовлетворять условию (2.5.19).

Частота ω^* , вблизи которой должно выполняться условие (2.5.12), определяется равенством

$$k_o(\omega^*) k_a(\omega^*) = 1. \quad (2.5.20)$$

Эту частоту можно найти следующим образом. Подставим в равенство (2.5.20) значение $k_o(\omega^*)$ согласно (2.5.17):

$$\frac{|\bar{c}_{\vartheta\delta}|}{\sqrt{(\omega^{*2} - \bar{c}_{\vartheta\vartheta})^2 + \bar{\mu}_z^2 \omega^{*2}}} k_a(\omega^*) = 1.$$

Ввиду малости $\bar{\mu}_z$ отсюда следует приближенное равенство

$$\omega^{*2} \approx \bar{c}_{\vartheta\vartheta} + |\bar{c}_{\vartheta\delta}| k_a(\omega^*). \quad (2.5.21)$$

Если известна зависимость коэффициента усиления автомата стабилизации k_a от частоты ω , то из (2.5.21) нетрудно графически или путем последовательных приближений определить искомую частоту ω^* .

Так как обычно $\varphi_o(\omega^*) \approx 0$ (а при $\mu_z = 0$ $\varphi_o(\omega^*) = 0$), то условие фазового опережения автомата стабилизации можно упростить, записав его так:

$$2k\pi \leq \varphi_a \leq (2k + 1)\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.5.22)$$

Наконец, оценим максимально допустимое значение коэффициента усиления автомата стабилизации при больших ω .

Пусть ω_0 – частота, на которой автомат стабилизации не дает сдвига фазы. Примерно при этой частоте годограф разомкнутой системы автоматического управления пересекает ось абсцисс, так как фазовый сдвиг, создаваемый объектом, очень мал. Пренебрегая значением $\varphi_o(\omega_0)$, для координаты точки пересечения годографа разомкнутой системы автоматического управления с осью абсцисс будем иметь следующее выражение:

$$\begin{aligned} \theta_1(\omega_0) &= k(\omega_0) = \theta_{o1}(\omega_0) k_a(\omega_0) = \\ &= \frac{-\bar{c}_{\vartheta\delta}(\omega_0^2 - \bar{c}_{\vartheta\vartheta})}{(\omega_0^2 - \bar{c}_{\vartheta\vartheta})^2 + \bar{\mu}_z \omega_0^2} k_a(\omega_0). \end{aligned} \quad (2.5.23)$$

Из условия устойчивости системы годограф разомкнутой системы должен пересекать ось абсцисс (на частотах, близких к ω_0) левее точки (+1,0) и, значит, коэффициент усиления автомата стабилизации должен удовлетворять неравенству

$$\frac{-\bar{c}_{\vartheta\delta}(\omega_0^2 - \bar{c}_{\vartheta\vartheta})}{(\omega_0^2 - \bar{c}_{\vartheta\vartheta})^2 + \bar{\mu}_z^2 \omega_0^2} k_a(\omega_0) < 1. \quad (2.5.24)$$

Отсюда, предполагая, что $\omega_0^2 > \bar{c}_{\vartheta\vartheta}$, и учитывая, что $\bar{c}_{\vartheta\delta} < 0$, получаем

$$k_a(\omega_0) < \frac{(\omega_0^2 - \bar{c}_{\vartheta\vartheta})^2 + \bar{\mu}_z^2 \omega_0^2}{-\bar{c}_{\vartheta\delta}(\omega_0^2 - \bar{c}_{\vartheta\vartheta})}. \quad (2.5.25)$$

Ввиду малости коэффициента $\bar{\mu}_z$ отношение (2.5.25) можно упростить, отбросив слагаемое $\bar{\mu}_z^2 \omega_0^2$. Тогда будем иметь

$$k_a(\omega_0) < (\omega_0^2 - \bar{c}_{\vartheta\vartheta}) / (-\bar{c}_{\vartheta\delta}). \quad (2.5.26)$$

2.5.2. ТРЕБОВАНИЯ К ЧАСТОТНЫМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ АВТОМАТА СТАБИЛИЗАЦИИ ПО КАНАЛУ КРЕНА

Передаточная функция ракеты как объекта управления для пары входного и выходного сигналов $\Delta\delta_\gamma$ и $\Delta\gamma$ представляется в виде [см. выражение (2.4.64)]

$$W_o(p) \equiv W_\gamma^\delta(p) = \frac{c_{\gamma\delta}}{J_x} \frac{1}{p(p + \frac{\mu_x}{J_x})}. \quad (2.5.27)$$

Вещественная и мнимая составляющие частотной передаточной функции представляются формулами (2.4.90), которые можно записать так:

$$\Gamma_{o1} = \frac{-\bar{c}_{\gamma\delta}}{\omega^2 + \bar{\mu}_x^2}, \quad \Gamma_{o2} = \frac{-\bar{c}_{\gamma\delta} \bar{\mu}_x}{(\omega^2 + \bar{\mu}_x^2)\omega},$$

где $\bar{c}_{\gamma\delta} = c_{\gamma\delta}/J_x$; $\bar{\mu}_x = \mu_x/J_x$.

При изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ конец вектора частотной передаточной функции $\Gamma_o(i\omega)$ описывает кривую, изображенную на рис. 2.12. Так как знаменатель передаточной функции (2.5.27) не имеет корней в правой полуплоскости, то из условия устойчивости Найквиста годограф разомкнутой системы не должен охватывать точку (+1,0), а для этого нужно, чтобы автомат стабилизации на частотах, близких к частоте ω^* , при которой коэффициент усиления разомкнутой системы равен единице, имел фазовое опережение; точнее, чтобы на этих частотах выполнялось условие

$$2k\pi \leq \varphi_a + \varphi_o \leq (2k + 1)\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.5.28)$$

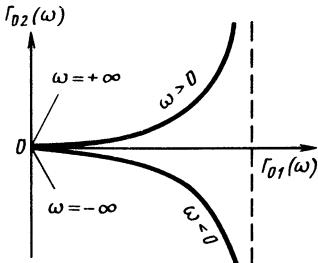


Рис. 2.12.

Частоту ω^* можно определить следующим образом.

Пусть $k_o(\omega)$ и $k_a(\omega)$ – соответственно коэффициенты усиления объекта и автомата стабилизации. Тогда по условию Найквиста

$$k_o(\omega^*) k_a(\omega^*) = 1. \quad (2.5.29)$$

Учитывая, что

$$k_o(\omega) = \sqrt{\Gamma_{01}^2 + \Gamma_{02}^2} = \frac{|\bar{c}_{\gamma\delta}|}{\sqrt{(\omega^2 + \bar{\mu}_x^2)\omega^2}}, \quad (2.5.30)$$

и из (2.5.29) получим

$$|\bar{c}_{\gamma\delta}| k_a(\omega^*) = \sqrt{(\omega^{*2} + \bar{\mu}_x^2)\omega^{*2}}.$$

Ввиду малости $\bar{\mu}_x$ отсюда следует приближенное равенство

$$\omega^{*2} = |\bar{c}_{\gamma\delta}| k_a(\omega^*). \quad (2.5.31)$$

Если коэффициент усиления автомата стабилизации как функция от ω известен, то из (2.5.31) можно, по крайней мере приближенно, определить значение ω^* .

§ 2.6. ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ. D-РАЗБИЕНИЕ

При расчете и проектировании системы управления ракеты обычно исследуют влияние различных конструктивных параметров ракеты и параметров регулятора на устойчивость системы. С этой целью строят области устойчивости по одному комплексному параметру или по двум параметрам при фиксированных значениях всех прочих параметров. Плоскость исследуемых параметров подвергается так называемому *D*-разбиению путем построения линий, разделяющей области с определенным распределением корней характеристического многочлена замкнутой системы (с определенным числом корней с отрицательными вещественными частями и с положительными вещественными частями). Практический интерес представляют кривые *D*-разбиения, являющиеся границей области с наибольшим числом корней с отрицательными вещественными частями. Для выделения этой области, которая может оказаться областью устойчивости, вводится штриховка линий *D*-разбиения по правилу, приводимому ниже. Чтобы установить, является ли выделенная область областью устойчивости или нет, необходимо для одной (любой) точки этой области проверить устойчивость с помощью какого-нибудь критерия.

Ниже в качестве примера проводится построение области устойчивости в плоскости двух параметров. Рассматривается возмущенное движение

ракеты по тангажу. Построение областей устойчивости по рысканию и крену проводится аналогично.

Возмущенное движение ракеты по тангажу описывается дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} m(t) \frac{d\Delta V_y}{dt} + \nu_y(t) \frac{d\Delta\vartheta}{dt} + c_{yy}(t)\Delta V_y + c_{y\vartheta}(t)\Delta\vartheta &= \\ = c_{y\delta}(t)\Delta\delta_\vartheta + \Delta F_y; & \\ J_z(t) \frac{d^2\Delta\vartheta}{dt^2} + \mu_z(t) \frac{d\Delta\vartheta}{dt} + c_{\vartheta\vartheta}(t)\Delta\vartheta + c_{\vartheta y}(t)\Delta V_y &= \\ = c_{\vartheta\delta}(t)\Delta\delta_\vartheta + \Delta M_z. & \end{aligned} \quad (2.6.1)$$

К уравнениям (2.6.1) нужно добавить еще уравнение связи между $\Delta\delta_\vartheta$ и регулируемыми величинами. Примем следующий закон управления:

$$T_2^2 \frac{d^2\Delta\delta_\vartheta}{dt^2} + T_1 \frac{d\Delta\delta_\vartheta}{dt} + \Delta\delta_\vartheta = k\Delta\vartheta + k_1 \frac{d\Delta\vartheta}{dt}. \quad (2.6.2)$$

Для другого закона управления соответствующие расчетные формулы нетрудно получить, повторяя приводимые далее выкладки.

Следуя методу "замороженных" коэффициентов, зафиксируем время t и рассмотрим систему однородных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} m \frac{d\Delta V_y}{dt} + \nu_y \frac{d\Delta\vartheta}{dt} + c_{yy}\Delta V_y + c_{y\vartheta}\Delta\vartheta - c_{y\delta}\Delta\delta_\vartheta &= 0; \\ J_z \frac{d^2\Delta\vartheta}{dt^2} + \mu_z \frac{d\Delta\vartheta}{dt} + c_{\vartheta\vartheta}\Delta\vartheta + c_{\vartheta y}\Delta V_y - c_{\vartheta\delta}\Delta\delta_\vartheta &= 0; \\ T_2^2 \frac{d^2\Delta\delta_\vartheta}{dt^2} + T_1 \frac{d\Delta\delta_\vartheta}{dt} + \Delta\delta_\vartheta - k_1 \frac{d\Delta\vartheta}{dt} - k\Delta\vartheta &= 0. \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

Построим линии D -разбиения в плоскости двух параметров k и k_1 , предполагая, что T_1 и T_2^2 – заданные величины.

Характеристическое уравнение системы (2.6.3) имеет вид

$$\begin{aligned} D\lambda \equiv a_0 T_2^2 \lambda^5 + (a_1 T_2^2 + a_0 T_1) \lambda^4 + (a_0 + a_2 T_2^2 + a_1 T_1) \lambda^3 + \\ + (a_1 + a_3 T_2^2 + a_2 T_1 + b_1 k_1) \lambda^2 + (a_2 + a_3 T_1 + b_1 k + b_2 k_1) \lambda + \\ + (a_3 + b_2 k) = 0, \end{aligned} \quad (2.6.4)$$

где $a_0 = mJ_z$; $a_1 = m\mu_z + c_{yy}J_z$;

$$a_2 = mc_{\vartheta\vartheta} + \mu_z c_{yy} - c_{\vartheta y} \nu_y;$$

$$a_3 = c_{yy}c_{\vartheta\vartheta} - c_{y\vartheta}c_{\vartheta y};$$

$$b_1 = -mc_{\vartheta\delta}; \quad b_2 = c_{y\delta}c_{\vartheta y} - c_{yy}c_{\vartheta\delta}.$$

Уравнение (2.6.4) можно переписать в виде

$$kP(\lambda) + k_1 Q(\lambda) + S(\lambda) = 0, \quad (2.6.6)$$

где $P(\lambda) = b_1\lambda + b_2$; $Q(\lambda) = (b_1\lambda + b_2)\lambda$;

$$\begin{aligned} S(\lambda) = & a_0 T_2^2 \lambda^5 + (a_1 T_2^2 + a_0 T_1) \lambda^4 + (a_0 + a_2 T_2^2 + a_1 T_1) \lambda^3 + \\ & + (a_1 + a_3 T_2^2 + a_2 T_1) \lambda^2 + (a_2 + a_3 T_1) \lambda + a_3. \end{aligned}$$

Введем подстановку $\lambda = i\omega$:

$$P(i\omega) = P_1(\omega) + iP_2(\omega); \quad Q(i\omega) = Q_1(\omega) + iQ_2(\omega);$$

$$S(i\omega) = S_1(\omega) + iS_2(\omega).$$

Здесь $P_1(\omega) = b_2$; $P_2(\omega) = b_1\omega$; $Q_1(\omega) = -b_1\omega^2$;

$$\begin{aligned} Q_2(\omega) = & b_2\omega; \quad S_1(\omega) = (a_1 T_2^2 + a_0 T_1) \omega^4 - \\ & - (a_1 + a_3 T_2^2 + a_2 T_1) \omega^2 + a_3; \quad S_2(\omega) = a_0 T_2^2 \omega^5 - \\ & - (a_0 + a_2 T_2^2 + a_1 T_1) \omega^3 + (a_2 + a_3 T_1) \omega. \end{aligned}$$

Приравнивая в уравнении (2.6.6) нулью отдельно действительную и мнимую части, получим параметрические уравнения линий D -разбиения плоскости параметров k и k_1 :

$$\begin{aligned} kP_1(\omega) + k_1 Q_1(\omega) + S_1(\omega) &= 0; \\ kP_2(\omega) + k_1 Q_2(\omega) + S_2(\omega) &= 0. \end{aligned} \quad (2.6.7)$$

Равенства (2.6.7) разрешим относительно k и k_1 :

$$k = \frac{\begin{vmatrix} -S_1(\omega) & Q_1(\omega) \\ -S_2(\omega) & Q_2(\omega) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_1(\omega) & Q_1(\omega) \\ P_2(\omega) & Q_2(\omega) \end{vmatrix}}; \quad k_1 = \frac{\begin{vmatrix} P_1(\omega) & -S_1(\omega) \\ P_2(\omega) & -S_2(\omega) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_1(\omega) & Q_1(\omega) \\ P_2(\omega) & Q_2(\omega) \end{vmatrix}},$$

или, раскрывая определители:

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{b_1^2 \omega^2 + b_2^2} (A_{16} \omega^6 + A_{14} \omega^4 + A_{12} \omega^2 + A_{10}); \\ k_1 &= \frac{1}{b_1^2 \omega^2 + b_2^2} (A_{24} \omega^4 + A_{22} \omega^2 + A_{20}), \end{aligned} \quad (2.6.8)$$

где $A_{16} = -a_0 b_1 T_2^2$;

$$A_{14} = b_1(a_0 + a_2 T_2^2 + a_1 T_1) - b_2(a_1 T_2^2 + a_0 T_1); \quad (2.6.9)$$

$$A_{12} = b_2(a_1 + a_3 T_2^2 + a_2 T_1) - b_1(a_2 + a_3 T_1);$$

$$\begin{aligned} A_{10} &= -a_3 b_2; \quad A_{24} = b_1(a_1 T_2^2 + a_0 T_1) - a_0 b_2 T_2^2; \\ A_{22} &= b_2(a_0 + a_2 T_2^2 + a_1 T_1) - b_1(a_1 + a_3 T_2^2 + a_2 T_1); \\ A_{20} &= a_3 b_1 - b_2(a_2 + a_3 T_1). \end{aligned} \quad (2.6.9)$$

Каждому значению ω соответствуют определенные значения k и k_1 , т.е. точка в плоскости kk_1 . Придавая различные значения ω (от $-\infty$ до ∞), можно в плоскости kk_1 построить кривую D -разбиения. При этом следует откладывать k по оси абсцисс, а k_1 — по оси ординат.

Далее производится штриховка кривой D -разбиения по следующему правилу. Если при движении по этой кривой в сторону возрастания ω (от $\omega = -\infty$ до $\omega = \infty$) главный определитель системы (2.6.7) положителен, то кривую штрихуют слева. Если главный определитель отрицателен, то кривую штрихуют справа. В рассматриваемом случае

$$\Delta = \begin{vmatrix} P_1(\omega) & Q_1(\omega) \\ P_2(\omega) & Q_2(\omega) \end{vmatrix} = (b_1^2 \omega^2 + b_2^2) \omega.$$

Поэтому при возрастании ω от 0 до ∞ $\Delta > 0$ и, значит, кривую следует штриховать слева.

Поскольку в формулы (2.6.8) ω входит в четной степени, то каждой точке кривой соответствуют два значения $\omega: \pm |\omega|$, т.е. при изменении ω от $-\infty$ до ∞ мы проходим по границе дважды.

При возрастании ω от $-\infty$ до 0 $\Delta < 0$, поэтому кривую следует штриховать справа. В результате кривая окажется заштрихованной дважды с одной и той же стороны.

При $\omega = 0$ в решении системы уравнений (2.6.7) появляется особенность, так как обращаются в нуль как ее главный определитель, так и определители

$$\begin{vmatrix} -S_1(\omega) & Q_1(\omega) \\ -S_2(\omega) & Q_2(\omega) \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} P_1(\omega) & -S_1(\omega) \\ P_2(\omega) & -S_2(\omega) \end{vmatrix}.$$

Точку $\omega = 0$ принято называть особой точкой. При $\omega = 0$ система (2.6.7) приводится к одному уравнению

$$k = -a_3/b_2. \quad (2.6.10)$$

Это уравнение особой прямой. Прямую следует штриховать так, чтобы вблизи особой точки штриховки прямой и кривой D -разбиения были направлены в одну и ту же сторону. Область, покрытая наибольшим числом штриховок, будет областью устойчивости, если таковая в рассматриваемый момент времени вообще имеется.

На рис. 2.13 приведена линия D -разбиения и область устойчивости для ракеты с законом управления (2.6.2). Подобное построение областей устойчивости проводят для различных фиксированных моментов времени с

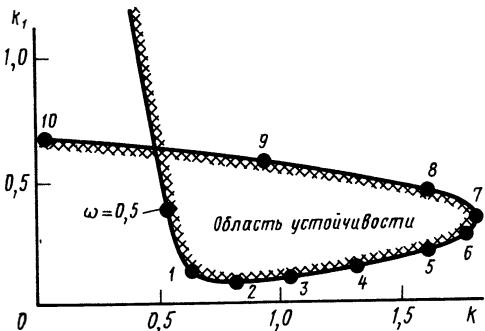


Рис. 2.13.

интервалом 10 ... 20 с. Общая часть всех полученных таким путем областей устойчивости представляет собой область тех значений параметров k и k_1 , при которых устойчивость обеспечивается на всей траектории полета.

§ 2.7. УТОЧНЕНИЕ МЕТОДА "ЗАМОРОЖЕННЫХ" КОЭФФИЦИЕНТОВ. УЧЕТ ПЕРЕМЕННОСТИ КОЭФФИЦИЕНТОВ УРАВНЕНИЙ

В § 2.3 был сформулирован приближенный критерий локальной устойчивости невозмущенного движения, которому отвечает тривиальное решение уравнений (2.3.2), основанный на приеме "замораживания" коэффициентов. В данном параграфе рассматриваются критерии локальной устойчивости невозмущенного движения, учитывающие переменность коэффициентов уравнений [1].

Для удобства дальнейшего изложения систему дифференциальных уравнений (2.3.2) представим в нормальном виде. С этой целью, рассматривая в качестве дополнительных обобщенных координат обобщенные скорости, введем новые переменные

$$x_i = \begin{cases} \frac{dq_i}{dt} & (i = 1, 2, 3, \dots, n), \\ q_{i-n} & (i = n+1, \dots, 2n). \end{cases} \quad (2.7.1)$$

В новых переменных система (2.3.2) принимает вид

$$\sum_{j=1}^n m_{ij}(t) \frac{dx_j}{dt} = - \sum_{j=1}^n r_{ij}(t)x_j - \sum_{j=1}^n n_{ij}(t)x_{n+j};$$

$$\frac{dx_{n+i}}{dt} = x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.7.2)$$

Можно показать, что определитель, составленный из коэффициентов m_{ij} при старших производных в системе (2.3.2), отличен от нуля, поэтому не равен нулю и определитель

$$\begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} & 0 & \dots & 0 \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix},$$

составленный из коэффициентов при производных в уравнениях (2.7.2). Значит, система (2.7.2) разрешима относительно производных dx_i/dt . Решая ее как неоднородную алгебраическую систему относительно производных dx_i/dt , получим систему дифференциальных уравнений в нормальном виде

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^m u_{ij}(t)x_j \quad (i = 1, 2, \dots, m; \ m = 2n). \quad (2.7.3)$$

Далее предполагается, что $u_{ij}(t)$ – функции, дифференцируемые любое число раз.

2.7.1. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ

Если коэффициенты уравнений (2.7.3) – постоянные величины, то их решение строится так же, как и решение системы (2.3.3). Так, если

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^m u_{ij}x_j \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (2.7.4)$$

где $u_{ij} = \text{const}$, то частное решение ищется в виде

$$x_i = k_i e^{\lambda t} \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (2.7.5)$$

Подстановка (2.7.5) в уравнения (2.7.4) приводит к системе алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^m u_{ij}k_j - k_i\lambda = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (2.7.6)$$

Система алгебраических уравнений (2.7.6) имеет ненулевые решения только при тех значениях λ , при которых определитель системы обращается в нуль. Определитель системы – это многочлен (характеристический многочлен) степени m относительно λ , который имеет m корней $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. Простому корню λ_σ соответствует с точностью до произвольно ненулевого множителя единственное ненулевое решение алгебраической системы (2.7.6): $k_{1\sigma}, k_{2\sigma}, \dots, k_{m\sigma}$. Корню λ_σ и ненулевому решению алгебраических уравнений (2.7.6) при $\lambda = \lambda_\sigma$ ствеет частное решение дифференциальных уравнений (2.7.4)

$$x_{i\sigma} = k_{i\sigma} e^{\lambda_\sigma t} \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (2.7.7)$$

Если все корни характеристического многочлена простые, то общее решение уравнений (2.7.4) представляют следующим образом:

$$x_i = \sum_{\sigma=1}^m c_{i\sigma} k_{i\sigma} e^{\lambda_\sigma t} \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (2.7.8)$$

где $c_{i\sigma}$ ($\sigma = 1, 2, \dots, m$) – произвольные постоянные.

Устойчивость тривиального решения уравнений (2.7.4) определяется в зависимости от знаков вещественных частей корней характеристического многочлена. По методу "замороженных" коэффициентов знаки вещественных частей корней рассматриваются как критерий устойчивости и в том случае, когда коэффициенты уравнений являются переменными величинами.

Чтобы получить более точные критерии устойчивости тривиального решения уравнений (2.7.3), следя первому методу Ляпунова, нужно получить их решение, более точное, чем то, которым пользуются в методе "замороженных" коэффициентов.

Ниже рассматривается способ построения приближенного решения уравнений

(2.7.3) с учетом переменности коэффициентов уравнений. Этот способ основан на идеях асимптотического интегрирования дифференциальных уравнений с использованием понятия "медленного времени", введенного в математическую физику Н.М. Крыловым и Н.Н. Боголюбовым.

Вместо системы (2.7.3) рассмотрим систему

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^m u_{ij}(\tau)x_j \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (2.7.9)$$

где $\tau = \epsilon t$ – так называемое "медленное время"; ϵ – параметр.

При $\epsilon = 1$ системы (2.7.3) и (2.7.9) совпадают, поэтому если удается решить уравнения (2.7.9), то, полагая $\epsilon = 1$, получим решение и интересующей нас системы (2.7.3).

Частное решение уравнений (2.7.9) будем искать в виде

$$x_i(t, \epsilon) = \tilde{k}_i(\tau, \epsilon) e^{\int \tilde{\lambda}(\tau, \epsilon) dt} \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (2.7.10)$$

Подставляя (2.7.10) в (2.7.9), получим после сокращения на общий множитель $\exp \int \tilde{\lambda}(\tau, \epsilon) dt$

$$\sum_j u_{ij}(\tau) \tilde{k}_j(\tau, \epsilon) - \tilde{k}_i(\tau, \epsilon) \tilde{\lambda}(\tau, \epsilon) = \epsilon \frac{d\tilde{k}_i(\tau, \epsilon)}{d\tau} \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (2.7.11)$$

Функции $\tilde{k}_j(\tau, \epsilon)$ и $\tilde{\lambda}(\tau, \epsilon)$ определим так, чтобы равенства (2.7.11) тождественно выполнялись относительно параметра ϵ . Эти функции будем строить в форме рядов по степеням ϵ :

$$\begin{aligned} \tilde{k}_i(\tau, \epsilon) &= k_i(\tau) + \epsilon k_i^{[1]}(\tau) + \epsilon^2 k_i^{[2]}(\tau) + \dots \\ (i &= 1, 2, \dots, m); \end{aligned} \quad (2.7.12)$$

$$\tilde{\lambda}(\tau, \epsilon) = \lambda(\tau) + \epsilon \lambda^{[1]}(\tau) + \epsilon^2 \lambda^{[2]}(\tau) + \dots$$

Подставим (2.7.12) в (2.7.11):

$$\begin{aligned} \sum_j u_{ij}(k_j + \epsilon k_j^{[1]} + \epsilon^2 k_j^{[2]} + \dots) - (k_i + \epsilon k_i^{[1]} + \dots)(\lambda + \epsilon \lambda^{[1]} + \dots) &= \\ = \epsilon \left(\frac{dk_i}{d\tau} + \epsilon \frac{dk_i^{[1]}}{d\tau} + \epsilon^2 \frac{dk_i^{[2]}}{d\tau} + \dots \right) &\quad (i = 1, 2, \dots, m). \end{aligned} \quad (2.7.13)$$

В равенствах (2.7.13) приравняем члены, содержащие ϵ в одинаковых степенях. В результате получим следующие системы равенств:

$$\sum_j u_{ij}(\tau) k_j(\tau) - k_i(\tau) \lambda(\tau) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m); \quad (2.7.14)$$

$$\sum_j u_{ij}(\tau) k_j^{[1]}(\tau) - k_i^{[1]}(\tau) \lambda(\tau) = k_i(\tau) \lambda^{[1]}(\tau) + \frac{dk_i(\tau)}{d\tau} \quad (i = 1, 2, \dots, m); \quad (2.7.15)$$

$$\sum_j u_{ij}(\tau) k_j^{[2]}(\tau) - k_i^{[2]}(\tau) \lambda(\tau) = k_i(\tau) \lambda^{[2]}(\tau) + k_i^{[1]}(\tau) \lambda^{[1]}(\tau) + \frac{dk_i^{[1]}(\tau)}{d\tau}$$

$$(i = 1, 2, \dots, m);$$

.....

которым должны удовлетворять члены рядов (2.7.12).

Прежде чем приступить к решению полученных алгебраических систем, рассмотрим некоторые общие свойства систем линейных алгебраических уравнений.

Некоторые сведения из теории систем линейных алгебраических уравнений

Рассмотрим алгебраическую систему линейных неоднородных уравнений

$$\begin{aligned} (u_{11} - \lambda)k_1 + u_{12}k_2 + \dots + u_{1m}k_m &= f_1; \\ u_{21}k_1 + (u_{22} - \lambda)k_2 + \dots + u_{2m}k_m &= f_2; \\ \dots & \\ u_{m1}k_1 + u_{m2}k_2 + \dots + (u_{mm} - \lambda)k_m &= f_m \end{aligned} \quad (2.7.16)$$

и соответствующую ей однородную систему

$$\begin{aligned} (u_{11} - \lambda)k_1 + u_{12}k_2 + \dots + u_{1m}k_m &= 0; \\ u_{21}k_1 + (u_{22} - \lambda)k_2 + \dots + u_{2m}k_m &= 0; \\ \dots & \\ u_{m1}k_1 + u_{m2}k_2 + \dots + (u_{mm} - \lambda)k_m &= 0. \end{aligned} \quad (2.7.17)$$

Для того чтобы однородная система (2.7.17) имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель системы

$$\left| \begin{array}{cccc} u_{11} - \lambda & u_{12} & \dots & u_{1m} \\ u_{21} & u_{22} - \lambda & \dots & u_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{m1} & u_{m2} & \dots & u_{mm} - \lambda \end{array} \right| \quad (2.7.18)$$

был равен нулю. Определитель (2.7.18) в раскрытом виде представляет собой многочлен (характеристический многочлен) степени m , который имеет m корней: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ (u_{ij} – вещественные величины). Будем далее предполагать, что все эти корни различны.

Пусть λ_σ – один из корней характеристического многочлена. При $\lambda = \lambda_\sigma$, поскольку λ_σ – простой корень, ранг определителя (2.7.18) равен $m - 1$ поэтому система (2.7.17) имеет с точностью до произвольного ненулевого множителя единственное ненулевое решение. Это значит, что если

$$k_{1\sigma}, k_{2\sigma}, \dots, k_{m\sigma} \quad (2.7.19)$$

– ненулевое решение системы (2.7.17), то все другие решения этой системы имеют вид $c k_{1\sigma}, c k_{2\sigma}, \dots, c k_{m\sigma}$.

Решение (2.7.19) можно представить вектором K_σ с компонентами $k_{1\sigma}, k_{2\sigma}, \dots, k_{m\sigma}$. Имеющаяся свобода позволяет выбрать решение (2.7.19) таким образом, чтобы выполнялось условие

$$|K_\sigma| = 1. \quad (2.7.20)$$

Напомним, что модуль вектора A с компонентами a_1, \dots, a_m определяется как корень квадратный из скалярного произведения вектора A на самого себя:

$$|A| = \sqrt{(A, A)},$$

а скалярное произведение вектора **A** на вектор **B** с компонентами b_1, b_2, \dots, b_m , если компонентами векторов являются комплексные числа, представляется равенством

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sum_{j=1}^m a_j \bar{b}_j,$$

где \bar{b}_j – компоненты вектора **B**, комплексно сопряженные b_j .

Сопряженная однородная система

$$\begin{aligned} (u_{11} - \lambda) \mu_1 + u_{21} \mu_2 + \dots + u_{m1} \mu_m &= 0; \\ u_{12} \mu_1 + (u_{22} - \lambda) \mu_2 + \dots + u_{m2} \mu_m &= 0; \\ \dots & \\ u_{1m} \mu_1 + u_{2m} \mu_2 + \dots + (u_{mm} - \lambda) \mu_m &= 0 \end{aligned} \quad (2.7.21)$$

при $\lambda = \lambda_s$ (λ_s – корень характеристического многочлена) тоже имеет с точностью до произвольного ненулевого множителя единственное ненулевое решение

$$\mu_{s1}, \mu_{s2}, \dots, \mu_{sm}. \quad (2.7.22)$$

Между решениями однородной системы (2.7.17) и сопряженной системы (2.7.21) имеют место соотношения

$$\sum_{j=1}^m \mu_{sj} k_{j\sigma} \begin{cases} \neq 0 & (s = \sigma), \\ = 0 & (s \neq \sigma). \end{cases} \quad (2.7.23)$$

Это можно показать следующим путем.

Имеем две системы

$$\begin{aligned} (u_{11} - \lambda_\sigma) k_{1\sigma} + u_{12} k_{2\sigma} + \dots + u_{1m} k_{m\sigma} &= 0; \\ u_{21} k_{1\sigma} + (u_{22} - \lambda_\sigma) k_{2\sigma} + \dots + u_{2m} k_{m\sigma} &= 0; \\ \dots & \\ u_{m1} k_{1\sigma} + u_{m2} k_{2\sigma} + \dots + (u_{mm} - \lambda_\sigma) k_{m\sigma} &= 0 \end{aligned} \quad (2.7.24)$$

и

$$\begin{aligned} (u_{11} - \lambda_s) \mu_{s1} + u_{21} \mu_{s2} + \dots + u_{m1} \mu_{sm} &= 0; \\ u_{12} \mu_{s1} + (u_{22} - \lambda_s) \mu_{s2} + \dots + u_{m2} \mu_{sm} &= 0; \\ \dots & \\ u_{1m} \mu_{s1} + u_{2m} \mu_{s2} + \dots + (u_{mm} - \lambda_s) \mu_{sm} &= 0. \end{aligned} \quad (2.7.25)$$

Каждую строку в системе (2.7.24) умножим на μ_{si} , а в системе (2.7.25) – на $-k_{i\sigma}$ и результаты сложим. Получим

$$(\lambda_s - \lambda_\sigma) (\mu_{s1} k_{1\sigma} + \mu_{s2} k_{2\sigma} + \dots + \mu_{sm} k_{m\sigma}) = 0. \quad (2.7.26)$$

Отсюда непосредственно следуют соотношения (2.7.23).

Ненулевое решение (2.7.22) сопряженной системы (2.7.21) также определяется с точностью до произвольного ненулевого множителя, поэтому его всегда можно выбрать так, чтобы первое равенство (2.7.23) выполнялось следующим образом:

$$\sum_{j=1}^m \mu_{sj} k_{j\sigma} = 1. \quad (2.7.27)$$

В дальнейшем будем предполагать, что решения системы (2.7.17) и сопряженной системы (2.7.21) выбраны в соответствии с условиями (2.7.20) и (2.7.27).

Наконец, сформулируем одно условие разрешимости неоднородной системы (2.7.16).

Для того чтобы система линейных неоднородных уравнений (2.7.16) при $\lambda = \lambda_\sigma$ была разрешимой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\sum_{j=1}^m \mu_{\sigma j} f_j = 0, \quad (2.7.28)$$

где $\mu_{\sigma 1}, \mu_{\sigma 2}, \dots, \mu_{\sigma m}$ – любое решение сопряженной системы (2.7.21).

Докажем это. *Необходимость.* Предположим, что система (2.7.16) разрешима (совместна) и $\mu_{\sigma 1}, \mu_{\sigma 2}, \dots, \mu_{\sigma m}$ – какое-нибудь решение сопряженной системы. Равенства (2.7.16) сложим друг с другом, предварительно умножив каждое равенство на $\mu_{\sigma i}$:

$$\begin{aligned} & [(u_{11} - \lambda) \mu_{\sigma 1} + u_{21} \mu_{\sigma 2} + \dots + u_{m1} \mu_{\sigma m}] k_1 + [u_{12} \mu_{\sigma 1} + (u_{22} - \lambda) \mu_{\sigma 2} + \\ & + \dots + u_{m2} \mu_{\sigma m}] k_2 + \dots + [u_{1m} \mu_{\sigma 1} + u_{2m} \mu_{\sigma 2} + \dots + (u_{mm} - \lambda) \mu_{\sigma m}] \times \\ & \times k_m = \sum_{j=1}^m \mu_{\sigma j} f_j. \end{aligned}$$

При $\lambda = \lambda_\sigma$ все суммы, стоящие в квадратных скобках, обращаются в нуль, так как $\mu_{\sigma 1}, \mu_{\sigma 2}, \dots, \mu_{\sigma m}$ есть соответствующее корню λ_σ решение сопряженной однородной системы и, следовательно, $\sum_{j=1}^m \mu_{\sigma j} f_j = 0$.

Достаточность. Пусть условие (2.7.28) соблюдается. Докажем, что в этом случае система (2.7.16) совместна.

Согласно теореме Кронекера–Капелли система линейных уравнений (2.7.16) при $\lambda = \lambda_\sigma$ тогда и только тогда совместна, когда ранг матрицы

$$U = \begin{vmatrix} u_{11} - \lambda_\sigma & u_{12} & \dots & u_{1m} \\ u_{21} & u_{22} - \lambda_\sigma & \dots & u_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{m1} & u_{m2} & \dots & u_{mm} - \lambda_\sigma \end{vmatrix}$$

равен рангу расширенной матрицы

$$U_1 = \begin{vmatrix} u_{11} - \lambda_\sigma & u_{12} & \dots & u_{1m} & f_1 \\ u_{21} & u_{22} - \lambda_\sigma & \dots & u_{2m} & f_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{m1} & u_{m2} & \dots & u_{mm} - \lambda_\sigma & f_m \end{vmatrix}.$$

В рассматриваемом случае ранг матрицы U равен $m - 1$, так как λ_σ – простой корень характеристического многочлена. Покажем, что ранг расширенной матрицы U_1 тоже равен $m - 1$.

Без ущерба для общности допустим, что неравный нулю минор матрицы U занимает левый верхний угол. У этого минора в матрице U_1 имеются два окаймляющих минора; один из них – это определитель матрицы U , который равен нулю, а другой – определитель

$$\begin{vmatrix} u_{11} - \lambda_\sigma & u_{12} & u_{1m-1} & f_1 \\ u_{21} & u_{22} - \lambda_\sigma & u_{2m-1} & f_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{m1} & u_{m2} & u_{mm-1} - \lambda_\sigma & f_m \end{vmatrix}. \quad (2.7.29)$$

Определитель (2.7.29) тоже равен нулю. В самом деле, если строки этого определителя умножить соответственно на $\mu_{\sigma 1}, \mu_{\sigma 2}, \dots, \mu_{\sigma m}$ и затем их сложить, то в силу условия (2.7.28) в результате получим нуль, что означает линейную зависимость строк определителя. Отсюда следует, что определитель (2.7.29) равен нулю.

Итак, миноры матрицы U_1 , окаймляющие не равный нулю минор ранга $m-1$, равны нулю. Поэтому ранг матрицы U_1 равен $m-1$, т.е. равен рангу матрицы U . Значит, система (2.7.16) при $\lambda = \lambda_\sigma$ разрешима.

Рекуррентные соотношения

Вернемся к системам уравнений (2.7.14), (2.7.15) и т.д. Рассмотрим сначала систему (2.7.14). В развернутом виде эта система имеет вид равенства (2.7.17). Каждому корню λ_σ характеристического многочлена соответствует решение системы $k_{1\sigma}, k_{2\sigma}, \dots, k_{m\sigma}$, которое, будем считать, удовлетворяет условию (2.7.20). Так как коэффициенты u_{ij} зависят от времени, то корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ тоже являются функциями времени t . Далее будем предполагать, что на рассматриваемом промежутке времени все корни остаются простыми, т.е.

$$|\lambda_\sigma(t) - \lambda_s(t)| \geq c > 0 \quad (s \neq \sigma). \quad (2.7.30)$$

При $\lambda = \lambda_\sigma$ и $k_i = k_{i\sigma}$ равенство (2.7.14) выполняется тождественно, а остальные алгебраические системы (2.7.15) можно представить в виде

$$\sum_j u_{ij}(\tau) k_{j\sigma}^{[v]}(\tau) - k_{i\sigma}^{[v]}(\tau) \lambda_\sigma(\tau) = k_{i\sigma}(\tau) \lambda_\sigma^{[v]}(\tau) + g_i^{[v-1]}(\tau)$$

$$(i = 1, 2, \dots, m; \quad v = 1, 2, \dots), \quad (2.7.31)$$

$$\text{где } g_i^{[0]} = \frac{dk_{i\sigma}}{d\tau}; \quad g_i^{[1]} = k_{i\sigma}^{[1]} \lambda_\sigma^{[1]} + \frac{dk_{i\sigma}^{[1]}}{dt} \quad \text{и т.д.} \quad (2.7.32)$$

Допустим, что $k_{j\sigma}^{[1]}, \lambda_\sigma^{[1]}, \dots, k_{j\sigma}^{[v-1]}, \lambda_\sigma^{[v-1]}$ уже определены. Тогда $g_i^{[v-1]}$ является известной функцией, и величины следующего приближения $k_{j\sigma}^{[v]}$, $\lambda_\sigma^{[v]}$ могут быть определены из v -й системы (2.7.31) следующим образом.

Пусть

$$\mu_{s1}, \mu_{s2}, \dots, \mu_{sm} \quad (2.7.33)$$

есть решение однородной системы, сопряженной системе (2.7.17), при $\lambda = \lambda_s$, т.е. решение системы

$$\sum_j u_{ji} \mu_j - \mu_i \lambda_s = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (2.7.34)$$

Будем предполагать, что все решения вида (2.7.33), соответствующие корням $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ и удовлетворяющие, конечно, равенствам (2.7.23), выбраны из условия (2.7.27).

Условие разрешимости v -й линейной системы (2.7.31) имеет вид

$$\sum_{i=1}^m \mu_{si} (k_{i\sigma} \lambda_\sigma^{[v]} + g_i^{[v-1]}) = 0.$$

Отсюда, учитывая (2.7.27), находим

$$\lambda_{\sigma}^{[\nu]} = - \sum_{i=1}^m \mu_{\sigma i} g_i^{[\nu-1]}. \quad (2.7.35)$$

Для определения $k_{j\sigma}^{[\nu]}$ каждое i -е равенство ν -й системы (2.7.31) умножим на μ_{si} и результаты сложим:

$$\sum_i \mu_{si} \left(\sum_j u_{ij} k_{j\sigma}^{[\nu]} - k_{i\sigma}^{[\nu]} \lambda_{\sigma} \right) = \sum_i \mu_{si} (k_{i\sigma} \lambda_{\sigma}^{[\nu]} + g_i^{[\nu-1]}),$$

или, меняя порядок суммирования,

$$\sum_j k_{j\sigma}^{[\nu]} \sum_i u_{ij} \mu_{si} - \sum_i \mu_{si} k_{i\sigma}^{[\nu]} \lambda_{\sigma} = \sum_i \mu_{si} k_{i\sigma} \lambda_{\sigma}^{[\nu]} + \sum_i \mu_{si} g_i^{[\nu-1]}.$$

Отсюда, учитывая, что $\sum_i u_{ij} \mu_{si} = \lambda_{\sigma} \mu_{sj}$, получаем

$$\sum_i \mu_{si} k_{i\sigma}^{[\nu]} (\lambda_s - \lambda_{\sigma}) = \sum_i \mu_{si} k_{i\sigma} \lambda_{\sigma}^{[\nu]} + \sum_i \mu_{si} g_i^{[\nu-1]}. \quad (2.7.36)$$

При $s \neq \sigma$ $\sum_i \mu_{si} k_{i\sigma} = 0$, $\lambda_s \neq \lambda_{\sigma}$ и из (2.7.36) имеем

$$\sum_{i=1}^m \mu_{si} k_{i\sigma}^{[\nu]} = \frac{\sum_{i=1}^m \mu_{si} g_i^{[\nu-1]}}{\lambda_s - \lambda_{\sigma}} \quad (s \neq \sigma).$$

При $s = \sigma$ правая часть равенства (2.7.36) равна нулю в силу (2.7.35) и $\lambda_s = \lambda_{\sigma}$, так что можно принять

$$\sum_{i=1}^m \mu_{\sigma i} k_{i\sigma}^{[\nu]} = c_{\sigma}^{[\nu]},$$

где $c_{\sigma}^{[\nu]}$ – произвольная, нужное число раз дифференцируемая функция.

Итак, искомые величины $k_{i\sigma}^{[\nu]}$ удовлетворяют следующей системе алгебраических уравнений:

$$\sum_{i=1}^m \mu_{si} k_{i\sigma}^{[\nu]} = \begin{cases} b_{s\sigma}^{[\nu-1]} & (s \neq \sigma); \\ c_{\sigma}^{[\nu]} & (s = \sigma), \end{cases} \quad (2.7.37)$$

$$\text{где } b_{s\sigma}^{[\nu-1]} = \frac{1}{\lambda_s - \lambda_{\sigma}} \sum_{i=1}^m \mu_{si} g_i^{[\nu-1]}. \quad (2.7.38)$$

Определитель системы (2.7.37)

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \dots & \mu_{1m} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \dots & \mu_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{m1} & \mu_{m2} & \dots & \mu_{mm} \end{vmatrix}.$$

Как видим, строками этого определителя служат ненулевые решения системы (2.7.34) при $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. Так как все корни λ_i различны, то все m ненулевых решения системы (2.7.34) линейно независимы и, значит, определитель Δ отличен от нуля. Учитывая это, по правилу Крамера из (2.7.37) находим

$$k_{i\sigma}^{[\nu]} = \sum_{s \neq \sigma} \frac{\Delta_{si}}{\Delta} b_{s\sigma}^{[\nu-1]} + \frac{\Delta_{\sigma i}}{\Delta} c_{\sigma}^{[\nu]} \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

где Δ_{si} – алгебраическое дополнение элемента μ_{si} определителя Δ .

Можно показать, что $\Delta_{si}/\Delta = k_{is}$. Учитывая это, будем иметь

$$k_{i\sigma}^{[\nu]} = \sum_{s \neq \sigma} k_{is} b_{s\sigma}^{[\nu-1]} + k_{i\sigma} c_{\sigma}^{[\nu]} \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (2.7.39)$$

Свободу определения $k_{i\sigma}^{[\nu]}$ используем следующим образом.

Пусть \mathbf{K}_{σ} – вектор с компонентами $k_{1\sigma}, k_{2\sigma}, \dots, k_{m\sigma}$; $\mathbf{K}_{\sigma}^{[\nu]}$ – вектор с компонентами $k_{1\sigma}^{[\nu]}, k_{2\sigma}^{[\nu]}, \dots, k_{m\sigma}^{[\nu]}$; $\tilde{\mathbf{K}}_{\sigma}$ – вектор с компонентами $\tilde{k}_{1\sigma}, \tilde{k}_{2\sigma}, \dots, \tilde{k}_{m\sigma}$. Тогда m первых рядов (2.7.12) можно записать так:

$$\tilde{\mathbf{K}}_{\sigma}(\tau, \epsilon) = \mathbf{K}_{\sigma}(\tau) + \epsilon \mathbf{K}_{\sigma}^{[1]}(\tau) + \epsilon^2 \mathbf{K}_{\sigma}^{[2]}(\tau) + \dots \quad (2.7.40)$$

Члены этого ряда $\mathbf{K}_{\sigma}^{[\nu]}$ ($\nu = 1, 2, \dots$) в соответствии с (2.7.39) определяются по формуле

$$\mathbf{K}_{\sigma}^{[\nu]} = \sum_{s \neq \sigma} \mathbf{K}_s b_{s\sigma}^{[\nu-1]} + \mathbf{K}_{\sigma} c_{\sigma}^{[\nu]}. \quad (2.7.41)$$

Произвольные функции $c_{\sigma}^{[\nu]}$ ($\nu = 1, 2, \dots$) выбирают из условия равенства единице модуля вектора $\tilde{\mathbf{K}}_{\sigma}$. Квадрат модуля вектора $\tilde{\mathbf{K}}_{\sigma}$ равен:

$$\begin{aligned} |\tilde{\mathbf{K}}_{\sigma}|^2 &= (\tilde{\mathbf{K}}_{\sigma} \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{\sigma}) = (\mathbf{K}_{\sigma} \cdot \mathbf{K}_{\sigma}) + \epsilon [(\mathbf{K}_{\sigma} \cdot \mathbf{K}_{\sigma}^{[1]}) + (\mathbf{K}_{\sigma}^{[1]} \cdot \mathbf{K}_{\sigma})] + \\ &+ \epsilon^2 [(\mathbf{K}_{\sigma} \cdot \mathbf{K}_{\sigma}^{[2]}) + (\mathbf{K}_{\sigma}^{[1]} \cdot \mathbf{K}_{\sigma}^{[1]}) + (\mathbf{K}_{\sigma}^{[2]} \cdot \mathbf{K}_{\sigma})] + \epsilon^3 \dots \end{aligned} \quad (2.7.42)$$

В силу (2.7.20)

$$(\mathbf{K}_{\sigma} \cdot \mathbf{K}_{\sigma}) = 1. \quad (2.7.43)$$

Далее, учитывая (2.7.41) и (2.7.43), находим

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}_{\sigma} \cdot \mathbf{K}_{\sigma}^{[1]}) + (\mathbf{K}_{\sigma}^{[1]} \cdot \mathbf{K}_{\sigma}) &= (\mathbf{K}_{\sigma} \cdot \sum_{s \neq \sigma} \mathbf{K}_s b_{s\sigma}^{[0]} + \mathbf{K}_{\sigma} c_{\sigma}^{[1]}) + \\ &+ (\sum_{s \neq \sigma} \mathbf{K}_s b_{s\sigma}^{[0]} \cdot \mathbf{K}_{\sigma} + \mathbf{K}_{\sigma} c_{\sigma}^{[1]} \cdot \mathbf{K}_{\sigma}) = \sum_{s \neq \sigma} (\mathbf{K}_{\sigma} \cdot \mathbf{K}_s b_{s\sigma}^{[0]}) + \\ &+ \sum_{s \neq \sigma} (\mathbf{K}_s b_{s\sigma}^{[0]} \cdot \mathbf{K}_{\sigma}) + 2c_{\sigma}^{[1]}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что если принять

$$c_{\sigma}^{[1]} = -\frac{1}{2} \sum_{s \neq \sigma} [(\mathbf{K}_{\sigma} \cdot \mathbf{K}_s b_{s\sigma}^{[0]}) + (\mathbf{K}_s \cdot \mathbf{K}_{\sigma} b_{s\sigma}^{[0]})],$$

то слагаемое в (2.7.42), содержащее ϵ в первой степени, обратится в нуль.

Аналогичным способом можно выбрать $c_{\sigma}^{[2]}$ так, чтобы в уравнении (2.7.42)

обратилось в нуль слагаемое, содержащее ϵ^2 и т.д. Таким образом, при соответствующем выборе $c_\sigma^{[1]}, c_\sigma^{[2]}, c_\sigma^{[3]}, \dots$ будем иметь

$$|\tilde{\mathbf{K}}_\sigma| = 1. \quad (2.7.44)$$

Далее будем предполагать, что функции $c_\sigma^{[\nu]}$ выбраны согласно условию (2.7.44).

Полученные рекуррентные формулы (2.7.35) и (2.7.39) позволяют последовательно определять члены рядов (2.7.12) (и, следовательно, ряда (2.7.40)), посредством которых частное решение дифференциальных уравнений (2.7.9), соответствующее корню $\lambda_\sigma(\tau)$ характеристического многочлена, представляется в форме (2.7.10).

Каждому корню $\lambda_s(\tau)$ ($s = 1, 2, \dots, m$) соответствует частное решение такого вида.

Полагая в (2.7.12) $\epsilon = 1$, получим частные решения исходной системы (2.7.3)

$$x_{i\sigma}(t) = \tilde{k}_{i\sigma}(t) e^{\int \tilde{\lambda}_\sigma(t) dt} \quad (i = 1, 2, \dots, m; \sigma = 1, 2, \dots, m), \quad (2.7.45)$$

соответствующие корням $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_m(t)$ характеристического многочлена. Здесь

$$\tilde{k}_{i\sigma}(t) = \tilde{k}_{i\sigma}(\tau, \epsilon) |_{\epsilon=1}; \quad \tilde{\lambda}_\sigma(t) = \tilde{\lambda}_\sigma(\tau, \epsilon) |_{\epsilon=1}.$$

В векторной записи частные решения (2.7.45) имеют вид

$$\mathbf{X}_\sigma(t) = \tilde{\mathbf{K}}_\sigma(t) e^{\int \tilde{\lambda}_\sigma(t) dt} \quad (\sigma = 1, 2, \dots, m), \quad (2.7.46)$$

где \mathbf{X}_σ – вектор с компонентами $x_{1\sigma}, x_{2\sigma}, \dots, x_{m\sigma}$.

Полученные частные решения являются формальными решениями системы (2.7.3), так как не доказана сходимость рядов (2.7.12). Для практических целей в этом, однако, нет надобности, ибо трудоемкость расчетов резко возрастает с увеличением номера ν , и фактически может быть определено лишь некоторое число первых членов рядов (2.7.12).

Удерживая в рядах (2.7.12) конечное число первых членов, будем иметь приближенные решения уравнений (2.7.3). Расчеты показывают, что при рассмотрении уравнений возмущенного движения ракеты достаточно ограничиться лишь первыми двумя членами разложений (2.7.12). Учет последующих членов не вносит в результат существенной поправки.

2.7.2. КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

Исследуем поведение частных решений в окрестности фиксированного момента времени t_0 .

Модуль частного решения дифференциальных уравнений (2.7.3) равен:

$$|\mathbf{X}_\sigma| = \sqrt{(\mathbf{X}_\sigma \cdot \mathbf{X}_\sigma)} = \sqrt{(\tilde{\mathbf{K}}_\sigma \cdot \tilde{\mathbf{K}}_\sigma) e^{2 \operatorname{Re} \int \tilde{\lambda}_\sigma(t) dt}}.$$

или, учитывая (2.7.44),

$$|\mathbf{X}_\sigma| = e^{\int \operatorname{Re} \tilde{\lambda}_\sigma(t) dt} \quad (2.7.47)$$

Дифференцируя (2.7.47), получим

$$\frac{d |\mathbf{X}_\sigma|}{dt} = \operatorname{Re} \tilde{\lambda}_\sigma(t) e^{\int \operatorname{Re} \tilde{\lambda}_\sigma(t) dt} \quad (2.7.48)$$

Пусть $\operatorname{Re} \tilde{\lambda}_\sigma(t_0) < 0$. Тогда вследствие непрерывности решения неравенство $\tilde{\lambda}_\sigma(t) < 0$ соблюдается и в пределах некоторого конечного промежутка времени. Согласно (2.7.48) на этом промежутке модуль частного решения X_σ является убывающей функцией.

Если $\operatorname{Re} \tilde{\lambda}_\sigma(t_0) > 0$, то по крайней мере в достаточно малой окрестности точки t_0 , X_σ есть возрастающая по модулю функция.

Отсюда вытекают следующие условия устойчивости и неустойчивости невозмущенного движения (тривиального решения уравнения (2.7.3)).

Если все функции $\tilde{\lambda}_\sigma(t)$ удовлетворяют неравенствам

$$\operatorname{Re} \tilde{\lambda}_\sigma(t_0) < 0 \quad (\sigma = 1, 2, \dots, m), \quad (2.7.49)$$

то невозмущенное движение (тривиальное решение уравнений (2.7.3)) обладает устойчивостью на конечном промежутке времени $[t_0, t_0 + \Delta t]$; если же среди функций $\tilde{\lambda}_\sigma$ имеется хотя бы одна функция $\tilde{\lambda}_i(t)$, такая, что $\operatorname{Re} \tilde{\lambda}_i(t_0) > 0$, то невозмущенное движение неустойчиво ($\Delta t = 0$).

Подставим значения функций $\tilde{\lambda}_\sigma$ в (2.7.49). Тогда условие устойчивости записывается следующим образом:

$$\operatorname{Re}(\lambda_\sigma + \lambda_\sigma^{[1]} + \lambda_\sigma^{[2]} + \dots) < 0 \quad (\sigma = 1, 2, \dots, m). \quad (2.7.50)$$

Удерживая в левых частях неравенств (2.7.50) только первые члены, получим критерий устойчивости в простейшем виде, совпадающий с критерием устойчивости по методу "замороженных" коэффициентов:

$$\operatorname{Re} \lambda_\sigma < 0 \quad (\sigma = 1, 2, \dots, m). \quad (2.7.51)$$

Сохраняя два первых члена в разложении λ_σ , получим уточненный критерий устойчивости, учитывающий уже переменность коэффициентов уравнений:

$$\operatorname{Re}(\lambda_\sigma + \lambda_\sigma^{[1]}) < 0 \quad (\sigma = 1, 2, \dots, m).$$

Подставив сюда значения $\lambda_\sigma^{[1]}$, будем иметь

$$\operatorname{Re}(\lambda_\sigma - \sum_{i=1}^m \mu_{\sigma i} \frac{dk_{i\sigma}}{dt}) < 0 \quad (\sigma = 1, 2, \dots, m). \quad (2.7.52)$$

Следующее приближение дает

$$\operatorname{Re}(\lambda_\sigma + \lambda_\sigma^{[1]} + \lambda_\sigma^{[2]}) < 0 \quad \text{и т.д.}$$

2.7.3. О ПРИМЕНИМОСТИ ПРИБЛИЖЕННЫХ КРИТЕРИЕВ УСТОЙЧИВОСТИ

Устойчивость и неустойчивость невозмущенного движения, как было показано выше, определяются в зависимости от знаков функций

$$\operatorname{Re}(\lambda_\sigma + \lambda_\sigma^{[1]} + \dots + \lambda_\sigma^{[l]}) \quad (\sigma = 1, 2, \dots, m). \quad (2.7.53)$$

Трудоемкость расчета членов ряда

$$\lambda_\sigma + \lambda_\sigma^{[1]} + \lambda_\sigma^{[2]} + \dots \quad (2.7.54)$$

с увеличением порядкового номера резко возрастает, поэтому приведенными критериями устойчивости удобно пользоваться при небольших l . Поскольку эти критерии

не являются точными, то в тех случаях, когда среди функций (2.7.53) имеются очень близкие к нулю, приближенные критерии устойчивости становятся недостоверными. Поэтому важно, с одной стороны, правильно определить число l , а с другой – оценить достоверность приближенных критериев устойчивости при выбранном l . Страгое решение этих вопросов очень трудно. Можно рекомендовать следующий практический способ выбора l и оценки достоверности приближенных критериев устойчивости. Будем считать, что число l выбрано правильно, а соответствующий критерий устойчивости обладает достаточной достоверностью, если в качестве l выбрано наименьшее целое положительное число или 0, при котором

$$\frac{|\operatorname{Re} \lambda_{\sigma}^{[l+1]}(t_0)|}{|\operatorname{Re} [\lambda_{\sigma}(t_0) + \lambda_{\sigma}^{[1]}(t_0) + \dots + \lambda_{\sigma}^{[l]}(t_0)]|} \ll 1 \quad (\sigma = 1, 2, \dots, m). \quad (2.7.55)$$

Усиленное неравенство означает, что левая часть его по крайней мере на один порядок меньше правой.

Условием (2.7.55) можно пользоваться, в частности, для оценки применимости метода "замороженных" коэффициентов. Так, при выполнении неравенств

$$\frac{|\operatorname{Re} \lambda_{\sigma}^{[1]}(t_0)|}{|\operatorname{Re} \lambda_{\sigma}(t_0)|} \ll 1 \quad (\sigma = 1, 2, \dots, m) \quad (2.7.56)$$

приближенное условие устойчивости будет иметь вид

$$\operatorname{Re} \lambda_{\sigma} < 0 \quad (\sigma = 1, 2, \dots, m), \quad (2.7.57)$$

что в точности совпадает с условием устойчивости по методу "замороженных" коэффициентов. Невыполнение условия (2.7.56) хотя бы при одном σ означает, что метод "замороженных" коэффициентов применять нельзя.

Критерии устойчивости, установленные выше, справедливы при условии, что все корни характеристического многочлена простые. При наличии равных корней эти критерии неприменимы, так как в этом случае рекуррентные соотношения для $K_{\sigma}^{[k]}$ и $\lambda_{\sigma}^{[k]}$ теряют смысл.

В заключение – несколько слов о влиянии переменности коэффициентов уравнений на устойчивость движения системы.

Анализируя соотношения, определяющие $\lambda_{\sigma}^{[1]}, \lambda_{\sigma}^{[2]}, \dots$, можно ожидать, что влияние переменности коэффициентов уравнений возмущенного движения, вообще говоря, будет больше не тех участках траектории, где производные $dk_{j\sigma}/dt$ велики, т.е. где происходит резкое изменение компонент векторов K_{σ} , составленных из решений системы (2.7.14). В свою очередь, резкое изменение компонент этих векторов можно ожидать там, где происходит сближение корней характеристического многочлена друг с другом. На тех участках траектории, где среди корней характеристического многочлена нет близких, влияние переменности коэффициентов на характер движения объекта мало и поэтому может оказаться достаточным исследование устойчивости в рамках метода "замороженных" коэффициентов, если, конечно, промежуток времени, в пределах которого рассматривается движение системы, не слишком велик: за большой промежуток времени, даже при малом эффекте от переменности коэффициентов, амплитуда колебаний может возрасти до недопустимо больших значений.

§ 2.8. ЭФФЕКТИВНОСТЬ И ПРЕДЕЛЬНО ДОПУСТИМЫЕ ОТКЛОНЕНИЯ ОРГАНОВ УПРАВЛЕНИЯ

Эффективность и предельно допустимые отклонения являются основными показателями органов управления.

Эффективность органов управления характеризуется отношением управляющего момента, возникающего при единичном их отклонении, к соответствующему моменту инерции летательного аппарата. Так, эффективность органов управления тангажом определяется динамическим коэффициентом $c_{\vartheta\delta}/J_z$; эффективность органов управления рысканием – коэффициентом $c_{\psi\delta}/J_y$; эффективность органов управления креном – коэффициентом $c_{\gamma\delta}/J_x$.

Эффективность и предельно допустимые отклонения органов управления определяют максимальные управляющие моменты, которые могут быть созданы органами управления. Максимальные моменты, создаваемые органами управления тангажом, рысканием и креном, отнесенные к соответствующим моментам инерции ракеты, равны:

$$\frac{c_{\vartheta\delta}}{J_z} \delta_{\vartheta \max}, \quad \frac{c_{\psi\delta}}{J_y} \delta_{\psi \max}, \quad \frac{c_{\gamma\delta}}{J_x} \delta_{\gamma \max},$$

где $\delta_{\vartheta \max}$, $\delta_{\psi \max}$, $\delta_{\gamma \max}$ – соответственно предельно допустимые отклонения органов управления тангажом, рысканием и креном.

Требования к эффективности и предельным отклонениям органов управления вырабатываются при формировании системы управления ракеты в зависимости от функций, выполняемых этими системами, и условий их работы. Требования эти обычно могут быть удовлетворены при различных комбинациях эффективности и предельных отклонений органов управления, и задача конструктора – определить оптимальное соотношение между этими характеристиками. При прочих равных условиях эффективность органов управления прямо пропорциональна площади воздушных и газовых рулей, тяге двигателей, используемых для создания управляющего момента, и т.п. Поэтому естественное стремление конструктора к уменьшению массы вызывает тенденцию к снижению эффективности органов управления. Однако уменьшение размеров и массы органа управления не обязательно приводит к уменьшению массы всей ракеты. Необходимость увеличения предельно допустимого отклонения органа управления в связи с уменьшением его эффективности в итоге может привести к увеличению массы всей ракеты, так как при больших отклонениях органов управления происходит уменьшение их эффективности, увеличение аэродинамического сопротивления воздушных рулей и потеря тяги поворотных двигателей, используемых для создания управляющих моментов. Кроме того, увеличение предельных отклонений органов управления может оказаться затруднительным по различным конструктивным соображениям.

Таким образом, задачи определения потребной эффективности и предельных отклонений органов управления находятся в тесной взаимосвязи и должны решаться совместно для отыскания оптимальных решений.

Эти задачи удобно решать путем сравнения нескольких вариантов, отличающихся значениями предельных отклонений органов управления. Расчет каждого варианта в отдельности сводится к определению потребной

эффективности органов управления при заданных значениях предельных отклонений и условии, что аппарат обладает необходимыми динамическими качествами. Например, при воздействии на аппарат в полете различных возмущающих факторов возмущения параметров движения в конце активного участка траектории не выходят за определенные пределы. В такой постановке для определения потребной эффективности органов управления необходимо знать, как изменяются параметры возмущенного движения аппарата при наличии ограничений на отклонения органов управления, т.е. при условии, что

$$|\delta'(t)| \leq \delta_{\max}. \quad (2.8.1)$$

Таким образом, выбор основных параметров органов управления (эффективности и предельных отклонений) связан с определением возмущений параметров движения ракеты при условии (2.8.1). Для определения же возмущений параметров движения необходимо проинтегрировать уравнения возмущенного движения совместно с принятым законом управления.

Условие (2.8.1) может быть несколько упрощено. Учитывая, что

$$\delta'(t) = \delta(t) + \Delta\delta(t),$$

где $\delta(t)$ — отклонение органа управления, потребное для полета по программной траектории, согласно (2.8.1) имеем

$$|\delta(t) + \Delta\delta(t)| = \delta_{\max}. \quad (2.8.2)$$

Баллистическая ракета является маломаневренным летательным аппаратом, и потребные отклонения органов управления при полете по программной траектории малы. Поэтому условие (2.8.2), которое должно удовлетворяться на всех участках управляемого полета, можно заменить приближенным условием

$$|\Delta\delta(t)| \leq \delta_{\max}. \quad (2.8.3)$$

2.8.1. ЭФФЕКТИВНОСТЬ ОРГАНОВ УПРАВЛЕНИЯ ТАНГАЖОМ И РЫСКАНИЕМ

Возмущенное движение ракеты в плоскостях тангажа и рыскания описывается подобными уравнениями, поэтому исследование эффективности и выбор рациональных параметров органов управления тангажом и рысканием могут быть проведены одинаковыми методами. Учитывая это, ограничимся здесь рассмотрением только движения по рысканию.

Возмущенное движение ракеты по рысканию описывается системой уравнений (1.13.9). Закон управления в достаточно общем случае имеет вид

$$\begin{aligned} T_2^2 \frac{d^2 \Delta\delta_\psi}{dt^2} + T_1 \frac{d\Delta\delta_\psi}{dt} + \Delta\delta_\psi &= k\Delta\psi + k_1 \frac{d\Delta\psi}{dt} - \\ - k_{V_z} \Delta V_z - k_z \Delta z. & \end{aligned} \quad (2.8.4)$$

Таким образом, замкнутую систему уравнений возмущенного движения ракеты по рысканию можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 m \frac{d\Delta V_z}{dt} + v_z \frac{d\Delta\psi}{dt} + c_{zz}\Delta V_z + c_{z\psi}\Delta\psi &= c_{z\delta}\Delta\delta_\psi + \Delta F_z; \\
 J_y \frac{d^2\Delta\psi}{dt^2} + \mu_y \frac{d\Delta\psi}{dt} + c_{\psi z}\Delta V_z + c_{\psi\psi}\Delta\psi &= c_{\psi\delta}\Delta\delta_\psi + \Delta M_y; \\
 k_1 \frac{d\Delta\psi}{dt} - k_{V_z}\Delta V_z + k\Delta\psi - k_z\Delta z &= T_2^2 \frac{d^2\Delta\delta_\psi}{dt^2} + \\
 + T_1 \frac{d\Delta\delta_\psi}{dt} + \Delta\delta_\psi; \\
 \frac{d\Delta z}{dt} &= \Delta V_z.
 \end{aligned} \tag{2.8.5}$$

Неизвестными функциями являются $\Delta z(t)$, $\Delta V_z(t)$, $\Delta\psi(t)$ и $\Delta\delta_\psi(t)$. Для того чтобы судить об эффективности органов управления ракеты, надо знать, как изменяются эти функции на траектории при заданных начальных значениях и воздействии на ракету всевозможных возмущающих факторов.

Таким образом, задача исследования управляемости ракеты по рысканию приводит к необходимости интегрирования системы уравнений (2.8.5) при заданных начальных условиях

$$\begin{aligned}
 \Delta z(t_0) = \Delta z_0, \quad \left. \frac{d\Delta z}{dt} \right|_{t=t_0} &= \Delta V_{z0}, \quad \Delta\psi(t_0) = \Delta\psi_0; \\
 \left. \frac{d\Delta\psi}{dt} \right|_{t=t_0} &= \dot{\Delta\psi}_0, \quad \Delta\delta_\psi(t_0) = \Delta\delta_{\psi_0}, \quad \left. \frac{d\Delta\delta_\psi}{dt} \right|_{t=t_0} = \dot{\Delta\delta}_{\psi_0}
 \end{aligned} \tag{2.8.6}$$

и ограничении

$$|\Delta\delta_\psi(t)| \leq \delta_{\psi \max}. \tag{2.8.7}$$

Ограничение отклонений органов управления вводит в задачу нелинейность. Это затруднение можно преодолеть следующим путем.

Допустим, что $\Delta\delta_\psi = \Delta\delta_\psi(t)$ есть решение системы (2.8.5) при начальных условиях (2.8.6) без учета ограничения (2.8.7). Это решение начинает с начального момента t_0 остается справедливым и при ограничении (2.8.7), пока $|\Delta\delta_\psi(t)| < \delta_{\psi \max}$ или $|\Delta\delta_\psi(t)| = \delta_{\psi \max}$ (в последнем случае, если $|\Delta\delta_\psi(t)|$ – невозрастающая функция).

Пусть в некоторый момент времени t_1 отклонение органа управления достигает предельного значения и при этом $|\Delta\delta_\psi(t)|$ – возрастающая функция.

Тогда начиная с этого момента возмущенное движение ракеты будет описываться другими уравнениями, а именно:

$$\begin{aligned} m \frac{d\Delta V_z}{dt} + v_z \frac{d\Delta\psi}{dt} + c_{zz}\Delta V_z + c_{z\psi}\Delta\psi &= \pm c_{z\delta}\delta_{\psi \max} + \Delta F_z; \\ J_y \frac{d^2\Delta\psi}{dt^2} + \mu_y \frac{d\Delta\psi}{dt} + c_{\psi z}\Delta V_z + c_{\psi\psi}\Delta\psi &= \pm c_{\psi\delta}\delta_{\psi \max} + \Delta M_y; \\ \frac{d\Delta z}{dt} &= \Delta V_z \end{aligned} \quad (2.8.8)$$

при начальных условиях

$$\begin{aligned} \Delta z(t_1) &= \Delta z_1, \quad \left. \frac{d\Delta z}{dt} \right|_{t=t_1} = \Delta V_{z1}; \\ \Delta\psi(t_1) &= \Delta\psi_1, \quad \left. \frac{d\Delta\psi}{dt} \right|_{t=t_1} = \Delta\dot{\psi}_1, \end{aligned}$$

где Δz_1 , ΔV_{z1} , $\Delta\psi_1$, $\Delta\dot{\psi}_1$ – значения в момент времени t_1 соответствующих функций, являющихся решением системы (2.8.5) при начальных условиях (2.8.6). Перед коэффициентами $c_{z\delta}$ и $c_{\psi\delta}$ следует принять знак “+”, если $\Delta\delta_{\psi}(t_1) > 0$, и “–”, если $\Delta\delta_{\psi}(t_1) < 0$.

Система (2.8.8) описывает возмущенное движение ракеты вплоть до момента времени t_2 , когда

$$|k\Delta\psi + k_1\Delta\dot{\psi} - k_{V_z}\Delta V_z - k_z\Delta z| = \delta_{\psi \max}, \quad (2.8.9)$$

причем левая часть равенства (2.8.9) в момент t_2 – убывающая функция.

Начиная с момента времени t_2 возмущенное движение вновь описывается системой (2.8.5) и т.д.

Таким образом, искомые величины $\Delta z(t)$, $\Delta V_z(t)$, $\Delta\psi(t)$ можно получить как решения систем (2.8.5) и (2.8.8), “сшитые” друг с другом в граничных точках t_1 , t_2 ,

Допустим, что из тех или иных соображений заданы предельно допустимые значения возмущений Δz , ΔV_z , $\Delta\psi$, $\Delta\dot{\psi}$ (или на всей траектории, или на отдельных участках ее). Тогда, решая системы уравнений возмущенного движения при различных фиксированных значениях параметров органов управления, можно выбрать их рациональные значения при условии, что ограничения, накладываемые на параметры движения, не нарушаются.

Уравнения следует интегрировать раздельно, предполагая каждый раз, что на аппарат действуют возмущающие силы и моменты, связанные с одним из возмущающих факторов. Действие всевозможных возмущений можно суммировать по среднеквадратичному закону, если предположить, что эти возмущения независимы и каждое из них подчиняется нормальному

му закону распределения. Пусть, например, x_1, \dots, x_n – значения параметра движения x при воздействии n независимых возмущений. Тогда параметры органов управления должны выбираться из условия

$$\sqrt{\sum_i x_i^2} \leq \bar{x},$$

где \bar{x} – предельно допустимое значение параметра движения.

Основными возмущениями, влияющими на выбор эффективности органов управления, являются ветер и возмущения от двигательной установки.

Системы уравнений (2.8.5) и (2.8.8) в общем случае могут быть проинтегрированы численным методом. При некоторых дополнительных упрощениях возможно построение решений этих систем в квадратурах.

Допустим, что начиная с момента времени t_0 на аппарат действуют постоянные возмущающие силы ($\Delta F_z = \text{const}$, $\Delta M_y = \text{const}$) и что возмущенное движение описывается дифференциальными уравнениями, коэффициенты которых также постоянны. В момент времени t_0 начинается переходный процесс, в начале которого происходит быстрое изменение угловых параметров движения. Если ракета устойчива, то вскоре угловые параметры принимают значения, равные или, точнее, близкие к их значениям в установившемся режиме. В дальнейшем эти параметры остаются постоянными или же, медленно изменяясь, асимптотически приближаются к установившимся значениям величин, так что их производные близки к нулю. Поэтому возмущенное движение аппарата после окончания этапа быстрого изменения угловых параметров приближенно можно описать уравнениями, которые получаются из исходных уравнений возмущенного движения, если в последних пренебречь производными от угловых величин.

Если возмущающие силы и коэффициенты уравнений изменяются медленно, то после первого этапа возмущенного движения, когда происходит быстрое изменение угловых параметров движения, наступает некоторый квазистатический режим полета, в котором угловые величины изменяются, но медленно, поэтому и в этом случае производные угловых параметров остаются малыми величинами. Учитывая это, уравнения возмущенного движения можно упростить, отбросив производные угловых параметров движения и производные углов отклонения органов управления.

Уравнения, описывающие первый этап возмущенного движения, также можно значительно упростить. Если ракета устойчива, то первый этап возмущенного движения заканчивается относительно быстро и за это время динамические коэффициенты уравнений изменяются мало. Поэтому при анализе эффективности органов управления на первом этапе возмущенного движения, которое начинается в результате воздействия по ступенчатому закону возмущающих сил или кратковременного воздействия возмущений (например, при разделении ступеней и т.д.), переменностью коэффициентов можно пренебречь. Тогда задача сводится к интегрированию ли-

нейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, что уже не представляет труда.

На первом этапе возмущенного движения быстро изменяются угловые параметры, а скорость ΔV_z и координата Δz изменяются незначительно. Поэтому уравнения (2.8.5) можно еще упростить, отбросив первое и четвертое уравнения и пренебрегая влиянием возмущений ΔV_z , Δz на вращательное движение ракеты вокруг центра масс.

Итак, в тех случаях, когда рассматриваемое возмущенное движение устойчивой ракеты имеет квазистатический характер, уравнения возмущенного движения можно упростить, отбросив члены, содержащие производные угловых величин; при анализе же процессов на первом этапе возмущенного движения, которое наступает в результате воздействия различных возмущений, можно пользоваться приемом "замораживания" коэффициентов, а также пренебречь влиянием возмущений ΔV_z , Δz на вращательное движение ракеты.

Интегрирование уравнений при медленном изменении возмущающего воздействия и отсутствии регулирования движения центра масс ($k_z = k_{V_z} = 0$)

Отбрасывая в уравнениях (2.8.5) производные угловых величин и учитывая, что в данном случае $k_z = k_{V_z} = 0$, получим следующую систему уравнений, приближенно описывающую возмущенное движение ракеты в квазистатическом режиме:

$$\begin{aligned} m \frac{d\Delta V_z}{dt} + c_{zz} \Delta V_z + c_{z\psi} \Delta \psi &= c_{z\delta} \Delta \delta_\psi + \Delta F_z; \\ c_{\psi z} \Delta V_z + c_{\psi\psi} \Delta \psi &= c_{\psi\delta} \Delta \delta_\psi + \Delta M_y; \\ k \Delta \psi &= \Delta \delta_\psi. \end{aligned} \quad (2.8.10)$$

В случае, когда рули занимают предельные положения, имеем

$$\begin{aligned} m \frac{d\Delta V_z}{dt} + c_{zz} \Delta V_z + c_{z\psi} \Delta \psi &= \pm c_{z\delta} \delta_{\psi \max} + \Delta F_z; \\ c_{\psi z} \Delta V_z + c_{\psi\psi} \Delta \psi &= \pm c_{\psi\delta} \delta_{\psi \max} + \Delta M_y. \end{aligned} \quad (2.8.11)$$

Система (2.8.11) действует до того момента времени, когда впервые (после того как рули стали на упоры) одновременно выполняются соотношения

$$|k \Delta \psi| = \delta_{\psi \max}, \quad \frac{d^l}{dt^l} |k \Delta \psi| < 0. \quad (2.8.12)$$

Здесь l обозначает наименьший порядок не равной нулю производной от $|k \Delta \psi|$.

Рассмотрим сначала систему (2.8.10).

Предполагая, что $c_{\psi\psi} - k c_{\psi\delta} \neq 0$, из второго и третьего уравнений находим

$$\Delta \psi = \frac{1}{c_{\psi\psi} - k c_{\psi\delta}} (\Delta M_y - c_{\psi z} \Delta V_z); \quad (2.8.13)$$

$$\Delta \delta_{\psi} = \frac{1}{c_{\psi\psi} - kc_{\psi\delta}} (\Delta M_y - c_{\psi z} \Delta V_z). \quad (2.8.14)$$

Подставив значения $\Delta \psi$ и $\Delta \delta_{\psi}$ в первое уравнение системы (2.8.10), получим

$$\frac{d \Delta V_z}{dt} + P(t) \Delta V_z = Q(t), \quad (2.8.15)$$

$$\text{где } P = \frac{1}{m} (c_{zz} + \frac{kc_{\psi z} c_{z\delta} - c_{z\psi} c_{\psi z}}{c_{\psi\psi} - kc_{\psi\delta}});$$

$$Q = \frac{1}{m} (\Delta F_z + \frac{kc_{z\delta} - c_{z\psi}}{c_{\psi\psi} - kc_{\psi\delta}}). \quad (2.8.16)$$

Общее решение линейного дифференциального уравнения (2.8.15) имеет вид

$$\Delta V_z = e^{\int_{t_0}^t P dt} (c + \int_{t_0}^t Q e^{\int_{t_0}^{t'} P dt'} dt'). \quad (2.8.17)$$

Произвольная постоянная c определяется начальным значением ΔV_z . Полагая в (2.8.17) $t = t_0$, получим

$$\Delta V_z(t_0) = \Delta V_{z_0} = c.$$

Итак,

$$\Delta V_z = e^{\int_{t_0}^t P dt} (\Delta V_{z_0} + \int_{t_0}^t Q e^{\int_{t_0}^{t'} P dt'} dt'). \quad (2.8.18)$$

Формулы (2.8.13) и (2.8.14) вместе с выражением (2.8.18) представляют решение системы (2.8.10).

Тем же путем можно определить параметры движения ΔV_z и $\Delta \psi$ в случае, когда органы управления занимают предельные положения.

Из второго уравнения системы (2.8.11) имеем

$$\Delta \psi = \frac{1}{c_{\psi\psi}} (\Delta M_y \pm c_{\psi\delta} \delta_{\psi \max} - c_{\psi z} \Delta V_z). \quad (2.8.19)$$

Подставляя (2.8.19) в первое уравнение системы (2.8.11), снова получим линейные дифференциальные уравнения вида (2.8.15), где

$$P = \frac{1}{m} (c_{zz} - \frac{c_{z\psi} c_{\psi z}}{c_{\psi\psi}}); \quad (2.8.20)$$

$$Q = \frac{1}{m} [\Delta F_z \pm (c_{z\delta} - \frac{c_{z\psi}}{c_{\psi\psi}}) \delta_{\psi \max} - \frac{c_{z\psi}}{c_{\psi\psi}} \Delta M_y].$$

Учет регулирования скорости центра масс ($k_z = 0, k_{V_z} \neq 0$)

Из (2.8.5) в этом случае вытекают приближенные уравнения, описывающие движение ракеты в квазистатическом режиме:

$$m \frac{d\Delta V_z}{dt} + c_{zz}\Delta V_z + c_{z\psi}\Delta\psi = c_{z\delta}\Delta\delta_\psi + \Delta F_z;$$

$$c_{\psi z}\Delta V_z + c_{\psi\psi}\Delta\psi = c_{\psi\delta}\Delta\delta_\psi + \Delta M_y;$$

$$-k_{V_z}\Delta V_z + k\Delta\psi = \Delta\delta_\psi.$$
(2.8.21)

Эта система также приводится к линейному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{d\Delta V_z}{dt} + P\Delta V_z = Q,$$
(2.8.22)

где $P = \frac{1}{m} [c_{zz} +$

$$+ \frac{k c_{\psi z} c_{z\delta} - k_{V_z} (c_{z\psi} c_{\psi\delta} + c_{\psi\psi} c_{z\delta}) - c_{z\psi} c_{\psi z}}{c_{\psi\psi} - k c_{\psi\delta}}];$$

$$Q = \frac{1}{m} (\Delta F_z + \frac{k c_{z\delta} - c_{z\psi}}{c_{\psi\psi} - k c_{\psi\delta}} \Delta M_y).$$
(2.8.23)

Отклонения $\Delta\psi$ и $\Delta\delta_\psi$ определяют по формулам

$$\Delta\psi = \frac{1}{c_{\psi\psi} - k c_{\psi\delta}} [\Delta M_y - (c_{\psi z} + k_{V_z} c_{\psi\delta}) \Delta V_z];$$
(2.8.24)

$$\Delta\delta_\psi = \frac{1}{c_{\psi\psi} - k c_{\psi\delta}} [k \Delta M_y - (k c_{\psi z} + k_{V_z} c_{\psi\psi}) \Delta V_z],$$
(2.8.25)

которые следуют из второго и третьего уравнений системы (3.8.21).

Учет регулирования скорости и бокового смещения центра масс

Квазистатический режим возмущенного движения в этом случае описывается уравнениями

$$m \frac{d\Delta V_z}{dt} + c_{zz}\Delta V_z + c_{z\psi}\Delta\psi = c_{z\delta}\Delta\delta_\psi + \Delta F_z;$$

$$c_{\psi z}\Delta V_z + c_{\psi\psi}\Delta\psi = c_{\psi\delta}\Delta\delta_\psi + \Delta M_y;$$

$$-k_z\Delta z - k_{V_z}\Delta V_z + k\Delta\psi = \Delta\delta_\psi;$$

$$\frac{d\Delta z}{dt} = \Delta V_z.$$
(2.8.26)

Из второго и третьего уравнений имеем

$$\Delta\psi = \frac{1}{c_{\psi\psi} - k c_{\psi\delta}} [\Delta M_y - (c_{\psi z} + c_{\psi\delta} k_{V_z}) \Delta V_z - k_z c_{\psi\delta} \Delta z];$$
(2.8.27)

$$\Delta\delta_\psi = \frac{1}{c_{\psi\psi} - k c_{\psi\delta}} [k \Delta M_y - (k c_{\psi z} + k_{V_z} c_{\psi\psi}) \Delta V_z - k_z c_{\psi\psi} \Delta z].$$
(2.8.28)

Подставив значения $\Delta\psi$ и $\Delta\delta_\psi$ в первое уравнение системы (2.8.26), получим

$$\frac{d\Delta V_z}{dt} + P(t)\Delta V_z + R(t)\Delta z = Q(t), \quad (2.8.29)$$

где P и Q определяются формулами (2.8.23), а

$$R = \frac{k_z c_\psi \psi c_{z\delta}}{m(c_{\psi\psi} - k c_{\psi\delta})}. \quad (2.8.30)$$

Учитывая четвертое уравнение системы (2.8.26), будем иметь

$$\frac{d^2 \Delta z}{dt^2} + P(t) \frac{d\Delta z}{dt} + R(t)\Delta z = Q(t). \quad (2.8.31)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае задача сводится к решению уравнения (2.8.31) при начальных условиях

$$\Delta z(t_0) = \Delta z_0; \quad \Delta V_z(t_0) = \Delta V_{z0}. \quad (2.8.32)$$

Это уравнение может быть проинтегрировано численным методом. Определив Δz и затем ΔV_z , можно рассчитать $\Delta\psi$ и $\Delta\delta_\psi$ по формулам (2.8.27) и (2.8.28).

Интегрирование уравнений на первом этапе возмущенного движения

Как уже говорилось, при исследовании эффективности органов управления на первом этапе возмущенного движения можно пренебречь переменностью коэффициентов уравнений, а также влиянием возмущений ΔV_z и Δz на вращательное движение ракеты. При этом система уравнений (2.8.5) принимает вид

$$\begin{aligned} J_y \frac{d^2 \Delta\psi}{dt^2} + \mu_y \frac{d\Delta\psi}{dt} + c_{\psi\psi} \Delta\psi - c_{\psi\delta} \Delta\delta_\psi &= \Delta M_y; \\ -k_1 \frac{d\Delta\psi}{dt} - k \Delta\psi + T_2^2 \frac{d^2 \Delta\delta_\psi}{dt^2} + T_1 \frac{d\Delta\delta_\psi}{dt} + \Delta\delta_\psi &= 0, \end{aligned} \quad (2.8.33)$$

где J_y , $c_{\psi\psi}$ и $c_{\psi\delta}$ и все остальные коэффициенты – постоянные величины.

Уравнениями (2.8.33) можно пользоваться при исследовании управляемости при больших начальных возмущениях параметров движения или скачкообразном воздействии внешних возмущений. Для интегрирования уравнений удобно пользоваться преобразованиями Лапласа.

Начальные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta\psi(t_0) = \Delta\psi_0, \quad \left. \frac{d\Delta\psi}{dt} \right|_{t=t_0} &= \Delta\dot{\psi}_0, \quad \Delta\delta_\psi(t_0) = \Delta\delta_{\psi0}; \\ \left. \frac{d\Delta\delta_\psi}{dt} \right|_{t=t_0} &= \Delta\dot{\delta}_{\psi0}. \end{aligned} \quad (2.8.34)$$

Применим к уравнениям (2.8.33) преобразование Лапласа

$$\begin{aligned} (J_y p^2 + \mu_y p + c_{\psi\psi})\psi(p) - c_{\psi\delta} \delta_\psi(p) &= \\ = M_y(p) + (pJ_y + \mu_y)\Delta\psi_0 + J_y \Delta\dot{\psi}_0; \\ -(k_1 p + k)\psi(p) + (T_2^2 p^2 + T_1 p + 1)\delta_\psi(p) &= \end{aligned}$$

$$= T_2^2(p \Delta \delta_{\psi_0} + \Delta \dot{\delta}_{\psi_0}) + T_1 \Delta \delta_{\psi_0} - k_1 \Delta \psi_0,$$

где $\psi(p)$, $\delta_\psi(p)$, $M_y(p)$ – соответственно изображения Лапласа функций $\Delta\psi$, $\Delta\delta_\psi$, ΔM_y .

Разрешая полученную систему, например относительно $\delta_\psi(p)$, будем иметь

$$\begin{aligned} \delta_\psi(p) = & \frac{1}{(J_y p^2 + \mu_y p + c_{\psi\psi})(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1) - c_{\psi\delta}(k_1 p + k)} \times \\ & \times \left\{ [M_y(p) + (p J_y + \mu_y) \Delta \psi_0 + J_y \Delta \dot{\psi}_0] (k_1 p + k) + \right. \\ & \left. + (J_y p^2 + \mu_y p + c_{\psi\psi}) [T_2^2 (p \Delta \delta_{\psi_0} + \Delta \dot{\delta}_{\psi_0}) + T_1 \Delta \delta_{\psi_0} - k_1 \Delta \psi_0] \right\}. \end{aligned} \quad (2.8.35)$$

Если теперь произвести обратное преобразование Лапласа, то найдем функцию $\Delta\delta_\psi$:

$$\Delta\delta_\psi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i_\infty}^{c+i_\infty} \delta_\psi(p) e^{pt} dp. \quad (2.8.36)$$

Интеграл (2.8.36) вычисляется при помощи вычетов подынтегральной функции. Определение $\Delta\delta_\psi(t)$ проводится в следующей последовательности.

1. Для заданного возмущения $\Delta M_y(t)$ определяют изображение $M_y(p)$:

$$M_y(p) = \int_0^\infty \Delta M_y(t) e^{-pt} dt.$$

Для большинства встречающихся на практике типов возмущений соответствующие изображения можно найти в таблицах, которые приводятся в учебниках по теории автоматического управления.

2. Выражения $\delta_\psi(p)$ представляют как отношение двух полиномов $M(p)$ и $N(p)$:

$$\delta_\psi(p) = \frac{M(p)}{N(p)}.$$

3. Определяют нули полинома $N(p)$, т.е. те значения p_i , при которых $N(p_i) = 0$.

4. Определяют вычеты функции $\delta_\psi(p)$. Вычет функции, соответствующий простому полюсу p_i (полюсом функции $\delta_\psi(p)$ является нуль полинома $N(p)$, если p_i не является также нулем и функции $M(p)$), в данном случае

$$R_i = \lim_{p \rightarrow p_i} \frac{M(p) e^{pt} (p - p_i)}{N(p)} = \frac{M(p_i)}{\left(\frac{dN}{dp}\right)_{p=p_i}} e^{p_i t}.$$

5. Правая часть выражения (2.8.36) равняется сумме всех вычетов подынтегральной функции. Таким образом,

$$\Delta\delta_\psi(t) = \sum_i \frac{M(p_i)}{\left(\frac{dN}{dp}\right)_{p=p_i}} e^{p_i t}. \quad (2.8.37)$$

Аналогично можно найти и функцию $\Delta\psi(t)$.

Пользуясь выражением (2.8.37), нетрудно определить максимальные значения $|\Delta\delta_\psi(t)|$. Для этого приравняем нулю производную $d\Delta\delta_\psi/dt$. Получим, обозначая через t^* значения аргумента, при которых эта производная равна нулю,

$$\sum_i \frac{p_i M(p_i) e^{p_i t^*}}{\left(\frac{dN}{dp}\right)_p} = 0. \quad (2.8.38)$$

Определяя из этого равенства t^* и подставляя в (2.8.37), будем иметь

$$\Delta\delta_{\psi \max, \min}(t^*) = \sum_i \frac{M(p_i)}{\left(\frac{dN}{dp}\right)_p} e^{p_i t^*}. \quad (2.8.39)$$

Поскольку возмущенное движение является процессом колебательным, равенство (2.8.38), вообще говоря, будет выполняться при нескольких значениях аргумента. Однако, зная, что аппарат устойчив, можно ожидать, что наибольшее отклонение руля будет иметь место при наименьшем значении t^* , но нужно иметь в виду, что не исключены и другие возможности.

Аналогичным образом можно определить функцию $\Delta\psi$ в условиях, когда рули занимают крайние положения.

В этом случае из (2.8.8) имеем приближенное соотношение

$$J_y \frac{d^2 \Delta\psi}{dt^2} + \mu_y \frac{d\Delta\psi}{dt} + c_{\psi\psi} \Delta\psi = \pm c_{\psi\delta} \delta_{\psi \max} + \Delta M_y. \quad (2.8.40)$$

В результате преобразования Лапласа получаем

$$(J_y p^2 + \mu_y p + c_{\psi\psi}) \psi(p) = \pm \frac{c_{\psi\delta} \delta_{\psi \max}}{p} + M_y(p) + \\ + (J_y p + \mu_y) \Delta\psi_0 + J_y \Delta\dot{\psi}_0. \quad (2.8.41)$$

Отсюда

$$\psi(p) = \frac{1}{p(J_y p^2 + \mu_y p + c_{\psi\psi})} [\pm c_{\psi\delta} \delta_{\psi \max} + p M_y(p) + \\ + (J_y p + \mu_y) \Delta\psi_0 + J_y \Delta\dot{\psi}_0]. \quad (2.8.42)$$

Обратное преобразование Лапласа функции $\psi(p)$ дает

$$\Delta\psi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i_\infty}^{c+i_\infty} \psi(p) e^{pt} dp. \quad (2.8.43)$$

Далее вычисляют правую часть соотношения (2.8.43) по приведенной выше схеме.

2.8.2. ЭФФЕКТИВНОСТЬ ОРГАНОВ УПРАВЛЕНИЯ ПО КРЕНУ

Возмущенное движение ракеты по крену описывается уравнением

$$J_x \frac{d^2 \Delta\gamma}{dt^2} + \mu_x \frac{d\Delta\gamma}{dt} = c_{\gamma\delta} \Delta\delta_\gamma + \Delta M_x. \quad (2.8.44)$$

Закон управления примем, например, в виде

$$T_2 \frac{d^2 \Delta \delta_\gamma}{dt^2} + T_1 \frac{d \Delta \delta_\gamma}{dt} + \Delta \delta_\gamma = k \Delta \gamma + k_1 \frac{d \Delta \gamma}{dt}. \quad (2.8.45)$$

Квазистатический режим движения ракеты по крену описывается уравнениями, которые получаются из (2.8.44) и (2.8.45), если отбросить производные угловых величин:

$$c_{\gamma\delta} \Delta \delta_\gamma + \Delta M_x = 0; \quad \Delta \delta_\gamma = k \Delta \gamma. \quad (2.8.46)$$

Отсюда

$$\Delta \delta_\gamma = - \frac{\Delta M_x}{c_{\gamma\delta}} = - \frac{\Delta M_x / J_x}{c_{\gamma\delta} / J_x}, \quad (2.8.47)$$

т.е. угол отклонения руля прямо пропорционален возмущающему моменту и обратно пропорционален эффективности руля.

Установившееся значение угла крена

$$\Delta \gamma = \frac{\Delta \delta_\gamma}{k} = - \frac{\Delta M_x / J_x}{k c_{\gamma\delta} / J_x}. \quad (2.8.48)$$

При исследовании эффективности органов управления по крену в переходных режимах коэффициенты уравнения (2.8.44) можно рассматривать как постоянные. Тогда решения уравнений (2.8.44) и (2.8.45) при начальных условиях

$$\Delta \gamma(t_0) = \Delta \gamma_0; \quad \Delta \delta_\gamma(t_0) = \Delta \delta_{\gamma 0};$$

$$\left. \frac{d \Delta \gamma}{dt} \right|_{t=t_0} = \Delta \dot{\gamma}_0; \quad \left. \frac{d \Delta \delta_\gamma}{dt} \right|_{t=t_0} = \Delta \dot{\delta}_{\gamma 0} \quad (2.8.49)$$

можно получить следующим образом. Преобразуя эти уравнения по Лапласу, получим

$$\begin{aligned} (J_x p^2 + \mu_x p) \gamma(p) - c_{\gamma\delta} \delta(p) &= M_x p + (p J_x + \mu_x) \Delta \gamma_0 + J_x \Delta \dot{\gamma}_0, \\ -(k_1 p + k) \gamma(p) + (T_2^2 p^2 + T_1 p + 1) \delta(p) &= (T_2^2 p + T_1) \Delta \delta_{\gamma 0} + \\ + T_2^2 \Delta \dot{\delta}_{\gamma 0} - k_1 \Delta \gamma_0. \end{aligned} \quad (2.8.50)$$

Здесь $\gamma(p)$, $\delta_\gamma(p)$, $M_x(p)$ – изображения функций $\Delta \gamma$, $\Delta \delta_\gamma$, ΔM_x по Лапласу.

Разрешая систему алгебраических уравнений (2.8.50) относительно $\delta_\gamma(p)$ и $\gamma(p)$, можно затем определить искомые функции $\Delta \delta_\gamma(t)$ и $\Delta \gamma(t)$ в соответствии с выражениями

$$\Delta \delta_\gamma(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i_\infty}^{c+i_\infty} \delta_\gamma(p) e^{pt} dp; \quad \Delta \gamma(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i_\infty}^{c+i_\infty} \gamma(p) e^{pt} dp. \quad (2.8.51)$$

В приложениях приводятся дополнительные материалы методического характера по исследованию и выбору эффективности органов управления.

ГЛАВА 3. СТАБИЛИЗАЦИЯ ДВИЖЕНИЯ РАКЕТЫ С УЧЕТОМ ПОДВИЖНОСТИ ЖИДКОГО ТОПЛИВА В БАКАХ

В предыдущих главах для ракеты как недеформируемого твердого тела были получены соответствующие уравнения движения и на их основе осуществлялся выбор потребной эффективности исполнительных органов системы управления, а также решался вопрос о стабилизации движения ракеты как недеформируемого тела.

В данной главе будет рассмотрено влияние подвижности жидким компонентов топлива в баках ракеты на ее движение, показано, как выбираются эффективность исполнительных органов и параметры автомата стабилизации из условия стабилизации движения ракеты и стабилизации колебаний свободных поверхностей жидкости в баках исходя из уравнений движения ракеты как твердого тела с баками, частично заполненными жидкими компонентами топлива.

§ 3.1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ О ФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ЖИДКОГО ТОПЛИВА. ПОТЕНЦИАЛ СКОРОСТЕЙ

При выводе дифференциальных уравнений движения ракеты, учитываящих подвижность жидкостей в топливных баках, будем рассматривать их малые колебания, предполагая, что компоненты топлива — идеальные и несжимаемые жидкости. Влияние вязкости на движение жидкого топлива и ракеты будет освещено ниже, в § 3.13. Если движения, совершаемые жидкостями в начальной стартовой системе координат $O_0X_cY_cZ_c$, в какой-либо момент времени будут безвихревыми, то, как известно из курса гидродинамики, они станут безвихревыми и в дальнейшем в соответствии с предполагаемой нами идеальностью этих жидкостей.

Будем считать, что в некоторый исходный момент времени жидкости находятся в состоянии покоя по отношению к начальной стартовой системе координат $O_0X_cY_cZ_c$. В этом случае все последующие движения жидкостей, совершаемые ими в системе координат $O_0X_cY_cZ_c$, будут безвихревыми, так как состояние покоя является частным случаем безвихревого движения.

Установив для топливных баков ракеты определенную нумерацию, обозначим через v_j вектор скорости, с которой движутся в начальной стартовой системе координат частицы жидкости, находящейся в баке с номером j .

Вектор v_j , определяющий поле скоростей частиц жидкости в j -м баке, является функцией времени t и координат x, y, z рассматриваемой частицы в связанной системе координат $OXYZ$: $v_j = v_j(x, y, z, t)$.

Проекции v_j на оси связанный системы координат обозначим через v_{jx}, v_{jy}, v_{jz} .

Для несжимаемой жидкости в каждой точке ее объема должно выполняться условие

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_j = 0;$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_j = \frac{\partial v_{jx}}{\partial x} + \frac{\partial v_{jy}}{\partial y} + \frac{\partial v_{jz}}{\partial z}. \quad (3.1.1)$$

Как известно, векторное поле $\mathbf{v}_j(x, y, z, t)$ называется безвихревым в рассматриваемой области, если в каждой точке этой области

$$\nabla \times \mathbf{v}_j = 0, \quad (3.1.2)$$

где ∇ – линейный оператор, который в прямоугольных декартовых координатах определяется формулой

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}. \quad (3.1.3)$$

Условие (3.1.2) эквивалентно выполнению соотношений

$$\frac{\partial v_{jy}}{\partial z} - \frac{\partial v_{jz}}{\partial y} = \frac{\partial v_{jz}}{\partial x} - \frac{\partial v_{jx}}{\partial z} = \frac{\partial v_{jx}}{\partial y} - \frac{\partial v_{jy}}{\partial x} \equiv 0. \quad (3.1.4)$$

Условие (3.1.4) можно представить в ином виде. По определению

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}_j = \nabla \times \mathbf{v}_j,$$

для безвихревого поля $\mathbf{v}_j(x, y, z, t)$ непосредственно получаем

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}_j = 0. \quad (3.1.5)$$

Как известно (из векторного анализа), поле (в данном случае поле \mathbf{v}_j) является безвихревым тогда и только тогда, когда \mathbf{v}_j есть градиент некоторой скалярной функции Φ_j , т.е.

$$\mathbf{v}_j = \operatorname{grad} \Phi_j = \nabla \Phi_j = \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \Phi_j}{\partial z} \mathbf{k} \quad (3.1.6)$$

в каждой точке рассматриваемой области.

Эта скалярная функция называется скалярным потенциалом безвихревого векторного поля. В нашем случае эту скалярную функцию (функцию Φ_j) мы назовем потенциалом скоростей для жидкости, находящейся в j -м баке.

Согласно (3.1.1) и (3.1.6) потенциал скоростей Φ_j должен удовлетворять уравнению Лапласа

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi_j = \nabla^2 \Phi_j = 0 \quad (3.1.7)$$

в области, занимаемой жидкостью в j -м баке. В следующем параграфе будут рассмотрены краевые условия, которые должны выполняться на границе этой области.

Здесь $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ – оператор Лапласа (обозначаемый иногда через Δ), который в декартовых прямоугольных координатах выражается формулой

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (3.1.8)$$

§ 3.2. КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛА СКОРОСТЕЙ

Скорость v_j , с которой частица жидкости движется в начальной стартовой системе координат $O_0 X_c Y_c Z_c$, можно представить в виде суммы переносной скорости, порождаемой движением связанной системы координат $OXYZ$, и относительной скорости $v_{j\text{отн}}$, с которой данная частица жидкости движется в системе координат $OXYZ$. Пользуясь известной из теоретической механики формулой для переносной скорости, получим соотношение

$$v_j = v_0 + \omega \times r + v_{j\text{отн}}, \quad (3.2.1)$$

где v_0 – скорость, с которой движется начало системы координат $OXYZ$; ω – угловая скорость связанной системы координат; r – радиус-вектор рассматриваемой частицы жидкости в подвижной системе координат $OXYZ$ ¹.

Согласно (3.1.2) и (3.2.1) должно иметь место равенство

$$\text{grad } \Phi_j = v_0 + \omega \times r + v_{j\text{отн}}. \quad (3.2.2)$$

В соответствии с формулой (3.2.2), установив краевые условия для относительной скорости $v_{j\text{отн}}$, можно получить из них искомые краевые условия для потенциала скоростей Φ_j . Рассмотрим условия, которым должна удовлетворять относительная скорость $v_{j\text{отн}}$ на смачиваемой поверхности бака и на свободной поверхности жидкости.

Обозначим через S_j внутреннюю поверхность j -го бака, а через σ_j – плоское сечение этого бака, нормальное к его продольной оси и построенное таким образом, чтобы объем области V_j , ограниченной поверхностями S_j и σ_j , был равен объему жидкости, находящейся в баке (рис. 3.1). Если $x = x_j(t)$ – уравнение плоскости σ_j , меняющей свое положение со временем из-за опорожнения бака, то уравнение свободной поверхности жидкости, которую мы будем обозначать в дальнейшем через σ_j^* , можно представить в виде

$$x = x_j(t) + f_j(y, z, t), \quad (3.2.3)$$

¹ В дальнейшем будем считать, что начало подвижной системы координат совпадает с центром масс ракеты в том случае, если жидкости в топливных баках ограничены плоскими свободными поверхностями, нормальными к продольной оси ракеты. Везде далее начало подвижной системы координат будем обозначать, как и в гл. 1, буквой O . При колебаниях свободных поверхностей жидкостей центр масс C будет отклоняться от точки O и скорость v_0 будет отличаться от скорости v_c .

где $f_j(y, z, t)$ – функция, определяющая отклонение точек свободной поверхности жидкости σ_j^* от плоскости σ_j .

Рассмотрим сначала движение частицы жидкости, обтекающей смачиваемую поверхность S_j . Вектор относительной скорости движения этой частицы $v_{j\text{отн}}$ будет всегда лежать в плоскости, касательной к поверхности S_j . Обозначим через n единичный вектор внешней нормали к поверхности S_j (см. рис. 3.1). В рассматриваемом случае векторы $v_{j\text{отн}}$ и n должны быть взаимно ортогональными, их скалярное произведение должно быть равно нулю, т.е. на смачиваемой поверхности S_j должно выполняться условие

$$v_{j\text{отн}} \cdot n = 0. \quad (3.2.4)$$

С учетом (3.2.1) запишем так называемое условие непротекания на смоченной поверхности

$$v_j \cdot n = v_0 \cdot n + (\omega \times r) \cdot n, \quad (3.2.5)$$

которое для неподвижного бака принимает вид

$$v_j \cdot n = 0. \quad (3.2.6)$$

Используя равенство (3.1.2), запишем полученные граничные условия для подвижного бака

$$\operatorname{grad} \Phi_j \cdot n = v_0 \cdot n + (\omega \times r) \cdot n \quad (3.2.7)$$

и для неподвижного бака

$$\operatorname{grad} \Phi_j \cdot n = 0. \quad (3.2.8)$$

Рассмотрим далее относительное движение частицы жидкости, остающейся в процессе этого движения на свободной поверхности σ_j^* . Обозначим через A точку, в которой находится эта частица жидкости в момент времени t , а через A_1 – точку, которую она перемещается к моменту времени $t + dt$ (рис. 3.2). Перемещение AA_1 , совершаемое частицей жидкости в связанной системе координат за время dt , будет равно $v_{j\text{отн}} dt$. Точка A_1 будет лежать на свободной поверхности жидкости,

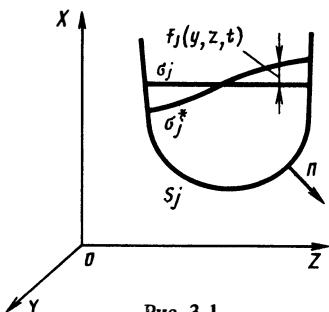


Рис. 3.1.

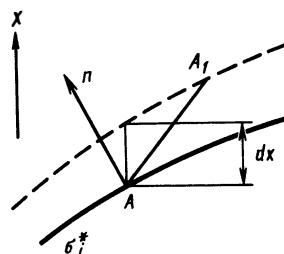


Рис. 3.2.

соответствующей моменту времени $t + dt$ (на рис. 3.2 показана пунктиром). В соответствии с уравнением свободной поверхности (3.2.3) точка этой поверхности с координатами uz в момент времени $t + dt$ будет иметь координату $x + dx$, определяемую соотношением

$$x + dx = x_j(t + dt) + f_j(y, z, t + dt). \quad (3.2.9)$$

Согласно (3.2.3) и (3.2.9) будет иметь место равенство

$$dx = \frac{dx_j}{dt} dt + \frac{\partial f_j}{\partial t} dt. \quad (3.2.10)$$

Как видно из рис. 3.2, проекция перемещения ΔA_1 на направление внешней нормали n^* к поверхности σ_j^* будет равна $dx \cos(n^*, x)$, или согласно (3.2.10)

$$(AA_1)_{n^*} = \left(\frac{dx_j}{dt} + \frac{\partial f_j}{\partial t} \right) \cos(n^*, x) dt. \quad (3.2.11)$$

В то же время эту проекцию можно отыскать, скалярно умножая перемещение ΔA_1 на единичный вектор внешней нормали к поверхности σ_j^* , который мы обозначим через n^* . В этом случае для рассматриваемой проекции можно записать

$$(AA_1)_{n^*} = v_{j \text{ отн}} \cdot n^* dt.$$

Сравнивая полученное выражение с (3.2.11), придем к краевому условию на поверхности σ_j^*

$$v_{j \text{ отн}} \cdot n^* = \left(\frac{dx_j}{dt} + \frac{\partial f_j}{\partial t} \right) \cos(n^*, x), \quad (3.2.12)$$

которое принято называть кинематическим условием на свободной поверхности жидкости. Условие имеет физический смысл: частица жидкости, расположенная на свободной поверхности, всегда остается на ней и движется вместе с поверхностью σ_j^* .

Согласно (3.2.2) потенциал скоростей Φ_j на свободной поверхности σ_j^* должен удовлетворять условию

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \Phi_j \cdot n^* &= v_0 \cdot n^* + (\omega \times r) \cdot n^* + \\ &+ \left(\frac{dx_j}{dt} + \frac{\partial f_j}{\partial t} \right) \cos(n^*, x). \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

Пользуясь равенствами

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \Phi_j \cdot n &= \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} \cos(n, y) + \\ &+ \frac{\partial \Phi_j}{\partial z} \cos(n, z) = \frac{\partial \Phi_j}{\partial n}; \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \Phi_j \cdot n^* &= \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} \cos(n^*, x) + \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} \cos(n^*, y) + \\ &+ \frac{\partial \Phi_j}{\partial z} \cos(n^*, z) = \frac{\partial \Phi_j}{\partial n^*} \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

и соотношениями

$$(\omega \times r) \cdot n = (r \times n) \cdot \omega, \quad (\omega \times r) \cdot n^* = (r \times n^*) \cdot \omega, \quad (3.2.15)$$

вытекающими из возможности циклической перестановки множителей в смешанном произведении векторов, можно привести краевые условия (3.2.7) и (3.2.13) к виду

$$\frac{\partial \Phi_j}{\partial n} = v_0 \cdot n + \omega \cdot (r \times n) \quad \text{на } S_j; \quad (3.2.16)$$

$$\frac{\partial \Phi_j}{\partial n^*} = v_0 \cdot n^* + \omega \cdot (r \times n^*) + \left(\frac{dx_j}{dt} + \frac{\partial f_j}{\partial t} \right) \cos(n^*, x) \quad \text{на } \sigma_j^*.$$

Если на исследуемом участке полета ракеты j -й бак не опорожняется, плоскость σ_j (см. рис. 3.1) не меняет своего положения в связанный системе координат $OXYZ$ и функция $x_j(t)$ сохраняет постоянное значение. В этом случае краевые условия (3.2.16) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} &= v_0 \cdot n + \omega \cdot (r \times n) \quad \text{на } S_j; \\ \frac{\partial \Phi_j}{\partial n^*} &= v_0 \cdot n^* + \omega \cdot (r \times n^*) + \frac{\partial f_j}{\partial t} \cos(n^*, x) \quad \text{на } \sigma_j^*. \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

Для опорожняющихся баков краевые условия (3.2.16) должны быть дополнены краевым условием, которое должно выполняться во входных сечениях расходных топливных магистралей. В этом случае потенциал скоростей будет складываться из потенциала Φ_j , удовлетворяющего краевым условиям (3.2.17), и дополнительного потенциала скоростей, определяющего процесс слива жидкости из неподвижного бака, в ходе которого свободная поверхность жидкости остается плоской и перпендикулярной к оси OX . При больших уровнях заправки слив жидкости практически не отражается на ее колебаниях в топливном баке. Здесь мы ограничимся учетом потенциала скоростей Φ_j , определяемого краевыми условиями (3.2.17), и в связи с этим во всех дальнейших рассуждениях мы будем исходить из дифференциального уравнения (3.1.4) с краевыми условиями (3.2.17).

Определим динамическое условие на свободной поверхности жидкости. Рассматривая угловую скорость аппарата ω как малую величину и пре-небрегая величинами более высокого порядка малости, запишем в форме Эйлера уравнение движения жидкой частицы

$$\frac{dv_j}{dt} = w_0 - g + \frac{d\omega}{dt} \times r - \frac{1}{\rho_j} \operatorname{grad} p_j, \quad (3.2.18)$$

где $w_0 = dv_0/dt$ – ускорение, с которым движется начало связанный системы координат $OXYZ$; g – ускорение свободного падения, действующее на жидкость; p_j – давление в точке, где расположена частица жидкости; ρ_j – плотность жидкости в j -ом баке; $d\omega/dt$ – угловое ускорение связанный системы координат.

Будем предполагать, что поле массовых сил инерции потенциально:

$$\begin{aligned} w_0 - g + \frac{d\omega}{dt} \times r &= -\operatorname{grad} [(w_0 - g) + \frac{d\omega}{dt} \times r] = \\ &= -\operatorname{grad} [(w_{0x} - g_x)x + (w_{0y} - g_y)y + (w_{0z} - g_z)z]. \end{aligned}$$

С учетом (3.1.6), пренебрегая величинами второго порядка малости, можно записать

$$\frac{dv_j}{dt} = \frac{d(\operatorname{grad} \Phi_j)}{dt} = \operatorname{grad} \frac{\partial \Phi_j}{\partial t}.$$

Тогда уравнение (3.2.18) принимает вид

$$\operatorname{grad} \frac{\partial \Phi_j}{\partial t} = -\operatorname{grad} [(w_0 - g) \cdot r] - \frac{1}{\rho_j} \operatorname{grad} p_j.$$

Интегрируя данное уравнение по пространственным координатам, получим соотношение – интеграл Коши–Лагранжа:

$$\frac{\partial \Phi_j}{\partial t} = -(w_0 - g) \cdot r - \frac{p_j}{\rho_j} + c_j(t), \quad (3.2.19)$$

$$\text{или } p_j = -\rho_j [(w_0 - g) \cdot r + \frac{\partial \Phi_j}{\partial t}] + c_j(t),$$

справедливое для всех точек объема, занятого жидкостью.

Давление на свободной поверхности σ_j^* должно совпадать с давлением газа, находящегося над свободной поверхностью, иными словами с давлением наддува баков: $p_j = p_j^{(0)}$.

Это условие в соответствии с уравнением свободной поверхности (3.2.3) можно представить в виде

$$p_j(x_j + f_j, y, z, t) = p_j^{(0)},$$

$$\begin{aligned} \text{или } p_j(x_j, y, z, t) + (\frac{\partial p_j}{\partial x})_{x=x_j} f_j + \frac{1}{2} (\frac{\partial^2 p_j}{\partial x^2})_{x=x_j} f_j^2 + \dots &= \\ &= p_j^{(0)}. \end{aligned}$$

При малых колебаниях свободной поверхности с погрешностью высшего порядка малости можно записать

$$p_j(x_j, y, z, t) + (\frac{\partial p_j}{\partial x})_{x=x_j} f_j = p_j^{(0)}.$$

Подставляя в это выражение p_j из (3.2.19), получим равенство

$$\begin{aligned} & -\rho_j[(w_{0x} - g_x)x_j + (w_{0y} - g_y)y + (w_{0z} - g_z)z + \\ & + \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial t} \right)_{x=x_j}] + c_j(t) - \rho_j[w_{0x} - g_x + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial t} \right)_{x=x_j}] \times \\ & \times f_j = p_j^{(0)}. \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

Введем обозначение

$$c_j(t) = \frac{c_j(t) - p_j^{(0)}}{\rho_j} - (w_{0x} - g_x)x_j \quad (3.2.21)$$

и в соответствии с предположением о малости колебаний свободной поверхности заменим (3.2.20) приближенным соотношением

$$(w_{0x} - g_x)f_j - (w_{0y} - g_y)y + (w_{0z} - g_z)z + \frac{\partial \Phi_j}{\partial t} = c_j(t), \quad (3.2.22)$$

так как уравнение плоскости σ_j имеет вид $x = x_j$.

Соотношение (3.2.22) называют динамическим условием на свободной поверхности жидкости.

Таким образом, задача об определении потенциала скоростей $\Phi_j(x, y, z, t)$ и формы свободной поверхности жидкости в баке $f_j(y, z, t)$ сводится к решению уравнения Лапласа (3.1.7) с граничными условиями (3.2.7), (3.2.13) и (3.2.22).

§ 3.3. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОГО ТОПЛИВА В БАКАХ

При рассмотрении вопроса о стабилизации движения ракеты с учетом подвижности топлива в баках мы ограничимся исследованием малых колебаний жидкостей, в процессе которых свободные поверхности σ^* остаются близкими к плоским поверхностям σ_j (см. рис. 3.1). Упростим краевую задачу для потенциала скоростей Φ_j , сформулированную в предыдущем параграфе, что в дальнейшем существенным образом облегчит исследование устойчивости движения.

Упрощение заключается в расщеплении краевой задачи на более простые задачи путем представления решения в виде

$$\Phi_j = v_0 \cdot r + \Psi_j = v_0 \cdot r + \varphi_j \cdot \omega + \frac{\partial \psi_j}{\partial t},$$

где $\Psi_j(x, y, z, t)$ – потенциал скоростей, учитывающий переносное вращательное движение жидкости с баком и колебания свободной поверхности жидкости; $\varphi_j(x, y, z)$ – векторный потенциал скоростей жидкости

с крышкой на свободной поверхности в баке, вращающемся с единичной угловой скоростью; $\psi_j(x, y, z, t)$ – потенциал волновых перемещений жидкости в неподвижном баке.

Рассмотрим функцию Ψ_j , связанную с потенциалом скоростей Φ_j соотношением

$$\Psi_j = \Phi_j - \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{r} = \Phi_j - v_{0x}x - v_{0y}y - v_{0z}z. \quad (3.3.1)$$

Дифференцируя обе части соотношения (3.3.1), получим

$$\nabla^2 \Psi_j = \nabla^2 \Phi_j;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_j}{\partial n} &= \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} - v_{0x} \cos(n, x) - v_{0y} \cos(n, y) - v_{0z} \cos(n, z) = \\ &= \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} - \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n} \quad \text{на } S_j; \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_j}{\partial n^*} &= \frac{\partial \Phi_j}{\partial n^*} - v_{0x} \cos(n^*, x) - v_{0y} \cos(n^*, y) - \\ &- v_{0z} \cos(n^*, z) = \frac{\partial \Phi_j}{\partial n^*} - \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}^* \quad \text{на } \sigma_j^*. \end{aligned}$$

В соответствии с формулами (3.1.4), (3.2.13) и (3.3.2) функция Ψ_j должна удовлетворять уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \Psi_j = 0 \quad (3.3.3)$$

и краевым условиям

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_j}{\partial n} &= \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) \quad \text{на } S_j; \\ \frac{\partial \Psi_j}{\partial n^*} &= \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{n}^*) + \frac{\partial f_j}{\partial t} \cos(n^*, x) \quad \text{на } \sigma_j^*. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Согласно (3.1.2) и (3.3.1) будет иметь место соотношение

$$\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_0 + \operatorname{grad} \Psi_j. \quad (3.3.5)$$

Из формулы (3.2.1) и (3.3.5) вытекает равенство

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_{j \text{ отн}} = \operatorname{grad} \Psi_j. \quad (3.3.6)$$

В соответствии с предположением о медленности вращения ракеты и о малости колебаний топлива в баках скорости $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_{j \text{ отн}}$ будут всегда малыми, и, допуская при определении их потенциала Ψ_j относительно малые погрешности, мы получим погрешности второго порядка малости при отыскании абсолютных скоростей движения частиц жидкости \mathbf{v}_j . При малых колебаниях жидкости в j -м баке свободная поверхность жидкости

σ_j^* будет оставаться близкой к плоскости σ_j . Таким образом, пренебрегая при исследовании движения жидкости величинами второго порядка малости, можно перенести второе из краевых условий (3.3.4) с поверхности σ_j^* на близкую поверхность σ_j , заменяя при этом направление нормали n^* к поверхности σ_j^* направлением нормали n к поверхности σ_j . Краевые условия (3.3.4) в этом случае примут вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi_j}{\partial n} &= \omega \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) \quad \text{на } S_j; \\ \frac{\partial \Psi_j}{\partial n} &= \omega \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) + \frac{\partial f_j}{\partial t} \quad \text{на } \sigma_j\end{aligned}\tag{3.3.7}$$

(на поверхности $\sigma_j \cos(n, x) = 1$, так как направление внешней нормали n к плоскости σ_j совпадает с направлением оси OX).

Вопрос о решении уравнения Лапласа (3.3.3), удовлетворяющем краевым условиям (3.3.7), подробно рассматривается в следующих параграфах этой главы.

§ 3.4. ПОТЕНЦИАЛЫ ЖУКОВСКОГО

Рассмотрим сначала случай, когда поверхность жидкости, находящейся в j -м баке, закрыта крышкой, расположенной в сечении бака σ_j . Как видно из рис. 3.1, в этом случае функция $f_j(y, z, t)$ в процессе движения будет оставаться тождественно равной нулю и в соответствии с этим краевые условия (3.3.7) примут вид

$$\frac{\partial \Psi_j}{\partial n} = \omega \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) \quad \text{на } S_j \text{ и } \sigma_j.\tag{3.4.1}$$

Введем в рассмотрение векторную функцию φ_j , удовлетворяющую уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \varphi_j = 0\tag{3.4.2}$$

и краевому условию

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial n} = \mathbf{r} \times \mathbf{n} \quad \text{на } S_j \text{ и } \sigma_j.\tag{3.4.3}$$

Согласно (3.4.2) и (3.4.3) функция

$$\Psi_j = \omega \cdot \varphi_j\tag{3.4.4}$$

будет удовлетворять дифференциальному уравнению (3.3.3) и краевому условию (3.4.1). Таким образом, в рассматриваемом случае задача о движении жидкости, находящейся в j -м баке, сводится к решению дифференциального уравнения (3.4.2) с краевым условием (3.4.3).

Задача об отыскании функции φ , удовлетворяющей уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (3.4.5)$$

в области, ограниченной поверхностью S , и удовлетворяющей краевому условию

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = F \quad \text{на } S, \quad (3.4.6)$$

где F – функция, заданная на граничной поверхности S , носит название задачи Неймана для уравнения Лапласа. Для разрешимости задачи Неймана необходимо и достаточно, чтобы функция F удовлетворяла условию [26]

$$\int_S F ds = 0. \quad (3.4.7)$$

Таким образом, необходимые и достаточные условия разрешимости дифференциального уравнения (3.4.2) с краевым условием (3.4.3) в векторной форме могут быть выражены равенством

$$\int_{S_j + \sigma_j} \mathbf{r} \times \mathbf{n} ds = 0. \quad (3.4.8)$$

Покажем, что условие (3.4.8) всегда выполняется. Преобразуя поверхностные интегралы в объемные посредством формул Гаусса–Остроградского, найдем

$$\int_{S_j + \sigma_j} [y \cos(n, z) - z \cos(n, y)] ds = \int_{V_j} \left(\frac{\partial y}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial y} \right) dv = 0;$$

$$\int_{S_j + \sigma_j} [z \cos(n, x) - x \cos(n, z)] ds = \int_{V_j} \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial z} \right) dv = 0;$$

$$\int_{S_j + \sigma_j} [x \cos(n, y) - y \cos(n, x)] ds = \int_{V_j} \left(\frac{\partial x}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial x} \right) dv = 0,$$

(3.4.9)

где V_j – область, лежащая внутри замкнутой поверхности $S_j + \sigma_j$.

Скалярные равенства (3.4.9) эквивалентны векторному равенству (3.4.8). Таким образом, задача, записанная в виде дифференциального уравнения (3.4.2) с краевым условием (3.4.3), всегда разрешима, что и требовалось доказать.

Согласно (3.3.5) и (3.3.4) скорости движения частиц жидкости в рассматриваемом случае будут определяться формулой

$$\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_0 + \operatorname{grad}(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\psi}_j). \quad (3.4.10)$$

Дифференциальное уравнение (3.4.5) с краевым условием (3.4.6) определяет исковую функцию φ с точностью до произвольного постоянного слагаемого. В соответствии с этим уравнение (3.4.2) с краевым ус-

ловием (3.4.3) определяет векторную функцию φ_j с точностью до произвольного постоянного векторного слагаемого. Согласно (3.4.10) вид векторной функции v_j , определяющей поле скоростей, не зависит от выбора этого постоянного слагаемого, и оно может быть принято любым.

При $\omega_x = 1, \omega_y = \omega_z = 0$ формула (3.4.10) принимает вид

$$v_j = v_0 + \operatorname{grad} \varphi_{jx}. \quad (3.4.11)$$

Случаю $\omega_x = 0, \omega_y = 1, \omega_z = 0$ соответствует равенство

$$v_j = v_0 + \operatorname{grad} \varphi_{jy}, \quad (3.4.12)$$

а в случае $\omega_x = 0, \omega_y = 0, \omega_z = 1$

$$v_j = v_0 + \operatorname{grad} \varphi_{jz}. \quad (3.4.13)$$

Таким образом, проекции $\varphi_{jx}, \varphi_{jy}, \varphi_{jz}$ вектора φ_j представляют собой потенциалы скоростей, возникающих при вращении корпуса ракеты с единичной угловой скоростью соответственно вокруг осей OX, OY, OZ . Потенциалы скоростей $\varphi_{jx}, \varphi_{jy}, \varphi_{jz}$ впервые были введены в рассмотрение Н. Е. Жуковским, поэтому функции $\varphi_{jx}, \varphi_{jy}$ и φ_{jz} в дальнейшем будем называть потенциалами Жуковского.

§ 3.5. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОСТИ В НЕПОДВИЖНОМ БАКЕ. ПОТЕНЦИАЛ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Рассмотрим теперь малые колебания жидкостей, которые могут иметь место в топливных баках неподвижной ракеты, занимающей вертикальное положение (случай стоянки ракеты на старте). Полагая в (3.3.5) и (3.3.7) $v_0 = 0, \omega = 0$, получим

$$v_j = \operatorname{grad} \Psi_j, \quad (3.5.1)$$

где Ψ_j — решение уравнения Лапласа (3.3.3), удовлетворяющее краевым условиям

$$\frac{\partial \Psi_j}{\partial n} = 0 \quad \text{на } S_j; \quad \frac{\partial \Psi_j}{\partial t} = \frac{\partial f_j}{\partial t} \quad \text{на } \sigma_j. \quad (3.5.2)$$

Рассмотрим функцию ψ_j , удовлетворяющую уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \psi_j = 0 \quad (3.5.3)$$

и краевым условиям

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial n} = 0 \quad \text{на } S_j; \quad \frac{\partial \psi_j}{\partial t} = f_j \quad \text{на } \sigma_j. \quad (3.5.4)$$

Согласно (3.5.3) и (3.5.4) функция

$$\Psi_j = \frac{\partial \psi_j}{\partial t} \quad (3.5.5)$$

будет удовлетворять дифференциальному уравнению (3.3.3) и краевым условиям (3.5.2) в соответствии с равенствами

$$\nabla^2 \frac{\partial \psi_j}{\partial t} = \frac{\partial \nabla^2 \psi_j}{\partial t}; \quad \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial n} \right), \quad (3.5.6)$$

вытекающими из возможности изменения порядка дифференцирования функции, зависящей от нескольких независимых переменных. Таким образом, в рассматриваемом случае задача о движении жидкости, находящейся в j -м баке, может быть сведена к решению дифференциального уравнения (3.5.3) с краевыми условиями (3.5.4). Для разрешимости этой задачи Неймана необходимо и достаточно, чтобы функция f_j удовлетворяла условию

$$\int_{\sigma_j} f_j ds = 0. \quad (3.5.7)$$

Как видно из рис. 3.1, при малых колебаниях жидкости в j -м топливном баке интеграл, стоящий в левой части равенства (3.5.7), определяет разность между объемом области, ограниченной поверхностями S_j и σ_j^* , и объемом области, ограниченной поверхностями S_j и σ_j . Сечение бака σ_j было выбрано с таким расчетом, чтобы эти объемы были равны. Таким образом, условие (3.5.7) будет выполняться.

Введем теперь в рассмотрение вектор $u_j(x, y, z, t)$, определяющий перемещения, которые совершают в j -м баке частица жидкости, имеющая в состоянии покоя координаты x, y, z . Скорость движения частицы жидкости, имеющей в момент времени t координаты x, y, z , определяется вектором $v_j(x, y, z, t)$. Таким образом, скорость движения частицы, имеющей в состоянии покоя координаты x, y, z , будет определяться вектором $v_j(x + u_{jx}, y + u_{jy}, z + u_{jz}, t)$, так как в момент времени t эта частица жидкости будет иметь координаты $x + u_{jx}, y + u_{jy}, z + u_{jz}$, где u_{jx}, u_{jy}, u_{jz} – проекции вектора перемещений u_j . Отсюда вытекает равенство

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = v_j(x + u_{jx}, y + u_{jy}, z + u_{jz}, t). \quad (3.5.8)$$

При малых колебаниях жидкости, допуская погрешности второго порядка малости, можно заменить равенство (3.5.8) приближенным соотношением

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = v_j(x, y, z, t), \quad (3.5.9)$$

или согласно (3.5.1) и (3.5.5)

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = \operatorname{grad} \frac{\partial \psi_j}{\partial t}. \quad (3.5.10)$$

Меняя порядок дифференцирования функции ψ_j , получим

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u}_j - \operatorname{grad} \psi_j) = 0. \quad (3.5.11)$$

Допустим теперь, что в некоторый момент времени $t = t_0$ частицы жидкости, находящиеся в j -м баке, занимают положения, соответствующие состоянию покоя, т.е.

$$\mathbf{u}_j = 0 \text{ в } V_j \text{ при } t = t_0, \quad f_j(y, z, t) \equiv 0 \quad (3.5.12)$$

(см. рис. 3.1). Согласно (3.5.12) при $t = t_0$ краевая задача, выраженная дифференциальным уравнением (3.5.3) и краевыми условиями (3.5.4), будет представлять собой однородную задачу Неймана и будет иметь место соотношение

$$\psi_j \equiv c_j \text{ при } t = t_0, \quad (3.5.13)$$

где c_j – некоторая константа.

В соответствии с равенством (3.5.11) разность $\mathbf{u}_j - \operatorname{grad} \psi_j$ не должна зависеть от времени t , в то же время согласно (3.5.12) и (3.5.13) при $t = t_0$ эта разность должна быть тождественно равна нулю. Таким образом, должно иметь место тождество

$$\mathbf{u}_j = \operatorname{grad} \psi_j \text{ в } V_j. \quad (3.5.14)$$

Как видим, в случае малых колебаний жидкости в неподвижном баке перемещения, совершаемые частицами жидкости, обладают потенциалом ψ_j , определяемым дифференциальным уравнением (3.5.3) с краевыми условиями (3.5.4). В соответствии с этим решение уравнения Лапласа (3.5.3), удовлетворяющее краевым условиям (3.5.4), будем называть в дальнейшем потенциалом перемещений, имея в виду перемещения, вызываемые колебаниями свободной поверхности жидкости в j -м баке.

Зная потенциалы Жуковского φ_{jx} , φ_{jy} , φ_{jz} и потенциал перемещений ψ_j , можно построить общее выражение для потенциала скоростей Ψ_j , входящего в формулу (3.3.5) и определяемого дифференциальным уравнением (3.3.3) с краевыми условиями (3.3.7). Согласно (3.4.2), (3.4.3), (3.5.3), (3.5.4) и (3.5.6) функция

$$\Psi_j = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\varphi}_j + \frac{\partial \psi_j}{\partial t} \quad (3.5.15)$$

будет удовлетворять дифференциальному уравнению Лапласа (3.3.3) и краевым условиям (3.3.7). Таким образом, согласно (3.3.5) и (3.5.15) в общем случае скорости, с которыми движутся в стартовой системе координат частицы жидкости, находящейся в j -м баке, будут определяться соотношением

$$\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_0 + \operatorname{grad} (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\varphi}_j + \frac{\partial \psi_j}{\partial t}). \quad (3.5.16)$$

Потенциал перемещения ψ_j можно отыскать из дифференциального уравнения (3.5.3) с краевыми условиями (3.5.4), зная функцию f_j , определяющую колебания, которые совершают свободная поверхность жидкости в j -м баке. Отыскание функций f_j рассматривается в следующем параграфе.

§ 3.6. КОЛЕБАНИЯ СВОБОДНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ЖИДКОСТЕЙ В ПОДВИЖНЫХ ТОПЛИВНЫХ БАКАХ

Как уже отмечалось, для определения формы свободной поверхности $f_j(y, z, t)$ жидкости необходимо определить потенциал волновых смещений ψ_j , для чего уравнения (3.5.3) и (3.5.4) должны быть дополнены динамическим условием на поверхности σ^* .

В соответствии с формулой (3.3.1) в динамическом условии (3.2.22) выразим потенциал скоростей Φ_j через потенциалы Ψ_j , φ_j , ψ_j .

Согласно (3.3.5) должно иметь место равенство

$$\mathbf{w}_j = \mathbf{w}_0 + \frac{d(\operatorname{grad} \Psi_j)}{dt}, \quad (3.6.1)$$

где $\mathbf{w}_0 = d\mathbf{v}_0/dt$ – ускорение, с которым движется начало связанный системы координат $OXYZ$.

Потенциал скоростей Ψ_j будем предполагать найденным в виде функции времени t и пространственных координат x, y, z . Вычисляя ускорение какой-либо частицы жидкости по формуле (3.6.1), необходимо учитывать зависимость координат этой частицы x, y, z от времени, кроме того, при дифференцировании вектора $\operatorname{grad} \Psi_j$ следует учитывать вращение системы координат $OXYZ$, добавляя к локальной производной по времени t от вектора $\operatorname{grad} \Psi_j$ векторное произведение $\boldsymbol{\omega} \times \operatorname{grad} \Psi_j$. Обозначая через $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ единичные векторы, направления которых соответствуют положительным направлениям координатных осей OX, OY, OZ , найдем

$$\begin{aligned} \frac{d(\operatorname{grad} \Psi_j)}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Psi_j}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial \Psi_j}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) = \\ &= \left(\frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial x^2} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial x \partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial x \partial z} \frac{dz}{dt} \right) \mathbf{e}_x + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial y \partial t} + \frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial x \partial y} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial y^2} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial y \partial z} \frac{dz}{dt} \right) \mathbf{e}_y + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial z \partial t} + \frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial x \partial z} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial y \partial z} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial z^2} \frac{dz}{dt} \right) \mathbf{e}_z + \\ &+ \boldsymbol{\omega} \times \operatorname{grad} \Psi_j = \operatorname{grad} \left(\frac{\partial \Psi_j}{\partial t} + \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{\partial \Psi_j}{\partial z} \frac{dz}{dt}) + \omega \times \text{grad } \Psi_j,$$

или $\frac{d(\text{grad } \Psi_j)}{dt} = \text{grad} \left(\frac{\partial \Psi_j}{\partial t} + v_{j\text{отн}} \cdot \text{grad } \Psi_j \right) + \omega \times \text{grad } \Psi_j, \quad (3.6.2)$

где $v_{j\text{отн}}$ — скорость, с которой движется рассматриваемая частица жидкости в связанной системе координат $OXYZ$. Ввиду предполагаемой малости скоростей $v_{j\text{отн}}$, ω и $\text{grad } \Psi_j$ формулу (3.6.2) можно заменить приближенной формулой

$$\frac{d(\text{grad } \Psi_j)}{dt} = \text{grad} \frac{\partial \Psi_j}{\partial t}, \quad (3.6.3)$$

пренебрегая величинами второго порядка малости.

Пользуясь формулой (3.5.15), найдем

$$\frac{\partial \Psi_j}{\partial t} = \frac{d\omega}{dt} \cdot \varphi_j + \omega \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial t^2}. \quad (3.6.4)$$

Если на исследуемом участке полета ракеты j -й бак не опорожняется, векторная функция φ_j , определяемая уравнением (3.4.2) с краевым условием (3.4.3), от времени t не зависит и равенство (3.6.4) в этом случае принимает вид

$$\frac{\partial \Psi_j}{\partial t} = \frac{d\omega}{dt} \cdot \varphi_j + \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial t^2}. \quad (3.6.5)$$

В случае опорожнения j -го бака производная $\partial \varphi_j / \partial t$ может быть отнесена к числу малых величин, и в соответствии с предполагаемой малостью угловой скорости ω соотношение (3.6.4) можно заменить приближенным соотношением (3.6.5), допуская погрешности второго порядка малости.

Согласно (3.6.5) формуле (3.2.20) можно придать вид

$$\begin{aligned} & -\rho_j [(w_{0x} - g_x)x_j + (w_{0y} - g_y)y + (w_{0z} - g_z)z + \\ & + \frac{d\omega}{dt} \cdot (\varphi_j)_x = x_j + \left(\frac{\partial^2 \psi_j}{\partial t^2} \right)_x = x_j] + c_j(t) - \\ & - \rho_j [w_{0x} - g_x + \frac{d\omega}{dt} \cdot \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \right)_x = x_j + \left(\frac{\partial^3 \psi_j}{\partial t^2 \partial x} \right)_x = x_j] f_j = \\ & = p_j^{(0)}. \end{aligned} \quad (3.6.6)$$

В соответствии с предположением о малости колебаний свободной поверхности и о малости углового ускорения $d\omega/dt$ точное равенство (3.6.6) можно заменить приближенным

$$-\rho_j [(w_{0x} - g_x)x_j + (w_{0y} - g_y)y + (w_{0z} - g_z)z +$$

$$+ \frac{d\omega}{dt} \cdot (\varphi_j)_x \Big|_{x=x_j} + \left(\frac{\partial^2 \psi_j}{\partial t^2} \right)_x \Big|_{x=x_j} + c_j(t) - \\ - \rho_j (w_{0x} - g_x) f_j = p_j^{(0)}, \quad (3.6.7)$$

допуская погрешности второго порядка малости.

Учитывая обозначения (3.2.21), запишем

$$(w_{0x} - g_x) f_j + (w_{0y} - g_y) y + (w_{0z} - g_z) z + \\ + \frac{d\omega}{dt} \cdot \varphi_j + \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial t^2} = C_j(t) \text{ на } \sigma_j. \quad (3.6.8)$$

Подставляя f_j из (3.6.8) в (3.5.4), получим для потенциала перемещений ψ_j краевые условия

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial n} = 0 \text{ на } S_j, \quad (3.6.9) \\ \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial t^2} + (w_{0x} - g_x) \frac{\partial \psi_j}{\partial n} + (w_{0y} - g_y) y + (w_{0z} - g_z) z + \\ + \frac{d\omega}{dt} \cdot \varphi_j = C_j(t) \text{ на } \sigma_j.$$

Согласно (3.5.4), зная потенциал перемещений ψ_j , можно определить функцию $f_j(y, z, t)$ по формуле

$$f_j = \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x} \right)_x \Big|_{x=x_j} \quad (3.6.10)$$

(на плоскости σ_j направление внешней нормали n совпадает с положительным направлением оси OX). Таким образом, функцию $f_j(y, z, t)$, определяющую колебания свободной поверхности жидкости в j -м баке, можно отыскать, решив уравнение Лапласа (3.5.3) с краевыми условиями (3.6.9).

В заключение покажем, что решение задачи о колебаниях свободной поверхности жидкости не зависит от вида функции $C_j(t)$, входящей в краевые условия (3.6.9). Введем в рассмотрение функцию времени $\gamma(t)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 \gamma}{dt^2} = C_j(t) - C_j^*(t). \quad (3.6.11)$$

Полагая в уравнении (3.5.3) и в краевых условиях (3.6.9)

$$\psi_j = \psi_j^* + \gamma(t), \quad (3.6.12)$$

получим согласно (3.6.11) дифференциальное уравнение

$$\nabla^2 \psi_j^* = 0 \quad (3.6.13)$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_j^*}{\partial n} &= 0 \quad \text{на } S_j; \\ \frac{\partial^2 \psi_j^*}{\partial t^2} + (w_{0x} - g_x) \frac{\partial \psi_j^*}{\partial n} + (w_{0y} - g_y)y + (w_{0z} - g_z)z + \\ &+ \frac{d\omega}{dt} \cdot \varphi_j = C_j^*(t) \quad \text{на } \sigma_j. \end{aligned} \quad (3.6.14)$$

Таким образом, подстановка (3.6.12) переводит краевую задачу для функции ψ_j , выраженную дифференциальным уравнением (3.5.3) с краевыми условиями (3.6.9), в аналогичную краевую задачу для функции ψ_j^* , содержащую вместо функции $C_j(t)$ функцию $C_j^*(t)$. При этом согласно (3.6.12) будет иметь место равенство

$$\left(\frac{\partial \psi_j^*}{\partial x} \right)_x = x_j = \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x} \right)_x = x_j,$$

и в соответствии с формулой (3.6.10), осуществляя переход от функции $C_j(t)$ к функции $C_j^*(t)$, мы получим в итоге одну и ту же функцию $f_j(y, z, t)$, определяющую колебания свободной поверхности в j -м баке. Выбор функций $C_j(t)$, $j = 1, 2, \dots$ в дальнейшем осуществляют исходя из удобства проведения необходимых расчетов.

§ 3.7. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛОВ ЖУКОВСКОГО

При расчете потенциалов Жуковского φ_{jx} , φ_{jy} , φ_{jz} будем предполагать, что все смачиваемые поверхности S_j , $j = 1, 2, \dots, N$, являются поверхностями вращения. При наличии внутрибаковых устройств, нарушающих это свойство смачиваемой поверхности, расчет потенциалов Жуковского весьма усложняется, исследование динамических эффектов, возникающих в этом случае, проводится обычно экспериментальными методами.

Потенциалы Жуковского φ_{jx} , φ_{jy} , φ_{jz} представляют собой проекции на координатные оси OX , OY , OZ вектора φ_j , определяемого уравнением (3.4.2) и красивым условием (3.4.3). Обозначим через r_j радиус-вектор центра плоской свободной поверхности жидкости σ_j в связанной системе координат $OXYZ$ (рис. 3.3) и вместо векторной функции φ_j введем в рассмотрение векторную функцию $\varphi_j^{(0)}$, определяемую соотношением

$$\varphi_j^{(0)} = \varphi_j - r_j \times r. \quad (3.7.1)$$

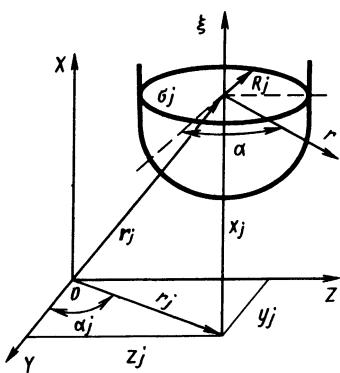


Рис. 3.3.

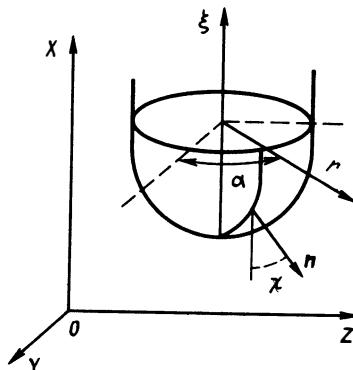


Рис. 3.4.

Согласно (3.7.1) будут иметь место равенства

$$\nabla^2 \varphi_j^{(0)} = \nabla^2 \varphi_j - \mathbf{r}_j \times \nabla^2 \mathbf{r}, \quad \frac{\partial \varphi_j^{(0)}}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} - \mathbf{r}_j \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial n}. \quad (3.7.2)$$

Пользуясь дифференциальным уравнением (3.4.2), краевым условием (3.4.3) и соотношениями

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{r} &= \nabla^2(x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z) = 0; \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial n} &= \frac{\partial}{\partial n}(x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z) = \cos(n, x) \mathbf{e}_x + \\ &+ \cos(n, y) \mathbf{e}_y + \cos(n, z) \mathbf{e}_z = \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (3.7.3)$$

получим из (3.7.2) дифференциальное уравнение

$$\nabla^2 \varphi_j^{(0)} = 0 \quad (3.7.4)$$

и краевое условие

$$\frac{\partial \varphi_j^{(0)}}{\partial n} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{n} \quad \text{на } S_j \text{ и } \sigma_j. \quad (3.7.5)$$

Воспользуемся в дальнейшем системой цилиндрических координат $\xi r \alpha$ (см. рис. 3.3). Связь между прямоугольными x, y, z и цилиндрическими ξ, r, α координатами будет определяться формулами

$$x = x_j + \xi; \quad y = y_j + r \cos \alpha; \quad z = z_j + r \sin \alpha, \quad (3.7.6)$$

где x_j, y_j, z_j — проекции вектора \mathbf{r}_j на координатные оси OX, OY, OZ (см. рис. 3.3). Дифференциальное уравнение Лапласа (3.7.4) в цилиндрических координатах $\xi r \alpha$ будет иметь вид [26]

$$\frac{\partial^2 \varphi_j^{(0)}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi_j^{(0)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_j^{(0)}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_j^{(0)}}{\partial \alpha^2} = 0. \quad (3.7.7)$$

Согласно (3.7.5) и (3.7.7) проекции вектора $\varphi_j^{(0)}$ на координатные оси OX , OY , OZ $\varphi_{jx}^{(0)}$, $\varphi_{jy}^{(0)}$, $\varphi_{jz}^{(0)}$ должны удовлетворять дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_{jx}^{(0)}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{jx}^{(0)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{jx}^{(0)}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_{jx}^{(0)}}{\partial \alpha^2} &= 0; \\ \frac{\partial^2 \varphi_{jy}^{(0)}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{jy}^{(0)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{jy}^{(0)}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_{jy}^{(0)}}{\partial \alpha^2} &= 0; \\ \frac{\partial^2 \varphi_{jz}^{(0)}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{jz}^{(0)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{jz}^{(0)}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_{jz}^{(0)}}{\partial \alpha^2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.7.8)$$

и краевым условиям

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{jx}^{(0)}}{\partial n} &= (y - y_j) n_z - (z - z_j) n_y; \\ \frac{\partial \varphi_{jy}^{(0)}}{\partial n} &= (z - z_j) n_x - (x - x_j) n_z; \\ \frac{\partial \varphi_{jz}^{(0)}}{\partial n} &= (x - x_j) n_y - (y - y_j) n_x \quad \text{на } S_j \text{ и } \sigma_j. \end{aligned} \quad (3.7.9)$$

Обозначим далее через χ угол между направлением внешней нормали n к поверхностям S_j и σ_j и направлением отрицательной полуоси ξ (рис. 3.4). Как видно из рисунка, проекции n_x , n_y и n_z единичного вектора внешней нормали n будут определяться формулами

$$n_x = -\cos \chi; \quad n_y = \sin \chi \cos \alpha; \quad n_z = \sin \chi \sin \alpha. \quad (3.7.10)$$

Согласно (3.7.6) и (3.7.10) краевые условия (3.7.9) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{jx}^{(0)}}{\partial n} &= 0; \\ \frac{\partial \varphi_{jy}^{(0)}}{\partial n} &= -(r \cos \chi + \xi \sin \chi) \sin \alpha; \\ \frac{\partial \varphi_{jz}^{(0)}}{\partial n} &= (r \cos \chi + \xi \sin \chi) \cos \alpha. \end{aligned} \quad (3.7.11)$$

Первое дифференциальное уравнение (3.7.8) и первое краевое условие (3.7.11) будут удовлетворены, если

$$\varphi_{jx}^{(0)} = 0. \quad (3.7.12)$$

Для определения функций $\varphi_{jy}^{(0)}$ и $\varphi_{jz}^{(0)}$ рассмотрим решение двумерного дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 \theta_j}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \theta_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_j}{\partial r} - \frac{\theta_j}{r^2} = 0, \quad (3.7.13)$$

регулярное на оси $r = 0$, иными словами неограниченно дифференцируемое в точках этой оси, и удовлетворяющее краевому условию

$$\frac{\partial \theta_j}{\partial n} = r \cos \chi + \xi \sin \chi \quad \text{на } l_j, \quad (3.7.14)$$

где l_j — образующая замкнутой поверхности вращения $S_j + \sigma_j$. Согласно (3.7.13) и (3.7.14) второе и третье дифференциальные уравнения (3.7.8) и второе и третье краевые условия (3.7.11) будут удовлетворены при условии

$$\varphi_{jy}^{(0)} = -\theta_j \sin \alpha; \quad \varphi_{jz}^{(0)} = \theta_j \cos \alpha \quad (3.7.15)$$

(на внешней нормали n полярный угол α сохраняет постоянное значение и, следовательно, $\partial \alpha / \partial n = 0$).

Спроектировав векторное равенство (3.7.1) на координатные оси OX , OY , OZ , получим формулы

$$\varphi_{jx} = \varphi_{jx}^{(0)} + y_j z - z_j y, \quad \varphi_{jy} = \varphi_{jy}^{(0)} + z_j x - x_j z,$$

$$\varphi_{jz} = \varphi_{jz}^{(0)} + x_j y - y_j x$$

или согласно (3.7.12) и (3.7.15)

$$\varphi_{jx} = y_j z - z_j y;$$

$$\varphi_{jy} = -\theta_j \sin \alpha + z_j x - x_j z; \quad (3.7.16)$$

$$\varphi_{jz} = \theta_j \cos \alpha + x_j y - y_j x.$$

Таким образом, решив двумерную краевую задачу, выраженную дифференциальным уравнением (3.7.13) и краевым условием (3.7.14), можно отыскать затем по формулам (3.7.16) потенциалы Жуковского φ_{jx} , φ_{jy} , φ_{jz} . Решить дифференциальное уравнение (3.7.13) с краевым условием (3.7.14) можно многими расчетными методами, в частности методом, изложенным в книге [23]. В отдельных случаях функция θ_j может быть найдена в виде разложения по тем или иным специальным функциям. Два таких случая подробно рассматривается в [2].

§ 3.8. КОЛЕБАНИЯ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ В ОСЕСИММЕТРИЧНОМ ТОПЛИВНОМ БАКЕ

Задача о колебаниях свободной поверхности жидкости, находящейся в топливном j -м баке, в § 3.6 была сведена к отысканию функции ψ_j ,

удовлетворяющей уравнению Лапласа (3.5.3) и краевым условиям (3.6.9). В случае осевой симметрии бака краевую задачу, выраженную дифференциальным уравнением (3.5.3) и краевыми условиями (3.6.9), можно существенно упростить.

При переходе от прямоугольных координат $OXYZ$ к цилиндрическим координатам $\xi r \alpha$ в § 3.7 были получены формулы (3.7.16) для потенциалов Жуковского φ_{jx} , φ_{jy} , φ_{jz} . В соответствии с формулами перехода (3.7.6) соотношениям (3.7.16) можно придать вид

$$\begin{aligned}\varphi_{jx} &= r(y_j \sin \alpha - z_j \cos \alpha); \\ \varphi_{jy} &= z_j \xi - (x_j r + \theta_j) \sin \alpha; \\ \varphi_{jz} &= -y_j \xi + (x_j r + \theta_j) \cos \alpha.\end{aligned}\tag{3.8.1}$$

На поверхности σ_j координата ξ обращается в нуль (см. рис. 3.3). Таким образом, согласно (3.8.1) должны иметь место равенства

$$\begin{aligned}\varphi_{jx} &= r(y_j \sin \alpha - z_j \cos \alpha); \\ \varphi_{jy} &= -[x_j r + (\theta_j)_{\xi=0}] \sin \alpha; \\ \varphi_{jz} &= [x_j r + (\theta_j)_{\xi=0}] \cos \alpha \text{ на } \sigma_j.\end{aligned}\tag{3.8.2}$$

Координаты y_j , z_j центра плоской свободной поверхности можно представить в виде

$$y_j = r_j \cos \alpha_j; \quad z_j = r_j \sin \alpha_j,\tag{3.8.3}$$

где r_j – расстояние от оси j -го бака до оси OX ; α_j – угол между плоскостью $z = 0$ и плоскостью, проходящей через ось этого бака и ось OX (см. рис. 3.3).

В соответствии с равенствами (3.8.3) первую формулу (3.8.2) можно преобразовать следующим образом:

$$\varphi_{jx} = r_j r \sin(\alpha - \alpha_j) \text{ на } \sigma_j.\tag{3.8.4}$$

Функция θ_j представляет собой решение дифференциального уравнения (3.7.13), регулярное на оси ξ . Согласно (3.7.13) при $r \rightarrow 0$ отношение θ_j/r стремится к конечному пределу

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\theta_j}{r} = \left(\frac{\partial \theta_j}{\partial r} \right)_r = 0.\tag{3.8.5}$$

Отсюда, в частности, вытекает конечность в точке $r = 0$ отношения

$$K_j = -(\theta_j)_{\xi=0}/r.\tag{3.8.6}$$

Вводя в рассмотрение функцию K_j , определяемую соотношением (3.8.6), можно преобразовать вторую и третью формулы (3.8.2):

$$\begin{aligned}\varphi_{jy} &= -(x_j - K_j)r \sin \alpha; \\ \varphi_{jz} &= (x_j - K_j)r \cos \alpha \text{ на } \sigma_j.\end{aligned}\quad (3.8.7)$$

Согласно (3.7.6), (3.8.4) и (3.8.7) краевым условиям (3.6.9) можно придать вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi_j}{\partial n} &= 0 \text{ на } S_j; \\ \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial t^2} + (w_{0x} - g_x) \frac{\partial \psi_j}{\partial n} + (w_{0y} - g_y)(y_j + r \cos \alpha) + \\ &+ (w_{0z} - g_z)(z_j + r \sin \alpha) + \frac{d\omega_x}{dt} r_j r \sin(\alpha - \alpha_j) - \\ &- \frac{d\omega_y}{dt} (x_j - K_j) r \sin \alpha + \frac{d\omega_z}{dt} (x_j - K_j) r \cos \alpha = C_j(t) \text{ на } \sigma_j.\end{aligned}\quad (3.8.8)$$

Представим уравнение Лапласа (3.5.3) в цилиндрических координатах $\xi r \alpha$, получим для функции ψ_j краевую задачу, образуемую дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial^2 \psi_j}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_j}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial \alpha^2} = 0 \quad (3.8.9)$$

и краевыми условиями (3.8.8).

В § 3.6 было показано, что решение задачи о колебаниях свободной поверхности жидкости, находящейся в j -м баке, не зависит от вида функции $C_j(t)$, входящей в краевые условия для потенциала перемещений ψ_j . Для упрощения краевых условий (3.8.8) положим

$$C_j(t) = y_j(w_{0y} - g_y) + z_j(w_{0z} - g_z). \quad (3.8.10)$$

В этом случае краевые условия (3.8.8) примут вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi_j}{\partial n} &= 0 \text{ на } S_j; \\ \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial t^2} + (w_{0x} - g_x) \frac{\partial \psi_j}{\partial n} + r_j \frac{d\omega_x}{dt} r \sin(\alpha - \alpha_j) + [w_{0y} - g_y + \\ &+ (x_j - K_j) \frac{d\omega_z}{dt}] r \cos \alpha + [w_{0z} - g_z - (x_j - K_j) \frac{d\omega_y}{dt}] r \sin \alpha = \\ &= 0 \text{ на } \sigma_j.\end{aligned}\quad (3.8.11)$$

Образующая l_j поверхности вращения $S_j + \sigma_j$ складывается из образующей смачиваемой поверхности S_j (эту образующую будем обозначать

в дальнейшем через l_j^*) и из прямолинейного отрезка $\xi = 0$, $0 < r < R_j$, где R_j – радиус плоской сводобной поверхности σ_j (см. рис. 3.3). Рассмотрим решение двумерного дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 \psi_{jx}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi_{jx}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_{jx}}{\partial r} - \frac{\psi_{jx}}{r^2} = 0, \quad (3.8.12)$$

регулярное на оси $r = 0$ и удовлетворяющее краевым условиям

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_{jx}}{\partial n} &= 0 \quad \text{на } l_j^*; \\ \frac{\partial^2 \psi_{jx}}{\partial t^2} + (w_{0x} - g_x) \frac{\partial \psi_{jx}}{\partial \xi} + rr_j \frac{d\omega_x}{dt} &= 0 \end{aligned} \quad (3.8.13)$$

при $\xi = 0$, $0 < r < R_j$,

функцию ψ_{jy} , регулярную на оси ξ и удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 \psi_{jy}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi_{jy}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_{jy}}{\partial r} - \frac{\psi_{jy}}{r^2} = 0 \quad (3.8.14)$$

и краевым условиям

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_{jy}}{\partial n} &= 0 \quad \text{на } l_j^*; \\ -\frac{\partial^2 \psi_{jy}}{\partial t^2} + (w_{0x} - g_x) \frac{\partial \psi_{jy}}{\partial \xi} + r [w_{0y} - g_y + (x_j - K_j) \frac{d\omega_z}{dt}] &= 0 \end{aligned} \quad (3.8.15)$$

при $\xi = 0$, $0 < r < R_j$

и решение ψ_{jz} дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 \psi_{jz}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi_{jz}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_{jz}}{\partial r} - \frac{\psi_{jz}}{r^2} = 0, \quad (3.8.16)$$

регулярное на оси ξ и удовлетворяющее краевым условиям

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_{jz}}{\partial n} &= 0 \quad \text{на } l_j^*; \\ \frac{\partial^2 \psi_{jz}}{\partial t^2} + (w_{0x} - g_x) \frac{\partial \psi_{jz}}{\partial \xi} + r [w_{0z} - g_z - (x_j - K_j) \times & \\ \times \frac{d\omega_y}{dt}] &= 0 \end{aligned} \quad (3.8.17)$$

при $\xi = 0$, $0 < r < R_j$.

Согласно (3.8.12) – (3.8.17) функция

$$\psi_j = \psi_{jx} \sin(\alpha - \alpha_j) + \psi_{jy} \cos \alpha + \psi_{jz} \sin \alpha \quad (3.8.18)$$

будет представлять собой решение уравнения Лапласа (3.8.9), регулярное внутри замкнутой поверхности $S_j + \sigma_j$ и удовлетворяющее краевым условиям (3.5.11) (на поверхности σ_j направление нормали n совпадает с направлением положительной полуоси ξ).

Таким образом, в случае осевой симметрии j -го бака трехмерную задачу, выраженную дифференциальным уравнением (3.8.9) и краевыми условиями (3.8.11), можно свести к двумерным краевым задачам для функции ψ_{jx} , ψ_{jy} , ψ_{jz} .

В соответствии с формулами (3.6.9), (3.7.6) и (3.8.18) функция $f_j(r, \alpha, t)$, определяющая колебания свободной поверхности жидкости в j -м баке, будет иметь вид

$$f_j = \left(\frac{\partial \psi_{jx}}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} \sin(\alpha - \alpha_j) + \left(\frac{\partial \psi_{jy}}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} \cos \alpha + \\ + \left(\frac{\partial \psi_{jz}}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} \sin \alpha. \quad (3.8.19)$$

Кажущееся осевое ускорение $w_{0x} - g_x$ фигурирует в краевых условиях (3.8.13), (3.8.15) и (3.8.17) в качестве коэффициента при частной производной по ξ от искомой функции. Из поперечных кажущихся ускорений $w_{0y} - g_y$, $w_{0z} - g_z$ и угловых ускорений $d\omega_x/dt$, $d\omega_y/dt$, $d\omega_z/dt$ краевые условия (3.8.13) содержат лишь одно $d\omega_x/dt$. В краевые условия (3.8.15) входят ускорения $w_{0y} - g_y$ и $d\omega_z/dt$, а в краевые условия (3.8.17) – ускорения $w_{0z} - g_z$ и $d\omega_y/dt$. Таким образом, функция ψ_{jx} определяет колебания свободной поверхности, вызываемые колебаниями корпуса ракеты в плоскости крена, функция ψ_{jz} – в плоскости рыскания, функция ψ_{jy} – в плоскости тангажа.

В соответствии с формулой (3.8.19) колебания свободной поверхности жидкости в j -м баке, вызываемые вращением ракеты вокруг ее продольной оси, характеризуются линией узлов, лежащей в плоскости $\alpha = \alpha_j$; вдоль этой линии функция f_j всегда остается равной нулю. Как видно из рис. 3.3, плоскость $\alpha = \alpha_j$ проходит всегда через ось OX . Колебания свободной поверхности жидкости, порождаемые колебаниями корпуса ракеты в плоскости тангажа, согласно (3.8.19) характеризуется линией узлов, лежащей в плоскости $\alpha = \pi/2$, т.е. в плоскости $y = y_j$ (см. рис. 3.3). Колебания свободной поверхности, вызываемые колебаниями ракеты в плоскости рыскания, характеризуются линией узлов, лежащей в плоскости $z = z_j$.

Согласно (3.8.6) величину K_j , входящую в краевые условия (3.8.15) и (3.8.17), можно отыскать, решив краевую задачу, выраженную дифферен-

циальным уравнением (3.7.13) и краевым условием (3.7.14). Пока j -й бак не опорожняется, K_j от времени не зависит и представляет собой функцию одной лишь переменной r . В процессе опорожнения j -го бака возникает зависимость величины K_j от времени t , так как вид функции θ_j зависит от уровня заполнения бака.

§ 3.9. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СВОБОДНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ЖИДКОСТЕЙ В ТОПЛИВНЫХ БАКАХ

В § 3.8 мы получили для функций ψ_{jx} , ψ_{jy} и ψ_{jz} дифференциальные уравнения (3.8.12), (3.8.14) и (3.8.16) с краевыми условиями (3.8.13), (3.8.15) и (3.8.17). Для этих трех краевых задач можно установить единую запись, введя в рассмотрение функцию ϑ_j , удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 \vartheta_j}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \vartheta_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta_j}{\partial r} - \frac{\vartheta_j}{r^2} = 0, \quad (3.9.1)$$

регулярную на оси $r = 0$ и удовлетворяющую краевым условиям

$$\frac{\partial \vartheta_j}{\partial n} = 0 \text{ на } l_j^*;$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta_j}{\partial t^2} + (w_{0x} - g_x) \frac{\partial \vartheta_j}{\partial \xi} + G_j(r, t) = 0 \quad (3.9.2)$$

при $\xi = 0$, $0 < r < R_j$,

где $G_j(r, t)$ – некоторая заданная функция. При

$$G_j = rr_j \frac{d\omega_x}{dt} \quad (3.9.3)$$

решение краевой задачи, выраженной дифференциальным уравнением (3.9.1) и краевыми условиями (3.9.2), будет определять функцию ψ_{jx} ;

$$G_j = r[w_{0y} - g_y + (x_j - K_j) \frac{d\omega_z}{dt}] \quad (3.9.4)$$

– функцию ψ_{jy} и при

$$G_j = r[w_{0z} - g_z - (x_j - K_j) \frac{d\omega_y}{dt}] \quad (3.9.5)$$

– функцию ψ_{jz} .

Согласно (3.9.3) – (3.9.5) при отсутствии поперечных кажущихся ускорений $w_{0y} - g_y$, $w_{0z} - g_z$ и угловых ускорений $d\omega_x/dt$, $d\omega_y/dt$, $d\omega_z/dt$ во всех трех случаях функция $G_j(r, t)$ будет тождественно равна нулю и краевые условия (3.9.2) будут вырождаться в однородные краевые условия

$$\frac{\partial \vartheta_j}{\partial n} = 0 \quad \text{на } l_j^*; \quad (3.9.6)$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta_j}{\partial t^2} + (w_{0x} - g_x) \frac{\partial \vartheta_j}{\partial \xi} = 0 \quad \text{при } \xi = 0, 0 < r < R_j.$$

Дифференциальное уравнение (3.9.1) с краевыми условиями (3.9.6) имеет очевидное или, как принято говорить в таких случаях, тривиальное решение $\vartheta_j = 0$. Этому тривиальному решению соответствует тождественное равенство нулю функций ψ_{jx} , ψ_{jy} и ψ_{jz} , а следовательно, и функции f_j , определяющей в соответствии с формулой (3.8.19) колебания свободной поверхности жидкости в j -м баке. Таким образом, при отсутствии попечных кажущихся и угловых ускорений одним из возможных движений жидкостей, находящихся в топливных баках, является такое, при котором свободные поверхности жидкостей не колеблются, оставаясь в процессе движения плоскими и нормальными к продольной оси ракеты OX . Однако, как будет видно из дальнейшего, наряду с тривиальным решением $\vartheta_j = 0$ дифференциальное уравнение (3.9.1) с однородными краевыми условиями (3.9.6) имеет бесконечную последовательность линейно независимых нетривиальных решений, отличных от решения $\vartheta_j = 0$. Колебания свободной поверхности жидкости в j -м баке, соответствующие этим нетривиальным решениям дифференциального уравнения (3.9.1) с краевыми условиями (3.9.6), называют собственными колебаниями свободной поверхности.

Задача о собственных колебаниях свободной поверхности жидкости может быть решена методом разделения переменных, который в математической физике принято называть методом Фурье. Будем искать нетривиальное решение дифференциального уравнения (3.9.1), регулярное на оси $r = 0$ и удовлетворяющее краевым условиям (3.9.6), в виде произведения двух функций

$$\vartheta_j(\xi, r, t) = \theta_j(\xi, r) \beta_j(t). \quad (3.9.7)$$

Подставляя (3.9.7) в (3.9.1) и (3.9.6), получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 \theta_j}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \theta_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_j}{\partial r} - \frac{\theta_j}{r^2} = 0, \quad (3.9.8)$$

краевое условие

$$\frac{\partial \theta_j}{\partial n} = 0 \quad \text{на } l_j^* \quad (3.9.9)$$

и краевое условие

$$\theta_j \frac{d^2 \beta_j}{dt^2} + (w_{0x} - g_x) \frac{d \theta_j}{d \xi} \beta_j = 0 \quad \text{при } \xi = 0, 0 < r < R_j. \quad (3.9.10)$$

Условие (3.9.10) можно преобразовать так:

$$\left[\frac{\partial \theta_j / \partial \xi}{\theta_j} \right]_{\xi=0} = - \frac{d^2 \beta_j / dt^2}{(w_{0x} - g_x) \beta_j} . \quad (3.9.11)$$

Левая часть равенства (3.9.11) не зависит от переменной t , а правая часть – от переменной r . Таким образом, отношения, входящие в равенство (3.9.11), должны представлять собой некоторую константу. Обозначая константу через λ_j , получим для функции θ_j краевое условие

$$\frac{\partial \theta_j / \partial \xi}{\theta_j} = \lambda_j \quad \text{при } \xi = 0, \quad 0 < r < R_j, \quad (3.9.12)$$

а для функции β_j дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 \beta_j}{dt^2} + \lambda_j (w_{0x} - g_x) \beta_j = 0. \quad (3.9.13)$$

Таким образом, задача о собственных колебаниях свободной поверхности жидкости, находящейся в j -м топливном баке, сводится к отысканию тех значений числового параметра λ_j , при которых дифференциальное уравнение (3.9.8) имеет нетривиальные решения, регулярные на оси ξ и удовлетворяющие краевым условиям (3.9.9) и (3.9.12). Эти значения параметра λ_j называют собственными значениями краевой задачи, выраженной дифференциальным уравнением (3.9.8) и краевыми условиями (3.9.9) и (3.9.12); нетривиальные решения этой краевой задачи называют ее собственными функциями. Основные свойства собственных функций и собственных значений дифференциального уравнения (3.9.8) с краевыми условиями (3.9.9) и (3.9.12) рассмотрены в следующем параграфе.

§ 3.10. ФОРМЫ И ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Чтобы исследовать собственные функции и собственные значения краевой задачи, образуемой дифференциальным уравнением (3.9.8) и краевыми условиями (3.9.9) и (3.9.12), введем в рассмотрение функцию $U_j(\xi, r, \alpha)$

$$U_j = \theta_j \cos \alpha. \quad (3.10.1)$$

Согласно (3.9.8), (3.9.9) и (3.9.12) функция U_j должна удовлетворять уравнению Лапласа

$$\frac{\partial U_j}{\partial \xi^2} + \frac{\partial U_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_j}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_j}{\partial \alpha^2} = 0 \quad (3.10.2)$$

и краевым условиям

$$\frac{\partial U_j}{\partial n} = 0 \quad \text{на } S_j; \quad \frac{\partial U_j}{\partial n} = \lambda_j U_j \quad \text{на } \sigma_j \quad (3.10.3)$$

(нацомним, что контур l_j^* является образующей смачиваемой поверхности

вращения S_j , а прямолинейный отрезок $\xi = 0, 0 < r < R_j$ – образующей плоской свободной поверхности σ_j).

Докажем, что дифференциальное уравнение (3.9.8) может иметь нетривиальные решения, удовлетворяющие краевым условиям (3.9.9) и (3.9.12), только при вещественных и при этом положительных значениях параметра λ_j . Допустим, что некоторое комплексное значение параметра λ_j является собственным значением краевой задачи, образуемой дифференциальным уравнением (3.9.8) и краевыми условиями (3.9.9) и (3.9.12). Соответствующая собственная функция θ_j будет комплексной, функция U_j , найденная по формуле (3.10.1), тоже будет комплексной. Согласно (3.10.3) будет иметь место равенство

$$\int_{S_j + \sigma_j} \frac{\partial U_j}{\partial n} \bar{U}_j d\sigma = \lambda_j \int_{\sigma_j} U_j \bar{U}_j d\sigma = \lambda_j \int_{\sigma_j} |U_j|^2 d\sigma. \quad (3.10.4)$$

Преобразуя поверхностный интеграл в объемный посредством формул Гаусса–Остроградского, найдем

$$\begin{aligned} \int_{S_j + \sigma_j} \frac{\partial U_j}{\partial n} \bar{U}_j d\sigma &= \int_{S_j + \sigma_j} \bar{U}_j \left[\frac{\partial U_j}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial U_j}{\partial y} \cos(n, y) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial U_j}{\partial z} \cos(n, z) \right] d\sigma = \int_{V_j} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\bar{U}_j \frac{\partial U_j}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{U}_j \frac{\partial U_j}{\partial y}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{U}_j \frac{\partial U_j}{\partial z}) \right] dv = \int_{V_j} (\bar{U}_j \nabla^2 U_j + \frac{\partial U_j}{\partial x} \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x} + \frac{\partial U_j}{\partial y} \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial y} + \\ &\quad + \frac{\partial U_j}{\partial z} \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial z}) dv = \int_{V_j} (|\frac{\partial U_j}{\partial x}|^2 + |\frac{\partial U_j}{\partial y}|^2 + |\frac{\partial U_j}{\partial z}|^2) dv, \end{aligned} \quad (3.10.5)$$

так как согласно (3.10.2) $\nabla^2 U_j = 0$.

Функция θ_j является нетривиальным решением дифференциального уравнения (3.9.8) и, таким образом, в соответствии с формулой (3.10.1) функция U_j не может сохранять постоянное значение в области V_j . Отсюда вытекают неравенства

$$|\frac{\partial U_j}{\partial x}|^2 + |\frac{\partial U_j}{\partial y}|^2 + |\frac{\partial U_j}{\partial z}|^2 \neq 0 \quad \text{в } V_j \quad (3.10.6)$$

$$\text{и } U_j \neq 0 \quad \text{на } \sigma_j \quad (3.10.7)$$

(при $U_j \equiv 0$ на σ_j краевая задача, образуемая дифференциальным уравнением Лапласа (3.10.2) и краевыми условиями (3.10.3), вырождается в однородную задачу Неймана, общее решение которой имеет вид $U_j = \text{const}$). Согласно (3.10.4) и (3.10.5) должно иметь место равенство

$$\lambda_j = \frac{\int_V \left(\left| \frac{\partial U_j}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial U_j}{\partial y} \right|^2 + \left| \frac{\partial U_j}{\partial z} \right|^2 \right) d\sigma}{\int |U_j|^2 d\sigma}. \quad (3.10.8)$$

В соответствии с неравенствами (3.10.6) и (3.10.7) интегралы, входящие в формулу (3.10.8), вещественны и положительны. Таким образом, предположив, что краевая задача, образуемая дифференциальным уравнением (3.9.8) и краевыми условиями (3.9.9) и (3.9.12), имеет комплексное собственное значение, мы пришли к противоречию, тем самым доказав вещественность собственных значений данной краевой задачи. Попутно, установив равенство (3.10.8), мы доказали также положительность этих собственных значений.

Учитывая положительность собственных значений λ_j и осевого кажущегося ускорения $w_{0x} - g_x$, можно придать дифференциальному уравнению (3.9.13) вид

$$\frac{d^2 \beta_j}{dt^2} + \omega_j^2 \beta_j = 0, \quad (3.10.9)$$

$$\text{где } \omega_j = \sqrt{\lambda_j (w_{0x} - g_x)}. \quad (3.10.10)$$

Решая задачу о собственных колебаниях свободной поверхности жидкости методом Фурье, мы установили возможность возникновения собственных колебаний, в процессе которых функции ψ_{jx} , ψ_{jy} и ψ_{jz} принимают значения, определяемые формулой (3.9.7). Рассмотрим в качестве примера собственные колебания свободной поверхности жидкости в плоскости тангенса. Полагая в соответствии с формулой (3.9.7)

$$\psi_{jy} = \theta_j(\xi, r) \beta_j(t), \quad (3.10.11)$$

исследуем функцию $f_j(r, \alpha, t)$, определяющую отклонения точек свободной поверхности жидкости от плоскости σ_j . Если рассматривать движение, совершающееся корпусом ракеты в плоскости тангенса, и возникающие при этом колебания свободных поверхностей жидкостей в топливных баках согласно (3.8.19) охарактеризовать функциями

$$f_j = \left(\frac{\partial \psi_{jy}}{\partial \xi} \right)_\xi = 0 \cos \alpha, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (3.10.12)$$

то можно записать равенство

$$f_j = \beta_j(t) F_j(r) \cos \alpha, \quad (3.10.13)$$

$$\text{где } F_j(r) = \left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right)_\xi = 0. \quad (3.10.14)$$

В соответствии с равенством (3.10.13) в сечении свободной поверхности произвольной плоскостью, проходящей через ось бака, отклонения точек свободной поверхности от плоскости σ_j , определяемые функцией f_j , в любой момент времени t пропорциональны значениям, принимаемым функцией $F_j(r)$. Коэффициент пропорциональности зависит от положения секущей плоскости и от значений, принимаемых временным множителем $\beta_j(t)$. Согласно (3.10.13) наибольшие отклонения точек свободной поверхности от плоскости σ_j возникают в полуплоскостях $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi$, в полуплоскостях $\alpha = \pm \pi/2$ перемещения f_j отсутствуют, через эти полуплоскости проходит линия узлов. Временной множитель $\beta_j(t)$ определяется дифференциальным уравнением (3.10.9), величина ω_j , входящая в это уравнение, характеризует частоту рассматриваемых нами колебаний свободной поверхности. Таким образом, функция $F_j(r)$ определяет форму собственных колебаний свободной поверхности, а величина ω_j – их частоту.

Согласно (3.10.10) частота собственных колебаний пропорциональна корню квадратному из кажущегося осевого ускорения $w_{0x} - g_x$, иными словами пропорциональна корню квадратному из осевой перегрузки. Изменения осевой перегрузки в процессе полета ракеты влекут за собой изменения частоты собственных колебаний ω_j . Пока уровень топлива в j -м баке не понижается, числовой множитель λ_j и функция $F_j(r)$ не изменяются. В процессе опорожнения j -го бака меняется контур l_j^* , входящий в краевое условие (3.9.9), и радиус R_j плоской свободной поверхности σ_j , входящий в краевое условие (3.9.12). В связи с этим возникает зависимость от времени t собственного значения λ_j и собственной функции θ_j краевой задачи, образуемой дифференциальным уравнением (3.9.8) и краевыми условиями (3.9.9) и (3.9.12). Согласно (3.10.14) зависимость от времени функции θ_j влечет за собой зависимость от времени функции F_j , определяющей форму собственных колебаний свободной поверхности жидкости.

В случае зависимости от времени t функции θ_j решение (3.9.7) дифференциального уравнения (3.9.1) с краевыми условиями (3.9.6) становится уже приближенным, так как при подстановке функции θ_j из (3.9.7) во второе из краевых условий (3.9.6) следует дифференцировать по времени не только функцию β_j , но и функцию θ_j . Однако теоретические и экспериментальные исследования свидетельствуют о несущественности возникающих в данном случае погрешностей.

Формы собственных колебаний свободных поверхностей жидкостей обладают интегральным свойством, которое принято называть свойством ортогональности. Чтобы установить это свойство, рассмотрим две собственные функции θ_j и θ_j^* , соответствующие двум различным собственным значениям λ_j и λ_j^* краевой задачи, образуемой дифференциальным урав-

нением (3.9.8) и краевыми условиями (3.9.9) и (3.9.12). Наряду с функцией (3.10.1), удовлетворяющей дифференциальному уравнению (3.10.2) и краевым условиям (3.10.3), будем рассматривать функцию

$$U_j^* = \theta_j^* \cos \alpha, \quad (3.10.15)$$

удовлетворяющую уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 U_j^*}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U_j^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_j^*}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_j^*}{\partial \alpha^2} = 0 \quad (3.10.16)$$

и краевым условиям

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_j^*}{\partial n} &= 0 \quad \text{на } S_j; \\ \frac{\partial U_j^*}{\partial n} &= \lambda_j^* U_j^* \quad \text{на } \sigma_j. \end{aligned} \quad (3.10.17)$$

В соответствии с формулой Грина будет иметь место равенство

$$\int_{S_j + \sigma_j} U_j \frac{\partial U_j^*}{\partial n} d\sigma = \int_{S_j + \sigma_j} U_j^* \frac{\partial U_j}{\partial n} d\sigma. \quad (3.10.18)$$

Пользуясь краевыми условиями (3.10.3) и (3.10.17), можно привести равенство (3.10.18) к виду

$$\lambda_j^* \int_{\sigma_j} U_j U_j^* d\sigma = \lambda_j \int_{\sigma_j} U_j U_j^* d\sigma,$$

$$\text{или } (\lambda_j^* - \lambda_j) \int_{\sigma_j} U_j U_j^* d\sigma = 0. \quad (3.10.19)$$

Отсюда вытекает зависимость

$$\int_{\sigma_j} U_j U_j^* d\sigma = 0, \quad (3.10.20)$$

так как по условию $\lambda_j^* \neq \lambda_j$.

Учитывая, что интеграл от функции f по плоской свободной поверхности жидкости σ_j может быть представлен в виде

$$\int_{\sigma_j} f d\sigma = \int_0^{R_j} \int_{-\pi}^{\pi} f r dr d\alpha, \quad (3.10.21)$$

где R_j – радиус свободной поверхности σ_j , равенство (3.10.20) согласно (3.10.1) и (3.10.15) можно привести к виду

$$\int_0^{R_j} \int_0^{2\pi} (\Theta_j \Theta_j^*)_{\xi=0} r \cos^2 \alpha dr d\alpha = 0$$

или

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha d\alpha \int_0^{R_j} (\Theta_j \Theta_j^*)_{\xi=0} r dr = 0. \quad (3.10.22)$$

Соотношению (3.10.22) можно придать вид

$$\int_0^{R_j} (\Theta_j \Theta_j^*)_{\xi=0} r dr = 0, \quad (3.10.23)$$

так как $\int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha d\alpha \neq 0$.

В соответствии с краевым условием (3.9.12) должны иметь место равенства

$$(\Theta_j)_{\xi=0} = \frac{1}{\lambda_j} \left(\frac{\partial \Theta_j}{\partial \xi} \right)_{\xi=0}; \quad (\Theta_j^*)_{\xi=0} = \frac{1}{\lambda_j^*} \left(\frac{\partial \Theta_j^*}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} \quad (3.10.24)$$

при $0 < r < R_j$.

Подставляя (3.10.24) в (3.10.23), получим зависимость

$$\int_0^{R_j} \left(\frac{\partial \Theta_j}{\partial \xi} - \frac{\partial \Theta_j^*}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} r dr = 0,$$

или согласно (3.10.14)

$$\int_0^{R_j} F_j(r) F_j^*(r) r dr = 0, \quad (3.10.25)$$

$$\text{где } F_j^*(r) = \left(\frac{\partial \Theta_j^*}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} \quad (3.10.26)$$

— функция, определяющая форму собственных колебаний, соответствующую собственному значению краевой задачи, образуемой дифференциальным уравнением (3.9.8) и краевыми условиями (3.9.9) и (3.9.12).

Таким образом, любые две формы собственных колебаний свободной поверхности, соответствующие различным собственным значениям λ_j и λ_j^* , связаны между собой интегральной зависимостью (3.10.25), выражющей так называемое свойство ортогональности форм собственных колебаний.

В этом параграфе мы показали, что формы и частоты собственных колебаний свободной поверхности жидкости, находящейся в j -м баке, можно определить, отыскав собственные значения и собственные функции краевой задачи, образуемой дифференциальным уравнением (3.9.8) и краевыми условиями (3.9.9) и (3.9.12). В качестве простейшего примера в следующем параграфе приводится решение краевой задачи для случая цилиндрической конфигурации топливного бака. Форму и частоту собственных колебаний свободных поверхностей жидкости в топливных баках произвольной осесимметричной конфигурации удобно рассчитывать методом последовательных приближений, который подробно рассмотрен в работе [2].

§ 3.11. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ТОПЛИВНОМ БАКЕ

В рассматриваемом случае контур l_j^* складывается из двух прямолинейных отрезков $\xi = -H$, $0 < r < R$ и $r = R$, $-H < \xi < 0$ (рис. 3.5). Таким образом, краевые условия (3.9.9) и (3.9.12) в данном случае будут иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_j}{\partial \xi} &= 0 \quad \text{при } \xi = -H, \quad 0 < r < R; \\ \frac{\partial \theta_j}{\partial r} &= 0 \quad \text{при } r = R, \quad -H < \xi < 0; \\ \frac{\partial \theta_j}{\partial \xi} &= \lambda_j \theta_j \quad \text{при } \xi = 0, \quad 0 < r < R \end{aligned} \quad (3.11.1)$$

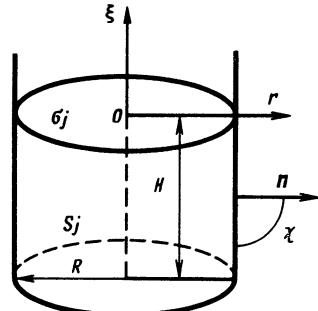


Рис. 3.5.

(радиус R ; плоской свободной поверхности σ_j в рассматриваемом примере равен радиусу цилиндрического бака R). В соответствии с [2] будем искать решение дифференциального уравнения (3.9.8), регулярное на оси ξ и удовлетворяющее краевым условиям (3.11.1), в виде

$$\theta_j = (A e^{\lambda \xi} + B e^{-\lambda \xi}) J_1(kr). \quad (3.11.2)$$

Для того чтобы функция θ_j , определяемая формулой (3.11.2), удовлетворяла первому и третьему из краевых условий (3.11.1), константы A и B должны удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned} A e^{-\lambda H} - B e^{\lambda H} &= 0; \\ (\lambda - \lambda_j) A - (\lambda + \lambda_j) B &= 0. \end{aligned} \quad (3.11.3)$$

Приравнивая нуль определитель однородной системы уравнений (3.11.3), получим уравнение

$$(\lambda + \lambda_j) e^{-\lambda H} - (\lambda - \lambda_j) e^{\lambda H} = 0, \quad (3.11.4)$$

которому должен удовлетворять параметр λ_j , для того чтобы уравнения (3.11.3) имели нетривиальное решение. Определяя λ_j из уравнения (3.11.4), найдем

$$\lambda_j = \lambda \frac{e^{\lambda H} - e^{-\lambda H}}{e^{\lambda H} + e^{-\lambda H}} = \lambda \operatorname{th} \lambda H. \quad (3.11.5)$$

Подставляя (3.11.2) во второе краевое условие (3.11.1), получим уравнение

$$J'_1(\lambda R) = 0. \quad (3.11.6)$$

Решая уравнение (3.11.6), получим для константы λ бесконечную последовательность значений

$$\lambda = \nu_k / R, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.11.7)$$

где ν_1, ν_2, \dots – последовательность решений трансцендентного уравнения

$$J'_1(\nu) = 0. \quad (3.11.8)$$

Подставляя (3.11.7) в (3.11.5), найдем бесконечную последовательность собственных значений рассматриваемой краевой задачи

$$\lambda_j = \frac{\nu_k}{R} \operatorname{th} \frac{\nu_k H}{R}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.11.9)$$

Уравнения (3.11.3) имеют решения

$$A = \frac{C}{2} e^{\lambda H}; \quad B = \frac{C}{2} e^{-\lambda H}, \quad (3.11.10)$$

где C – произвольная константа.

Подставляя (3.11.10) в (3.11.2), получим

$$\theta_j = C \operatorname{ch} \lambda (H + \xi) J_1(\lambda r). \quad (3.11.11)$$

Согласно (3.11.7) и (3.11.11) собственные функции рассматриваемой краевой задачи должны иметь вид

$$\theta_j = C_k \operatorname{ch} \frac{\nu_k (H + \xi)}{R} J_1 \left(\frac{\nu_k r}{R} \right), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.11.12)$$

где C_1, C_2, \dots – произвольные константы.

Подставляя (3.11.9) в (3.10.10) и (3.11.12) в (3.10.14), получим выражения для частот собственных колебаний свободной поверхности

$$\omega_j = \sqrt{\frac{\nu_k}{R} \operatorname{th} \frac{\nu_k H}{R}} (\omega_{0x} - g_x), \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.11.13)$$

и для форм собственных колебаний

$$F_j(r) = C_k \frac{\nu_k}{R} \operatorname{sh} \frac{\nu_k H}{R} J_1 \left(\frac{\nu_k r}{R} \right), \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.11.14)$$

Придавая постоянным C_1, C_2, \dots значения, определяемые соотношением

$$C_k = \frac{R}{\nu_k \operatorname{sh} \frac{\nu_k H}{R}}, \quad (3.11.15)$$

получим для форм собственных колебаний свободной поверхности выражения

$$F_j(r) = J_1 \left(\frac{\nu_k r}{R} \right), \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.11.16)$$

Согласно (3.11.13) при $H/R \rightarrow \infty$ собственные частоты ω_j стремятся к конечным пределам $\omega_j^{(0)}$,

$$\omega_j^{(0)} = \sqrt{\frac{\nu_k}{R} (\omega_{0x} - g_x)}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.11.17)$$

На рис. 3.6 показана зависимость отношений $\omega_j/\omega_j^{(0)}$ от H/R для первых трех тонов собственных колебаний ($k = 1, 2, 3$).

В соответствии с формулой (3.11.16) в рассматриваемом случае формы собственных колебаний от степени заполнения топливного бака не зависят. На рис. 3.7 показаны виды сечений свободной поверхности жидкости плоскостью, проходящей через ось бака, для первых трех тонов колебаний ($k = 1, 2, 3$).

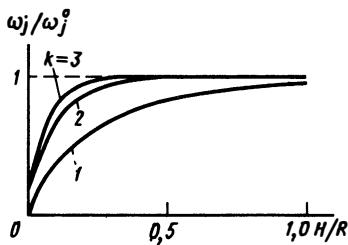


Рис. 3.6.

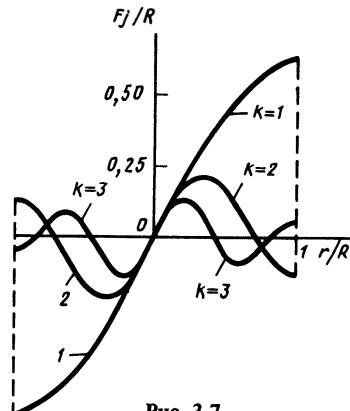


Рис. 3.7.

§ 3.12. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СВОБОДНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ЖИДКОГО ТОПЛИВА В БАКАХ

Рассмотрим теперь вынужденные колебания свободных поверхностей жидкостей, т. е. те колебания, которые вызываются поперечными кажущимися ускорениями $w_{0y} - g_y$, $w_{0z} - g_z$ и угловыми ускорениями $d\omega_x/dt$, $d\omega_y/dt$, $d\omega_z/dt$, возникающими в процессе полета ракеты. Функции ψ_{jx} , ψ_{jy} и ψ_{jz} , характеризующие эти колебания, определяются дифференциальным уравнением (3.9.1) с краевыми условиями (3.9.2), в которых $G_j(r, t)$ – функция, которая может принимать вид (3.9.3) – (3.9.5). Краевую задачу, образуемую дифференциальным уравнением (3.9.1) и краевыми условиями (3.9.2), можно решить, разложив функцию $G_j(r, t)$ в ряд по формам собственных колебаний жидкости $F_j^{(k)}(r)$. Пусть $\omega_j^{(1)}$, $\omega_j^{(2)}$, ... – частоты собственных колебаний жидкости, находящейся в j -м топливном баке, а $F_j^{(1)}(r)$, $F_j^{(2)}(r)$, ... – функции, определяющие соответствующие формы собственных колебаний (собственные частоты будем считать пронумерованными в порядке их возрастания). В соответствии со свойством ортогональности форм собственных колебаний, которое было установлено в § 3.10, будут иметь место равенства

$$\int_0^{R_j} F_j^{(k)}(r) F_j^{(l)}(r) r dr = 0 \quad \text{при } l \neq k. \quad (3.12.1)$$

Коэффициенты разложения функции $G_j(r, t)$ в ряд по формам собственных колебаний $F_j(r)$ будут зависеть от времени t . Таким образом, искомое разложение будет иметь вид

$$G_j(r, t) = \sum_{l=1}^{\infty} c_j^{(l)}(t) F_j^{(l)}(r). \quad (3.12.2)$$

Для отыскания коэффициентов ряда (3.12.2) умножим обе части равенства на $F_j^{(k)}(r)r$ и проинтегрируем по r в пределах от нуля до R_j . Согласно (3.12.1) получим соотношение

$$\int_0^{R_j} G_j(r, t) F_j^{(k)}(r) r dr = c_j^{(k)}(t) \int_0^{R_j} [F_j^{(k)}(r)]^2 r dr. \quad (3.12.3)$$

В соответствии с равенством (3.12.3) разложению (3.12.2) можно придать вид

$$G_j(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\int_0^{R_j} G_j(r, t) F_j^{(k)}(r) r dr F_j^{(k)}(r)}{\int_0^{R_j} [F_j^{(k)}(r)]^2 r dr}. \quad (3.12.4)$$

Решение дифференциального уравнения (3.9.1) с краевыми условиями (3.9.2) будем искать в виде ряда

$$\vartheta_j = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_j^{(k)}(t) \Theta_j^{(k)}(\xi, r), \quad (3.12.5)$$

где $\Theta_j^{(1)}(\xi, r)$, $\Theta_j^{(2)}(\xi, r)$, ... – собственные функции краевой задачи, образуемой дифференциальным уравнением (3.9.8) и краевыми условиями (3.9.9) и (3.9.12), т. е. функции, удовлетворяющие дифференциальному уравнениям

$$\frac{\partial^2 \Theta_j^{(k)}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Theta_j^{(k)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta_j^{(k)}}{\partial r} - \frac{\Theta_j^{(k)}}{r^2} = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.12.6)$$

и краевым условиям

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta_j^{(k)}}{\partial n} &= 0 \quad \text{на } l_j^*; \\ \frac{\partial \Theta_j^{(k)}}{\partial \xi} &= \lambda_j^{(k)} \Theta_j^{(k)} \quad \text{при } \xi = 0, \quad 0 < r < R_j; \end{aligned} \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.12.7)$$

в которых $\lambda_j^{(k)}$, $k = 1, 2, 3, \dots$ – собственные значения данной краевой задачи. Согласно (3.12.6) и (3.12.7) ряд (3.12.5) будет удовлетворять дифференциальному уравнению (3.9.1) и первому из краевых условий (3.9.2), второе из краевых условий (3.12.7) будет выполняться, если будет иметь место тождественное равенство

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{d^2 \beta_j^{(k)}}{dt^2} (\Theta_j^{(k)})_{\xi=0} + (w_{0x} - g_x) \beta_j^{(k)} \left(\frac{\partial \Theta_j^{(k)}}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} \right] + \\ + G_j(r, t) = 0 \quad \text{при } 0 < r < R_j. \end{aligned} \quad (3.12.8)$$

В соответствии с формулами (3.10.14) и (3.12.7) соотношению (3.12.8) можно придать вид

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\lambda_j^{(k)}} \frac{d^2 \beta_j^{(k)}}{dt^2} + (w_{0x} - g_x) \beta_j^{(k)} \right] F_j^{(k)}(r) + G_j(r, t) = 0 \\ \text{при } 0 < r < R_j, \end{aligned} \quad (3.12.9)$$

где $F_j^{(1)}(r)$, $F_j^{(2)}(r)$, ... – функции, определяющие формы собственных колебаний свободной поверхности жидкости, находящейся в j -м баке. Заметим в (3.12.9) функцию $G_j(r, t)$ ее разложением (3.12.4), получим равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\lambda_j^{(k)}} \frac{d^2 \beta_j^{(k)}}{dt^2} + (w_{0x} - g_x) \beta_j^{(k)} + \right.$$

$$+ \frac{\int_0^{R_j} G_j(r, t) F_j^{(k)}(r) r dr}{\int_0^{R_j} [F_j^{(k)}(r)]^2 r dr} \left\{ \begin{array}{l} F_j^{(k)}(r) = 0 \text{ при } 0 < r < R_j, \\ \end{array} \right. \quad (3.12.10)$$

которое будет иметь место, если функции $\beta_j^{(k)}(t)$, $k = 1, 2, \dots$ будут удовлетворять дифференциальным уравнениям

$$\frac{d^2 \beta_j^{(k)}}{dt^2} + \lambda_j^{(k)} (w_{0x} - g_x) \beta_j^{(k)} + \lambda_j^{(k)} \frac{\int_0^{R_j} G_j(r, t) F_j^{(k)}(r) r dr}{\int_0^{R_j} [F_j^{(k)}(r)]^2 r dr} = 0, \\ k = 1, 2, \dots \quad (3.12.11)$$

Согласно (3.10.10) уравнениям (3.12.11) можно придать вид

$$\frac{d^2 \beta_j^{(k)}}{dt^2} + \omega_j^{(k)2} \beta_j^{(k)} + \lambda_j^{(k)} \frac{\int_0^{R_j} G_j(r, t) F_j^{(k)}(r) r dr}{\int_0^{R_j} [F_j^{(k)}(r)]^2 r dr} = 0, \\ k = 1, 2, \dots \quad (3.12.12)$$

Основываясь на разложении функции $G_j(r, t)$ в бесконечный ряд (3.12.4), мы получили для решения дифференциального уравнения (3.9.1) с краевыми условиями (3.9.2) бесконечный ряд (3.12.5), в котором $\beta_j^{(1)}(t)$, $\beta_j^{(2)}(t)$, ... – функции, определяемые дифференциальными уравнениями (3.12.12). Практически заданную функцию $G_j(r, t)$ всегда можно с достаточной точностью представить конечной суммой ряда (3.12.4). В этом случае решение дифференциального уравнения (3.9.1) с краевыми условиями (3.9.2) будет определяться суммой соответствующего числа членов ряда (3.12.5).

Построим сначала функцию ψ_{jx} , определяющую колебания топлива в плоскости крена. В рассматриваемом случае функция $G_j(r, t)$ определяется формулой (3.9.3), согласно которой в данном случае будет иметь место равенство

$$\int_0^{R_j} G_j(r, t) F_j^{(k)}(r) r dr = r_j \frac{d\omega_x}{dt} \int_0^{R_j} F_j^{(k)}(r) r^2 dr \quad (3.12.13)$$

и разложение (3.12.4) будет иметь вид

$$G_j(r, t) = r_j \frac{d\omega_x}{dt} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\int_0^{R_j} F_j^{(k)}(r) r^2 dr}{\int_0^{R_j} [F_j^{(k)}(r)]^2 r dr} F_j^{(k)}(r). \quad (3.12.14)$$

Как видно из рис. 3.7, для первого тона собственных колебаний свободной поверхности жидкости, находящейся в цилиндрическом топливном баке, сечение свободной поверхности плоскостью, проходящей через ось бака, мало отличается от прямолинейного, иными словами

$$F_j^{(1)}(r) \approx C_j r. \quad (3.12.15)$$

Согласно (3.7.6) и (3.10.13) функция f_j , определяющая отклонения свободной поверхности жидкости от плоскости σ_j , приближенно может быть выражена в этом случае соотношением

$$f_j = C_j \beta_j(t) r \cos \alpha = C_j \beta_j(t) (y - y_j). \quad (3.12.16)$$

В соответствии с равенством (3.12.16) первый тон колебаний свободной поверхности жидкости в цилиндрическом топливном баке характерен тем, что в процессе колебаний свободная поверхность сохраняет конфигурацию, близкую к плоской. Многочисленные расчеты, а также эксперименты показали, что первый тон собственных колебаний свободной поверхности обладает этой особенностью независимо от конфигурации топливного бака. Пользуясь приближенной зависимостью (3.12.15), найдем

$$\int_0^{R_j} F_j^{(k)}(r) r^2 dr \approx \frac{1}{C_j} \int_0^{R_j} F_j^{(k)}(r) F_j^{(1)}(r) r dr. \quad (3.12.17)$$

Согласно (3.12.1)

$$\int_0^{R_j} F_j^{(k)}(r) F_j^{(1)}(r) r dr = 0 \text{ при } k \geq 2. \quad (3.12.18)$$

В соответствии с равенствами (3.12.17) и (3.12.18) в разложении, входящем в правую часть соотношения (3.12.14), практически можно ограничиться первым членом. В этом случае согласно (3.12.5), (3.12.12) и (3.12.13) искомая функция будет выражаться произведением

$$\psi_{jx} = \beta_j^{(1)}(t) \Theta_j^{(1)}(\xi, r), \quad (3.12.19)$$

где $\beta_j^{(1)}(t)$ – функция, определяемая дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2 \beta_j^{(1)}}{dt^2} + \omega_j^{(1)2} \beta_j^{(1)} + \lambda_j^{(1)} r_j \frac{d \omega_x}{dt} \frac{\int_0^{R_j} F_j^{(1)}(r) r^2 dr}{\int_0^{R_j} [F_j^{(1)}(r)]^2 r dr} = 0. \quad (3.12.20)$$

Перейдем теперь к построению функции ψ_{jy} , определяющей колебания топлива в плоскости тангенса. В данном случае функция $G_j(r, t)$ опре-

деляется формулой (3.9.4). Согласно (3.9.4) в рассматриваемом случае будет иметь место равенство

$$\int_0^{R_j} G_j(r, t) F_j^{(k)}(r) r dr = (w_{0y} - g_y + x_j \frac{d\omega_z}{dt}) \int_0^{R_j} F_j^{(k)}(r) r^2 dr - \\ - \frac{d\omega_z}{dt} \int_0^{R_j} F_j^{(k)}(r) K_j r^2 dr, \quad (3.12.21)$$

а разложение (3.12.4) примет вид

$$G_j(r, t) = (w_{0y} - g_y + x_j \frac{d\omega_z}{dt}) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\int_0^{R_j} F_j^{(k)}(r) r^2 dr}{\int_0^{R_j} [F_j^{(k)}(r)]^2 r dr} F_j^{(k)}(r) - \\ - \frac{d\omega_z}{dt} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\int_0^{R_j} F_j^{(k)}(r) K_j r^2 dr}{\int_0^{R_j} [F_j^{(k)}(r)]^2 r dr} F_j^{(k)}(r). \quad (3.12.22)$$

Как было показано выше, в первом из рядов, входящих в правую часть соотношения (3.12.22), практически можно ограничиться первым членом этого ряда.

Во втором слагаемом правой части (3.12.22) также можно ограничиться первым членом разложения [2]. В этом случае согласно (3.12.5), (3.12.12) и (3.12.21) искомая функция ψ_{jy} будет выражаться произведением

$$\psi_{jy} = \beta_j^{(1)}(t) \Theta_j^{(1)}(\xi, r), \quad (3.12.23)$$

где $\beta_j^{(1)}(t)$ – функция, определяемая дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2 \beta_j^{(1)}}{dt^2} + \omega_j^{(1)2} \beta_j^{(1)} + \lambda_j^{(1)} [w_{0y} - g_y +$$

$$+ (x_j - \delta_j) \frac{d\omega_z}{dt}] \frac{\int_0^{R_j} F_j^{(1)}(r) r^2 dr}{\int_0^{R_j} [F_j^{(1)}(r)]^2 r dr} = 0, \quad (3.12.24)$$

$$\text{где } \delta_j = \frac{\int_0^{R_j} F_j^{(1)}(r) K_j r^2 dr}{\int_0^{R_j} [F_j^{(1)}(r)]^2 r dr}. \quad (3.12.25)$$

Введя различные обозначения для временных функций, фигурирующих в формулах для ψ_{jx} и ψ_{jy} , и опустив верхние индексы в соотношениях (3.12.19), (3.12.20), (3.12.23), (3.12.24), придадим для удобства последующих выкладок формулам, определяющим функции ψ_{jx} и ψ_{jy} , вид

$$\psi_{jy} = \beta_j(t) \Theta_j(\xi, r); \quad \psi_{jx} = \alpha_j(t) \Theta_j(\xi, r), \quad (3.12.26)$$

где $\beta_j(t)$ и $\alpha_j(t)$ – функции, определяемые дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \beta_j}{dt^2} + \omega_j^2 \beta_j + \lambda_j [w_{0y} - g_y + \\ & + (x_j - \delta_j) \frac{d\omega_z}{dt}] \frac{\int_0^{R_j} F_j r^2 dr}{\int_0^{R_j} F_j^2 r dr} = 0; \\ & \frac{d^2 \alpha_j}{dt^2} + \omega_j^2 \alpha_j + \lambda_j r_j \frac{d\omega_x}{dt} \frac{\int_0^{R_j} F_j r^2 dr}{\int_0^{R_j} F_j^2 r dr} = 0; \end{aligned} \quad (3.12.27)$$

δ_j – величина, определяемая соотношением

$$\delta_j = \frac{\int_0^{R_j} F_j K_j r^2 dr}{\int_0^{R_j} F_j r^2 dr}. \quad (3.12.28)$$

Пользуясь в дальнейшем формулами (3.12.26), (3.12.27) и (3.12.28), будем иметь в виду, что в этих формулах λ_j и Θ_j – первое собственное значение и первая собственная функция краевой задачи, образуемой дифференциальным уравнением (3.9.8) и краевыми условиями (3.9.9) и (3.9.12), и соответственно ω_j и F_j – первая частота и первая форма собственных колебаний свободной поверхности жидкости в j -м баке.

Пока j -й топливный бак не опорожнится, величина δ_j , определяемая формулой (3.12.28), остается неизменной, в процессе опорожнения j -го бака возникает зависимость величины δ_j от времени t .

§ 3.13. УЧЕТ РАССЕЯНИЯ ЭНЕРГИИ В УРАВНЕНИИ КОЛЕБАНИЙ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ

Исследуя в § 3.10 собственные колебания свободной поверхности жидкости, мы получили для функции времени $\beta_j(t)$ дифференциальное

уравнение (3.10.9). Если осевая перегрузка сохраняет постоянное значение и уровень жидкости в топливном баке не меняется, частота собственных колебаний ω_j согласно (3.10.10) остается постоянной и общее решение дифференциального уравнения (3.10.9) в этом случае может быть представлено в виде

$$\beta_j = C \cos(\omega_j t + \varphi), \quad (3.13.1)$$

где C и φ – произвольные постоянные.

Согласно (3.13.1) в рассматриваемом случае свободная поверхность жидкости будет совершать гармонические колебания, что соответствует исходному предположению об идеальности жидкости, на основе которого проводились выше все рассуждения. В реальных условиях из-за внутреннего трения и трения жидкости о смачиваемую поверхность бака, собственные колебания свободной поверхности жидкости всегда будут затухающими. Многочисленные экспериментальные исследования показывают, что рассеяние энергии колебаний можно учесть, заменяя дифференциальное уравнение (3.10.9) следующим:

$$\frac{d^2 \beta_j}{dt^2} + \epsilon_j \frac{d \beta_j}{dt} + \omega_j^2 \beta_j = 0, \quad (3.13.2)$$

где ϵ_j – положительный коэффициент, определяющий интенсивность затухания собственных колебаний свободной поверхности жидкости.

Расчет коэффициента демпфирования ϵ_j является весьма сложной задачей и, как правило, для его нахождения используют экспериментальные методы. Вопрос об экспериментальном определении коэффициента демпфирования подробно рассмотрен в книге [16].

Коэффициент демпфирования зависит от амплитуды колебаний свободной поверхности жидкости, по мере возрастания амплитуды колебаний коэффициент демпфирования увеличивается. Для стабилизации колебаний свободных поверхностей жидкостей это обстоятельство играет важную роль. Для бака с гладкими стенками зависимость коэффициента демпфирования от амплитуды колебаний проявляется слабо, однако при наличии специальных демпфирующих внутрибаковых устройств эта зависимость становится весьма существенной.

В процессе экспериментального определения коэффициента демпфирования попутно устанавливают экспериментальное значение частоты собственных колебаний жидкости.

§ 3.14. КОЛЕБАНИЯ ЦЕНТРА МАСС РАКЕТЫ, УРАВНЕНИЕ СИЛ

Рассмотрим, как влияет подвижность жидкостей в топливных баках на движение, совершающееся корпусом ракеты.

По предположению начало подвижной системы координат совпадает с центром масс ракеты C , если жидкости, находящиеся в топливных баках, имеют плоские свободные поверхности, нормальные к оси ракеты. Рас-

смотренные выше малые колебания свободных поверхностей жидкостей вызывают малые колебания центра масс ракеты относительно начала связанный системы координат $OXYZ$ и влияют, таким образом, на движение, совершающееся этой системой координат.

Положение центра масс ракеты в связанный системе координат будет определяться векторной формулой

$$\mathbf{r}_C = \frac{1}{m} \left(\int_{V_0} \mathbf{r} \rho d\mathbf{v} + \sum_{j=1}^N \rho_j \int_{V_j^*} \mathbf{r} d\sigma \right), \quad (3.14.1)$$

где \mathbf{r}_C – радиус-вектор центра масс; m – общая масса ракеты; V_0 – область, занимаемая твердыми элементами конструкции; N – число топливных баков; V_j^* – область, занимаемая жидкостью в j -м баке; \mathbf{r} – радиус-вектор элемента объема $d\mathbf{v}$; ρ – плотность твердых элементов конструкции; $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N$ – плотности жидкостей, находящихся в топливных баках.

Область V_j^* ограничивается смачиваемой поверхностью бака S_j и свободной поверхностью жидкости σ_j^* . Если $F(x, y, z)$ – какая-либо функция пространственных переменных x, y, z , то, как видно из рис. 3.1, при малых отклонениях свободной поверхности σ_j^* от плоскости σ_j можно положить

$$\int_{V_j^*} F d\mathbf{v} = \int_{V_j} F d\mathbf{v} + \int_{\sigma_j} F f_j d\sigma, \quad (3.14.2)$$

где V_j – область, ограниченная поверхностями S_j и σ_j .¹

В соответствии с равенством (3.14.2) формулу (3.14.1) можно преобразовать к виду

$$\mathbf{r}_C = \frac{1}{m} \left(\int_{V_0} \mathbf{r} \rho d\mathbf{v} + \sum_{j=1}^N \rho_j \int_{V_j} \mathbf{r} d\mathbf{v} + \sum_{j=1}^N \rho_j \int_{\sigma_j} \mathbf{r} f_j d\sigma \right). \quad (3.14.3)$$

При отсутствии отклонений f_j свободных поверхностей σ_j^* от плоскостей σ_j центр масс ракеты должен совпадать с началом связанный системы координат $OXYZ$. Таким образом, согласно (3.14.3) должно иметь место равенство

$$\int_{V_0} \mathbf{r} \rho d\mathbf{v} + \sum_{j=1}^N \rho_j \int_{V_j} \mathbf{r} d\mathbf{v} = 0. \quad (3.14.4)$$

Пользуясь зависимостью (3.14.4), можно преобразовать формулу (3.14.3) к виду

$$\mathbf{r}_C = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^N \rho_j \int_{\sigma_j} \mathbf{r} f_j d\sigma. \quad (3.14.5)$$

Формула (3.14.5) определяет колебания центра масс ракеты, вызываемые колебаниями свободных поверхностей жидкостей в топливных баках.

¹ Формула (3.14.2) точна лишь для топливного бака цилиндрической формы.

Как уже указывалось в гл. 1, уравнения движения ракеты можно составить как уравнения движения материальной системы постоянного состава, присоединив к внешним силам, действующим на ракету, реактивные силы. В соответствии с теоремой о движении центра масс материальной системы должно иметь место равенство

$$m \mathbf{w}_C = \mathbf{F} + m \mathbf{g}, \quad (3.14.6)$$

где \mathbf{w}_C – абсолютное ускорение центра масс ракеты, найденное без учета переменности ее состава; \mathbf{F} – главный вектор аэродинамических и реактивных сил, действующих на ракету; \mathbf{g} – ускорение свободного падения.¹

Представляя абсолютное ускорение \mathbf{w}_C в виде суммы переносного, относительного и кориолисова ускорений, найдем

$$\mathbf{w}_C = \mathbf{w}_0 + \frac{d\omega}{dt} \times \mathbf{r}_C + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}_C) + \frac{\delta^2 \mathbf{r}_C}{dt^2} + 2\omega \times \frac{\delta \mathbf{r}_C}{dt}. \quad (3.14.7)$$

Допуская погрешности высших порядков малости, равенство (3.14.7) можно заменить приближенным равенством

$$\mathbf{w}_C = \mathbf{w}_0 + \frac{\delta^2 \mathbf{r}_C}{dt^2}, \quad (3.14.8)$$

так как вращение ракеты предполагается нами медленным и колебания, совершаемые центром масс ракеты, должны быть малыми в соответствии с предполагаемой нами малостью колебаний свободных поверхностей жидкостей.

Согласно (3.14.5) ускорение $\delta^2 \mathbf{r}_C/dt^2$, найденное без учета переменности состава ракеты, будет определяться соотношением

$$\frac{\delta^2 \mathbf{r}_C}{dt^2} = -\frac{1}{m} \sum_{j=1}^N \rho_j \int \mathbf{r} \frac{\partial^2 f_j}{\partial t^2} d\sigma. \quad (3.14.9)$$

В соответствии с формулами (3.14.8) и (3.14.9) уравнению (3.14.6) можно придать вид

$$m(\mathbf{w}_0 - \mathbf{g}) + \sum_{j=1}^N \rho_j \int \mathbf{r} \frac{\partial^2 f_j}{\partial t^2} d\sigma = \mathbf{F}. \quad (3.14.10)$$

Уравнение (3.14.10) представляет собой уравнение сил, построенное с учетом подвижности топлива в баках ракеты.

¹ В гл. 1 для главного вектора и главного момента сил, действующих на ракету, применялись обозначения $\Sigma \mathbf{F}$ и $\Sigma \mathbf{M}$. Знаком Σ подчеркивалось присоединение к внешним силам реактивных и кориолисовых сил. В дальнейшем для сокращения записей знак Σ будем опускать.

§ 3.15. МОМЕНТ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ РАКЕТЫ

Переходя к построению уравнения моментов, выведем сначала формулу для момента количества движения ракеты относительно ее центра масс, учитывая при выводе подвижность жидкых компонентов топлива.

С учетом подвижности жидкостей, находящихся в топливных баках ракеты, искомый момент количества движения L_C находят из соотношения

$$L_C = \int_{V_0} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_C) \times (\mathbf{v}_0 + \mathbf{w} \times \mathbf{r}) \rho d\mathbf{v} + \sum_{j=1}^N \rho_j \int_{V_j^*} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_C) \times \mathbf{v}_j d\mathbf{v}, \quad (3.15.1)$$

где \mathbf{v}_j — вектор скоростей, с которыми движутся в стартовой системе координат частицы жидкости, находящейся в j -м баке. Подставляя \mathbf{v}_j из (3.3.5) в (3.15.1), получим равенство

$$L_C = \int_{V_0} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_C) \times (\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \rho d\mathbf{v} +$$

$$+ \sum_{j=1}^N \rho_j \int_{V_j^*} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_C) \times (\mathbf{v}_0 + \operatorname{grad} \Psi_j) d\mathbf{v},$$

или

$$L_C = [\int_{V_0} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_C) \rho d\mathbf{v} + \sum_{j=1}^N \rho_j \int_{V_j^*} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_C) d\mathbf{v}] \times \mathbf{v}_0 +$$

$$+ \int_{V_0} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_C) (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \rho d\mathbf{v} + \sum_{j=1}^N \rho_j \int_{V_j^*} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_C) \times \operatorname{grad} \Psi_j d\mathbf{v}. \quad (3.15.2)$$

Пользуясь формулой (3.14.1) и равенством

$$m = \int_{V_0} \rho d\mathbf{v} + \sum_{j=1}^N \rho_j \int_{V_j^*} d\mathbf{v}, \quad (3.15.3)$$

определенным общую массу ракеты m , найдем

$$\begin{aligned} \int_{V_0} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_C) \rho d\mathbf{v} + \sum_{j=1}^N \rho_j \int_{V_j^*} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_C) d\mathbf{v} &= \int_{V_0} \mathbf{r} \rho d\mathbf{v} + \\ &+ \sum_{j=1}^N \rho_j \int_{V_j^*} \mathbf{r} d\mathbf{v} - \left(\int_{V_0} \rho d\mathbf{v} + \sum_{j=1}^N \rho_j \int_{V_j^*} d\mathbf{v} \right) \mathbf{r}_C = 0. \end{aligned} \quad (3.15.4)$$

Согласно (3.15.4) формуле (3.15.2) можно придать вид

$$\begin{aligned} L_C &= \int_{V_0} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_C) \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \rho d\mathbf{v} + \\ &+ \sum_{j=1}^N \rho_j \int_{V_j^*} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_C) \times \operatorname{grad} \Psi_j d\mathbf{v}. \end{aligned} \quad (3.15.5)$$

Учитывая малость векторов \mathbf{r}_C , $\boldsymbol{\omega}$ и $\operatorname{grad} \Psi_j$ и близость областей V_j^* и V_j , можно с погрешностями высших порядков малости заменить формулу (3.15.5) приближенной

$$\mathbf{L}_C = \int_{V_0} \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \rho d\mathbf{v} + \sum_{j=1}^N \rho_j \int_{V_j} \mathbf{r} \times \operatorname{grad} \Psi_j d\mathbf{v}. \quad (3.15.6)$$

Преобразуя объемный интеграл в поверхностный посредством формулы Гаусса – Остроградского, найдем

$$\begin{aligned} \int_{V_j} \mathbf{r} \times \operatorname{grad} \Psi_j d\mathbf{v} &= \int_{V_j} [(y \frac{\partial \Psi_j}{\partial z} - z \frac{\partial \Psi_j}{\partial y}) \mathbf{e}_x + \\ &+ (z \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} - x \frac{\partial \Psi_j}{\partial z}) \mathbf{e}_y + (x \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} - y \frac{\partial \Psi_j}{\partial x}) \mathbf{e}_z] d\mathbf{v} = \\ &= \int_{V_j} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [(z \mathbf{e}_y - y \mathbf{e}_z) \Psi_j] + \frac{\partial}{\partial y} [(x \mathbf{e}_z - z \mathbf{e}_x) \Psi_j] + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial}{\partial z} [(y \mathbf{e}_x - x \mathbf{e}_y) \Psi_j] \right\} d\mathbf{v} = \int_{S_j + \sigma_j} \Psi_j [(z \mathbf{e}_y - y \mathbf{e}_z) \cos(n, x) + \\ &+ (x \mathbf{e}_z - z \mathbf{e}_x) \cos(n, y) + (y \mathbf{e}_x - x \mathbf{e}_y) \cos(n, z)] d\sigma = \\ &= \int_{S_j + \sigma_j} \Psi_j \left\{ [y \cos(n, z) - z \cos(n, y)] \mathbf{e}_x + [z \cos(n, x) - \right. \\ &- x \cos(n, z)] \mathbf{e}_y + \left. [x \cos(n, y) - y \cos(n, x)] \mathbf{e}_z \right\} d\sigma = \\ &= \int_{S_j + \sigma_j} \Psi_j \mathbf{r} \times \mathbf{n} d\sigma, \end{aligned}$$

или согласно (3.4.3)

$$\int_{V_j} \mathbf{r} \times \operatorname{grad} \Psi_j d\mathbf{v} = \int_{S_j + \sigma_j} \Psi_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} d\sigma. \quad (3.15.7)$$

Функции Ψ_j и φ_j являются решениями уравнений (3.3.3) и (3.4.2), и, таким образом, в соответствии с формулой Грина должно иметь место равенство

$$\int_{S_j + \sigma_j} \Psi_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} d\sigma = \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial n} d\sigma. \quad (3.15.8)$$

Согласно (3.3.7) и (3.15.8) можно придать формуле (3.15.7) вид

$$\int_{V_j} \mathbf{r} \times \operatorname{grad} \Psi_j d\mathbf{v} = \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_j \omega(\mathbf{r} \times \mathbf{n}) d\sigma + \int_{\sigma_j} \varphi_j \frac{\partial f_j}{\partial t} d\sigma,$$

или, если воспользоваться зависимостью (3.4.3),

$$\int_{V_j} \mathbf{r} \times \operatorname{grad} \Psi_j d\mathbf{v} = \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_j \omega \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} d\sigma + \int_{\sigma_j} \varphi_j \frac{\partial f_j}{\partial t} d\sigma. \quad (3.15.9)$$

Подставляя (3.15.9) в (3.15.6), получим формулу для момента количества движения \mathbf{L}_C

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_C = & \int_{V_0} \mathbf{r} \times (\omega \times \mathbf{r}) \rho d\mathbf{v} + \sum_{j=1}^N \rho_j \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_j \omega \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} d\sigma + \\ & + \sum_{j=1}^N \rho_j \int_{\sigma_j} \varphi_j \frac{\partial f_j}{\partial t} d\sigma, \end{aligned}$$

$$\text{или } \mathbf{L}_C = \mathbf{L}_C^{(0)} + \sum_{j=1}^N \rho_j \int_{\sigma_j} \varphi_j \frac{\partial f_j}{\partial t} d\sigma, \quad (3.15.10)$$

где

$$\mathbf{L}_C^{(0)} = \int_{V_0} \mathbf{r} \times (\omega \times \mathbf{r}) \rho d\mathbf{v} + \sum_{j=1}^N \rho_j \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_j \omega \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} d\sigma. \quad (3.15.11)$$

В формуле (3.15.10) вектор $\mathbf{L}_C^{(0)}$ – это момент количества движения ракеты относительно ее центра масс в случае, когда в процессе движения свободные поверхности жидкостей не совершают колебаний и остаются плоскими и нормальными к оси ракеты. Второе слагаемое в правой части формулы (3.15.10) определяет дополнительный момент количества движения, порождаемый колебаниями свободных поверхностей жидкостей, находящихся в топливных баках.

§ 3.16. УЧЕТ ПОДВИЖНОСТИ ЖИДКИХ КОМПОНЕНТОВ ТОПЛИВА ПРИ РАСЧЕТЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ РАКЕТЫ

Рассмотрим детальнее момент количества движения $\mathbf{L}_C^{(0)}$, определяемый формулой (3.15.11). Спроектировав векторы, входящие в формулу (3.15.11) на оси связанный системы координат $OXYZ$, получим

$$\begin{aligned} L_{Cx}^{(0)} = & \int_{V_0} [y(\omega_x y - \omega_y x) - z(\omega_z x - \omega_x z)] \rho d\mathbf{v} + \\ & + \sum_{j=1}^N \rho_j \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jx} (\omega_x \frac{\partial \varphi_{jx}}{\partial n} + \omega_y \frac{\partial \varphi_{j,y}}{\partial n} + \omega_z \frac{\partial \varphi_{jz}}{\partial n}) d\sigma; \end{aligned} \quad (3.16.1)$$

$$L_{Cy}^{(0)} = \int_{V_0} [z(\omega_y z - \omega_z y) - x(\omega_x y - \omega_y x)] \rho d\mathbf{v} +$$

$$+ \sum_{j=1}^N \rho_j \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jy} (\omega_x \frac{\partial \varphi_{jx}}{\partial n} + \omega_y \frac{\partial \varphi_{j,y}}{\partial n} + \omega_z \frac{\partial \varphi_{jz}}{\partial n}) d\sigma;$$

$$L_{Cz}^{(0)} = \int_{V_0} [x(\omega_z x - \omega_x z) - y(\omega_y z - \omega_z y)] \rho d\mathbf{v} + \\ + \sum_{j=1}^N \rho_j \int_{S_j^+ \sigma_j} \varphi_{jz} (\omega_x \frac{\partial \varphi_{jx}}{\partial n} + \omega_y \frac{\partial \varphi_{jy}}{\partial n} + \omega_z \frac{\partial \varphi_{jz}}{\partial n}) d\sigma. \quad (3.16.1)$$

Формулам (3.16.1) можно придать вид

$$L_{Cx}^{(0)} = J_{xx} \omega_x + J_{xy} \omega_y + J_{xz} \omega_z; \\ L_{Cy}^{(0)} = J_{yx} \omega_x + J_{yy} \omega_y + J_{yz} \omega_z; \\ L_{Cz}^{(0)} = J_{zx} \omega_x + J_{zy} \omega_y + J_{zz} \omega_z, \quad (3.16.2)$$

где

$$J_{xx} = \int_{V_0} (y^2 + z^2) \rho d\mathbf{v} + \sum_{j=1}^N \rho_j \int_{S_j^+ \sigma_j} \varphi_{jx} \frac{\partial \varphi_{jx}}{\partial n} d\sigma;$$

$$J_{xy} = - \int_{V_0} xy \rho d\mathbf{v} + \sum_{j=1}^N \rho_j \int_{S_j^+ \sigma_j} \varphi_{jx} \frac{\partial \varphi_{jy}}{\partial n} d\sigma;$$

$$J_{xz} = - \int_{V_0} xz \rho d\mathbf{v} + \sum_{j=1}^N \rho_j \int_{S_j^+ \sigma_j} \varphi_{jx} \frac{\partial \varphi_{jz}}{\partial n} d\sigma;$$

$$J_{yx} = - \int_{V_0} xy \rho d\mathbf{v} + \sum_{j=1}^N \rho_j \int_{S_j^+ \sigma_j} \varphi_{jy} \frac{\partial \varphi_{jx}}{\partial n} d\sigma;$$

$$J_{yy} = \int_{V_0} (x^2 + z^2) \rho d\mathbf{v} + \sum_{j=1}^N \rho_j \int_{S_j^+ \sigma_j} \varphi_{jy} \frac{\partial \varphi_{jy}}{\partial n} d\sigma; \quad (3.16.3)$$

$$J_{yz} = - \int_{V_0} yz \rho d\mathbf{v} + \sum_{j=1}^N \rho_j \int_{S_j^+ \sigma_j} \varphi_{jy} \frac{\partial \varphi_{jz}}{\partial n} d\sigma;$$

$$J_{zx} = - \int_{V_0} xz \rho d\mathbf{v} + \sum_{j=1}^N \rho_j \int_{S_j^+ \sigma_j} \varphi_{jz} \frac{\partial \varphi_{jx}}{\partial n} d\sigma;$$

$$J_{zy} = - \int_{V_0} yz \rho d\mathbf{v} + \sum_{j=1}^N \rho_j \int_{S_j^+ \sigma_j} \varphi_{jz} \frac{\partial \varphi_{jy}}{\partial n} d\sigma;$$

$$J_{zz} = \int_{V_0} (x^2 + y^2) \rho d\mathbf{v} + \sum_{j=1}^N \rho_j \int_{S_j^+ \sigma_j} \varphi_{jz} \frac{\partial \varphi_{jz}}{\partial n} d\sigma.$$

Согласно (3.4.2) функции φ_{jx} , φ_{jy} и φ_{jz} являются решениями уравнения Лапласа, и, таким образом, в соответствии с формулой Грина должны иметь место равенства

$$\begin{aligned}
 \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jy} \frac{\partial \varphi_{jx}}{\partial n} d\sigma &= \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jx} \frac{\partial \varphi_{jy}}{\partial n} d\sigma; \\
 \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jz} \frac{\partial \varphi_{jx}}{\partial n} d\sigma &= \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jx} \frac{\partial \varphi_{jz}}{\partial n} d\sigma; \\
 \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jz} \frac{\partial \varphi_{jy}}{\partial n} d\sigma &= \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jy} \frac{\partial \varphi_{jz}}{\partial n} d\sigma.
 \end{aligned} \tag{3.16.4}$$

Из формул (3.16.3) и (3.16.4) вытекают соотношения

$$J_{yx} = J_{xy}; \quad J_{zx} = J_{xz}; \quad J_{zy} = J_{yz}. \tag{3.16.5}$$

В соответствии с равенствами (3.16.2) и (3.16.5) момент количества движения $L_C^{(0)}$ равен моменту количества движения твердого тела, у которого моменты инерции J_{xx}, J_{yy}, J_{zz} относительно осей X, Y, Z и центробежные моменты инерции J_{xy}, J_{xz}, J_{yz} имеют значения, определяемые формулами (3.16.3).

Пользуясь соотношениями (3.16.2) и (3.16.5), можно придать равенству (3.15.10) вид

$$\begin{aligned}
 L_C = (J_{xx} \omega_x + J_{xy} \omega_y + J_{xz} \omega_z) \mathbf{e}_x + (J_{xy} \omega_x + J_{yy} \omega_y + \\
 + J_{yz} \omega_z) \mathbf{e}_y + (J_{xz} \omega_x + J_{yz} \omega_y + J_{zz} \omega_z) \mathbf{e}_z + \\
 + \sum_{j=1}^N \rho_j \int_{\sigma_j} \varphi_j \frac{\partial f_j}{\partial t} d\sigma.
 \end{aligned} \tag{3.16.6}$$

Согласно (3.16.6) при отсутствии колебаний свободных поверхностей жидкостей, т. е. при $f_j \equiv 0, j = 1, 2, \dots, N$, момент количества движения ракеты относительно ее центра масс можно определить как момент количества движения твердого тела, вычислив моменты инерции ракеты J_{xx}, J_{yy}, J_{zz} относительно осей связанной системы координат $OXYZ$ и центробежные моменты инерции J_{xy}, J_{xz}, J_{yz} по формулам (3.16.3).

§ 3.17. УРАВНЕНИЕ МОМЕНТОВ. ТЕОРЕМА ЖУКОВСКОГО

В § 3.14 было получено уравнение сил (3.14.10). Переидем теперь к выводу уравнения моментов. В соответствии с теоремой об изменении момента количества движения в любой момент времени должно иметь место равенство

$$\frac{dL_C}{dt} = M_C, \tag{3.17.1}$$

где dL_C/dt — производная по времени от момента количества движения L_C , вычисленная без учета переменности состава ракеты; M_C — глав-

ный момент аэродинамических и реактивных сил, действующих на ракету (главный момент сил тяжести относительно центра масс ракеты всегда будет равен нулю).

Уравнению (3.17.1) можно придать вид

$$\frac{\delta \mathbf{L}_C}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}_C = \mathbf{M}_C. \quad (3.17.2)$$

Согласно (3.16.6) векторное произведение $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}_C$ является величиной второго порядка малости в соответствии с предполагаемой нами малостью колебаний свободных поверхностей жидкостей и малостью угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$. Таким образом, пренебрегая величинами второго порядка малости, можно заменить уравнение (3.17.2) приближенным уравнением

$$\frac{\delta \mathbf{L}_C}{dt} = \mathbf{M}_C. \quad (3.17.3)$$

Вычисляя по формуле (3.16.6) локальную производную по времени $\delta \mathbf{L}_C/dt$ без учета переменности состава ракеты, получим соотношение

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathbf{L}_C}{dt} &= (J_{xx} \frac{d\omega_x}{dt} + J_{xy} \frac{d\omega_y}{dt} + J_{xz} \frac{d\omega_z}{dt}) \mathbf{e}_x + \\ &+ (J_{xy} \frac{d\omega_x}{dt} + J_{yy} \frac{d\omega_y}{dt} + J_{yz} \frac{d\omega_z}{dt}) \mathbf{e}_y + (J_{xz} \frac{d\omega_x}{dt} + \\ &+ J_{yz} \frac{d\omega_y}{dt} + J_{zz} \frac{d\omega_z}{dt}) \mathbf{e}_z + \sum_{j=1}^N \rho_j \iint_{\sigma_j} \boldsymbol{\psi}_j \frac{\partial^2 f_j}{\partial t^2} d\sigma. \end{aligned} \quad (3.17.4)$$

Обозначим далее через \mathbf{M} главный момент аэродинамических и реактивных сил относительно начала связанной системы координат X, Y, Z . Моменты \mathbf{M} и \mathbf{M}_C будут связаны между собой зависимостью

$$\mathbf{M}_C = \mathbf{M} - \mathbf{r}_C \times \mathbf{F}, \quad (3.17.5)$$

где \mathbf{r}_C – радиус-вектор центра масс ракеты; \mathbf{F} – главный вектор аэродинамических и реактивных сил, действующих на ракету.

Согласно (3.14.6) и (3.14.8) формулу (3.17.5) можно преобразовать к виду

$$\mathbf{M}_C = \mathbf{M} - m \mathbf{r}_C \times (\mathbf{w}_C - \mathbf{g}) = \mathbf{M} - m \mathbf{r}_C \times (\mathbf{w}_0 - \mathbf{g}) - m \mathbf{r}_C \times \frac{\delta^2 \mathbf{r}_C}{dt^2}. \quad (3.17.6)$$

Предполагаемая нами малость колебаний свободных поверхностей жидкостей влечет за собой малость колебаний, совершаемых центром

масс ракеты в связанный системе координат $OXYZ$. Таким образом, пре-небрегая величинами второго порядка малости, можно заменить равенство (3.17.6) приближенным равенством

$$\mathbf{M}_C = \mathbf{M} - m \mathbf{r}_C \times (\mathbf{w}_0 - \mathbf{g}),$$

или согласно (3.14.5)

$$\mathbf{M}_C = \mathbf{M} - \sum_{j=1}^N \rho_j \int_{\sigma_j} \mathbf{r} f_j d\sigma \times (\mathbf{w}_0 - \mathbf{g}). \quad (3.17.7)$$

Подставляя (3.17.4) и (3.17.7) в (3.17.3), получим уравнение

$$\begin{aligned} & (J_{xx} \frac{d\omega_x}{dt} + J_{xy} \frac{d\omega_y}{dt} + J_{xz} \frac{d\omega_z}{dt}) \mathbf{e}_x + (J_{xy} \frac{d\omega_x}{dt} + \\ & + J_{yy} \frac{d\omega_y}{dt} + J_{yz} \frac{d\omega_z}{dt}) \mathbf{e}_y + (J_{xz} \frac{d\omega_x}{dt} + J_{yz} \frac{d\omega_y}{dt} + \\ & + J_{zz} \frac{d\omega_z}{dt}) \mathbf{e}_z + \sum_{j=1}^N \rho_j \iint_{\sigma_j} \varphi_j \frac{\partial^2 f_j}{\partial t^2} d\sigma + \\ & + \sum_{j=1}^N \rho_j \iint_{\sigma_j} \mathbf{r} f_j d\sigma \times (\mathbf{w}_0 - \mathbf{g}) = \mathbf{M}. \end{aligned} \quad (3.17.8)$$

При отсутствии колебаний свободных поверхностей жидкостей, т. е. при $f_j = 0, j = 1, 2, \dots, N$, уравнение сил (3.14.10) и уравнение моментов (3.17.8) переходят в уравнения движения твердого тела, из которых мы исходили в гл. 1 и 2, с той лишь разницей, что при учете относительных движений, совершаемых жидкостями в топливных баках, моменты инерции ракеты должны рассчитываться не по формулам динамики твердого тела, а по формулам (3.16.3).

Впервые задачу о движении твердого тела с полостями, полностью заполненными идеальной жидкостью, рассмотрел Н.Е. Жуковский. Он показал, что такая материальная система движется под действием заданной системы сил как эквивалентное твердое тело той же массы, обладающее моментами инерции, определяемыми формулами (3.16.3) (в этом случае поверхности $\sigma_i, j = 1, 2, \dots, N$, входящие в формулы (3.16.3), отсутствуют). Таким образом, при отсутствии колебаний свободных поверхностей жидкостей уравнения сил и моментов (3.14.10) и (3.17.8) непосредственно вытекают из выводов, предложенных Н.Е. Жуковским. Формулы (3.16.3) мы будем называть в дальнейшем формулами Жуковского.

§ 3.18. ВЫЧИСЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ РАКЕТЫ

Согласно (3.16.3) с учетом подвижности жидких компонентов топлива моменты инерции ракеты определяются соотношениями

$$\begin{aligned}
J_{xx} &= J_{xx}^{(0)} + \sum_{j=1}^N J_{xx}^{(j)}; \quad J_{yy} = J_{yy}^{(0)} + \sum_{j=1}^N J_{yy}^{(j)}; \\
J_{zz} &= J_{zz}^{(0)} + \sum_{j=1}^N J_{zz}^{(j)}; \quad J_{xy} = J_{xy}^{(0)} + \sum_{j=1}^N J_{xy}^{(j)}; \\
J_{xz} &= J_{xz}^{(0)} + \sum_{j=1}^N J_{xz}^{(j)}; \quad J_{yz} = J_{yz}^{(0)} + \sum_{j=1}^N J_{yz}^{(j)},
\end{aligned} \tag{3.18.1}$$

где $J_{xx}^{(0)}, J_{yy}^{(0)}, J_{zz}^{(0)}, J_{xy}^{(0)}, J_{xz}^{(0)}, J_{yz}^{(0)}$ – моменты инерции ракеты без топлива, $J_{xx}^{(j)}, J_{yy}^{(j)}, J_{zz}^{(j)}, J_{xz}^{(j)}, J_{xy}^{(j)}, J_{yz}^{(j)}$ ($1 \leq j \leq N$) – моменты инерции жидкой массы, находящейся в j -м баке, которые могут быть найдены по формулам

$$\begin{aligned}
J_{xx}^{(j)} &= \rho_j \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jx} \frac{\partial \varphi_{jx}}{\partial n} d\sigma; \quad J_{yy}^{(j)} = \rho_j \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jy} \frac{\partial \varphi_{jy}}{\partial n} d\sigma; \\
J_{zz}^{(j)} &= \rho_j \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jz} \frac{\partial \varphi_{jz}}{\partial n} d\sigma; \quad J_{xy}^{(j)} = \rho_j \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jx} \frac{\partial \varphi_{jy}}{\partial n} d\sigma; \\
J_{xz}^{(j)} &= \rho_j \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jx} \frac{\partial \varphi_{jz}}{\partial n} d\sigma; \quad J_{yz}^{(j)} = \rho_j \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jy} \frac{\partial \varphi_{jz}}{\partial n} d\sigma.
\end{aligned} \tag{3.18.2}$$

В соответствии с равенством (3.7.1) векторная функция φ_j может быть представлена в виде

$$\varphi_j = \varphi_j^{(0)} + \varphi_j^{(1)}, \tag{3.18.3}$$

где $\varphi_j^{(0)}$ – векторная функция, определяемая дифференциальным уравнением (3.7.4) с краевым условием (3.7.5);

$$\varphi_j^{(1)} = \mathbf{r}_j \times \mathbf{r} \tag{3.18.4}$$

– векторная функция, удовлетворяющая согласно (3.7.3) дифференциальному уравнению

$$\nabla^2 \varphi_j^{(1)} = 0 \tag{3.18.5}$$

с краевым условием

$$\frac{\partial \varphi_j^{(1)}}{\partial n} = \mathbf{r}_j \times \mathbf{n} \text{ на } S_j \text{ и } \sigma_j. \tag{3.18.6}$$

Пользуясь соотношениями (3.7.12) и (3.18.3), можно преобразовать формулы (3.18.2) таким образом:

$$\begin{aligned} J_{xx}^{(j)} &= \rho_j \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jx}^{(1)} \frac{\partial \varphi_{jx}^{(1)}}{\partial n} d\sigma; \\ J_{xy}^{(j)} &= \rho_j \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jx}^{(1)} \frac{\partial (\varphi_{jy}^{(0)} + \varphi_{jy}^{(1)})}{\partial n} d\sigma; \\ J_{xz}^{(j)} &= \rho_j \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jx}^{(1)} \frac{\partial (\varphi_{jz}^{(0)} + \varphi_{jz}^{(1)})}{\partial n} d\sigma; \end{aligned} \quad (3.18.7)$$

$$\begin{aligned} J_{yy}^{(j)} &= \rho_j \int_{S_j + \sigma_j} [\varphi_{jy}^{(1)} \frac{\partial (\varphi_{jy}^{(0)} + \varphi_{jy}^{(1)})}{\partial n} + \varphi_{jy}^{(0)} \frac{\partial \varphi_{jy}^{(1)}}{\partial n}] d\sigma + \\ &+ \rho_j \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jy}^{(0)} \frac{\partial \varphi_{jy}^{(0)}}{\partial n} d\sigma; \\ J_{yz}^{(j)} &= \rho_j \int_{S_j + \sigma_j} [\varphi_{jy}^{(1)} \frac{\partial (\varphi_{jz}^{(0)} + \varphi_{jz}^{(1)})}{\partial n} + \varphi_{jy}^{(0)} \frac{\partial \varphi_{jz}^{(1)}}{\partial n}] d\sigma + \\ &+ \rho_j \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jy}^{(0)} \frac{\partial \varphi_{jz}^{(0)}}{\partial n} d\sigma; \\ J_{zz}^{(j)} &= \rho_j \int_{S_j + \sigma_j} [\varphi_{jz}^{(1)} \frac{\partial (\varphi_{jz}^{(0)} + \varphi_{jz}^{(1)})}{\partial n} + \varphi_{jz}^{(0)} \frac{\partial \varphi_{jz}^{(1)}}{\partial n}] d\sigma + \\ &+ \rho_j \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jz}^{(0)} \frac{\partial \varphi_{jz}^{(0)}}{\partial n} d\sigma. \end{aligned} \quad (3.18.8)$$

Согласно (3.7.4) и (3.18.5) функции $\varphi_{jy}^{(0)}, \varphi_{jz}^{(0)}, \varphi_{jy}^{(1)}, \varphi_{jz}^{(1)}$ удовлетворяют уравнению Лапласа, и в соответствии с формулой Грина должны иметь место равенства

$$\begin{aligned} \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jy}^{(0)} \frac{\partial \varphi_{jy}^{(1)}}{\partial n} d\sigma &= \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jy}^{(1)} \frac{\partial \varphi_{jy}^{(0)}}{\partial n} d\sigma; \\ \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jy}^{(0)} \frac{\partial \varphi_{jz}^{(1)}}{\partial n} d\sigma &= \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jz}^{(1)} \frac{\partial \varphi_{jy}^{(0)}}{\partial n} d\sigma; \\ \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jz}^{(0)} \frac{\partial \varphi_{jz}^{(1)}}{\partial n} d\sigma &= \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jz}^{(1)} \frac{\partial \varphi_{jz}^{(0)}}{\partial n} d\sigma. \end{aligned} \quad (3.18.9)$$

Таким образом, формулам (3.18.8) можно придать вид

$$\begin{aligned}
 J_{yy}^{(j)} &= \rho_j \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jy}^{(1)} \frac{\partial (2\varphi_{jy}^{(0)} + \varphi_{jy}^{(1)})}{\partial n} d\sigma + \rho_j \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jy}^{(0)} \frac{\partial \varphi_{jy}^{(0)}}{\partial n} d\sigma; \\
 J_{yz}^{(j)} &= \rho_j \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jy}^{(1)} \frac{\partial (\varphi_{jz}^{(0)} + \varphi_{jz}^{(1)})}{\partial n} d\sigma + \rho_j \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jz}^{(1)} \frac{\partial \varphi_{jy}^{(0)}}{\partial n} d\sigma + \\
 &+ \rho_j \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jy}^{(0)} \frac{\partial \varphi_{jz}^{(0)}}{\partial n} d\sigma; \\
 J_{zz}^{(j)} &= \rho_j \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jz}^{(1)} \frac{\partial (2\varphi_{jz}^{(0)} + \varphi_{jz}^{(1)})}{\partial n} d\sigma + \rho_j \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jz}^{(0)} \frac{\partial \varphi_{jz}^{(0)}}{\partial n} d\sigma.
 \end{aligned} \tag{3.18.10}$$

Пользуясь соотношениями (3.7.5), (3.18.4) и (3.18.6), можно преобразовать формулы (3.18.7) и (3.18.10) :

$$\begin{aligned}
 J_{xx}^{(j)} &= \rho_j \int_{S_j + \sigma_j} (y_j z - z_j y) [y_j \cos(n, z) - z_j \cos(n, y)] d\sigma; \\
 J_{xy}^{(j)} &= \rho_j \int_{S_j + \sigma_j} (y_j z - z_j y) [z \cos(n, x) - x \cos(n, z)] d\sigma; \\
 J_{xz}^{(j)} &= \rho_j \int_{S_j + \sigma_j} (y_j z - z_j y) [x \cos(n, y) - y \cos(n, x)] d\sigma; \\
 J_{yy}^{(j)} &= \rho_j \int_{S_j + \sigma_j} (z_j x - x_j z) [(2z - z_j) \cos(n, x) - \\
 &- (2x - x_j) \cos(n, z)] d\sigma + \rho_j \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jy}^{(0)} \frac{\partial \varphi_{jy}^{(0)}}{\partial n} d\sigma; \\
 J_{yz}^{(j)} &= \rho_j \int_{S_j + \sigma_j} \{(z_j x - x_j z) [x \cos(n, y) - y \cos(n, x)] + \\
 &+ (x_j y - y_j x) [(z - z_j) \cos(n, x) - (x - x_j) \cos(n, z)]\} d\sigma + \\
 &+ \rho_j \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jy}^{(0)} \frac{\partial \varphi_{jz}^{(0)}}{\partial n} d\sigma; \\
 J_{zz}^{(j)} &= \rho_j \int_{S_j + \sigma_j} (x_j y - y_j x) [(2x - x_j) \cos(n, y) - \\
 &- (2y - y_j) \cos(n, x)] d\sigma + \rho_j \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jz}^{(0)} \frac{\partial \varphi_{jz}^{(0)}}{\partial n} d\sigma.
 \end{aligned} \tag{3.18.11}$$

Преобразуя в формулах (3.18.11) поверхностные интегралы в объемные посредством формул Гаусса – Остроградского, получим соотношения

$$\begin{aligned}
 J_{xx}^{(j)} &= \rho_j \int_{V_j} (y_j^2 + z_j^2) d\mathbf{v}; \quad J_{xy}^{(j)} = -\rho_j \int_{V_j} xy_j d\mathbf{v}; \\
 J_{xz}^{(j)} &= -\rho_j \int_{V_j} xz_j d\mathbf{v}; \\
 J_{yy}^{(j)} &= \rho_j \int_{V_j} [(2x - x_j)x_j + (2z - z_j)z_j] d\mathbf{v} + \\
 &+ \rho_j \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jy}^{(0)} \frac{\partial \varphi_{jy}^{(0)}}{\partial n} d\sigma; \\
 J_{yz}^{(j)} &= -\rho_j \int_{V_j} [yz_j + (z - z_j)y_j] d\mathbf{v} + \\
 &+ \rho_j \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jy}^{(0)} \frac{\partial \varphi_{jz}^{(0)}}{\partial n} d\sigma; \\
 J_{zz}^{(j)} &= \rho_j \int_{V_j} [(2x - x_j)x_j + (2y - y_j)y_j] d\mathbf{v} + \\
 &+ \rho_j \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jz}^{(0)} \frac{\partial \varphi_{jz}^{(0)}}{\partial n} d\sigma.
 \end{aligned} \tag{3.18.12}$$

Масса жидкости, находящейся в j -м баке, m_j и координаты центра масс этой жидкости $x_C^{(j)}, y_C^{(j)}, z_C^{(j)}$ будут определяться по формулам

$$\begin{aligned}
 m_j &= \rho_j \int_{V_j} d\mathbf{v}; \quad x_C^{(j)} = \frac{\rho_j}{m_j} \int_{V_j} x d\mathbf{v}; \quad y_C^{(j)} = \frac{\rho_j}{m_j} \int_{V_j} y d\mathbf{v}; \\
 z_C^{(j)} &= \frac{\rho_j}{m_j} \int_{V_j} z d\mathbf{v}.
 \end{aligned} \tag{3.18.13}$$

Центр масс жидкости, находящейся в j -м баке, должен лежать на его оси в соответствии с предположением об осевой симметрии топливных баков, т. е.

$$y_C^{(j)} = y_j, \quad z_C^{(j)} = z_j. \tag{3.18.14}$$

Согласно (3.18.13) и (3.18.14) формулам (3.18.12) можно придать вид

$$\begin{aligned}
J_{xx}^{(j)} &= m_j(y_j^2 + z_j^2); \quad J_{xy}^{(j)} = -m_j x_C^{(j)} y_j; \\
J_{xz}^{(j)} &= -m_j x_C^{(j)} z_j; \\
J_{yy}^{(j)} &= m_j [(2x_C^{(j)} - x_j)x_j + z_j^2] + \rho_j \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jy}^{(0)} \frac{\partial \varphi_{jy}^{(0)}}{\partial n} d\sigma; \\
J_{yz}^{(j)} &= -m_j y_j z_j + \rho_j \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jy}^{(0)} \frac{\partial \varphi_{jz}^{(0)}}{\partial n} d\sigma; \\
J_{zz}^{(j)} &= m_j [(2x_C^{(j)} - x_j)x_j + y_j^2] + \rho_j \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jz}^{(0)} \frac{\partial \varphi_{jz}^{(0)}}{\partial n} d\sigma.
\end{aligned} \tag{3.18.15}$$

Интеграл от какой-либо функции f по осесимметричной поверхности $S_j + \sigma_j$ может быть найден по формуле

$$\int_{S_j + \sigma_j} f d\sigma = \int_{l_j}^{2\pi} \int_0^\pi f r ds d\alpha, \tag{3.18.16}$$

где l_j – образующая поверхности интегрирования $S_j + \sigma_j$. Пользуясь формулами (3.7.15) и (3.18.16), найдем

$$\begin{aligned}
\int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jy}^{(0)} \frac{\partial \varphi_{jy}^{(0)}}{\partial n} d\sigma &= \int_{S_j + \sigma_j} \theta_j \frac{\partial \theta_j}{\partial n} \sin^2 \alpha d\sigma = \\
&= \int_{l_j}^{2\pi} \int_0^\pi \theta_j \frac{\partial \theta_j}{\partial n} r \sin^2 \alpha d\alpha ds = \int_0^{2\pi} \sin^2 \alpha d\alpha \int_{l_j} \theta_j \frac{\partial \theta_j}{\partial n} r ds = \\
&= \pi \int_{l_j} \theta_j \frac{\partial \theta_j}{\partial n} r ds; \\
\int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jy}^{(0)} \frac{\partial \varphi_{jz}^{(0)}}{\partial n} d\sigma &= \int_{S_j + \sigma_j} \theta_j \frac{\partial \theta_j}{\partial n} \sin \alpha \cos \alpha d\sigma = \\
&= - \int_{l_j}^{2\pi} \int_0^\pi \theta_j \frac{\partial \theta_j}{\partial n} r \sin \alpha \cos \alpha d\alpha ds = \\
&= - \int_0^{2\pi} \sin \alpha \cos \alpha d\alpha \int_{l_j} \theta_j \frac{\partial \theta_j}{\partial n} r ds = 0;
\end{aligned} \tag{3.18.17}$$

$$\int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jz}^{(0)} \frac{\partial \varphi_{jz}^{(0)}}{\partial n} d\sigma = \int_{S_j + \sigma_j} \theta_j \frac{\partial \theta_j}{\partial n} \cos^2 \alpha d\sigma =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{l_j}^{\frac{2\pi}{2}} \theta_j \frac{\partial \theta_j}{\partial n} r \cos^2 \alpha ds d\alpha = \int_0^{\frac{2\pi}{2}} \cos^2 \alpha d\alpha \int_{l_j}^{\theta_j} \frac{\partial \theta_j}{\partial n} r ds = \\
&= \pi \int_{l_j}^{\theta_j} \theta_j \frac{\partial \theta_j}{\partial n} r ds.
\end{aligned}$$

Подставляя (3.18.17) в (3.18.15), получим формулы для моментов инерции

$$\begin{aligned}
J_{xx}^{(j)} &= m_j (y_j^2 + z_j^2); \\
J_{yy}^{(j)} &= m_j [(2x_C^{(j)} - x_j)x_j + z_j^2] + \pi \rho_j \int_{l_j}^{\theta_j} \theta_j \frac{\partial \theta_j}{\partial n} r ds; \\
J_{zz}^{(j)} &= m_j [(2x_C^{(j)} - x_j)x_j + y_j^2] + \pi \rho_j \int_{l_j}^{\theta_j} \theta_j \frac{\partial \theta_j}{\partial n} r ds
\end{aligned} \quad (3.18.18)$$

и для центробежных моментов инерции

$$J_{xy}^{(j)} = -m_j x_C^{(j)} y_j; \quad J_{xz}^{(j)} = -m_j x_C^{(j)} z_j; \quad J_{yz}^{(j)} = -m_j y_j z_j. \quad (3.18.19)$$

Согласно (3.18.1) и (3.18.19) центробежные моменты инерции ракеты определяются соотношениями

$$\begin{aligned}
J_{xy} &= J_{xy}^{(0)} - \sum_{j=1}^N m_j x_C^{(j)} y_j; \quad J_{xz} = J_{xz}^{(0)} - \sum_{j=1}^N m_j x_C^{(j)} z_j; \\
J_{yz} &= J_{yz}^{(0)} - \sum_{j=1}^N m_j y_j z_j.
\end{aligned} \quad (3.18.20)$$

Так же как и в гл. 1, будем предполагать, что плоскости $y = 0$ и $z = 0$ являются плоскостями симметрии ракеты. В этом случае главные оси инерции ракеты без топлива совпадают с осями OX , OY , OZ , иными словами

$$J_{xy}^{(0)} = J_{xz}^{(0)} = J_{yz}^{(0)} = 0. \quad (3.18.21)$$

При $y_j \neq 0$ массе жидкости m_j с центром масс в точке $x = x_C^{(j)}$, $y = y_j$, $z = z_j$ в силу симметрии всегда будет соответствовать та же масса жидкости m_j с центром масс в точке $x = x_C^{(j)}$, $y = -y_j$, $z = z_j$. Аналогично при $z_j \neq 0$ массе жидкости m_j с центром масс в точке $x = x_C^{(j)}$, $y = y_j$, $z = z_j$ в силу симметрии всегда будет соответствовать та же масса жидкости m_j с центром масс в точке $x = x_C^{(j)}$, $y = y_j$, $z = -z_j$.

Таким образом, всегда будут иметь место равенства

$$\sum_{j=1}^N m_j x_C^{(j)} y_j = \sum_{j=1}^N m_j x_C^{(j)} z_j = \sum_{i=1}^N m_i y_j z_j = 0. \quad (3.18.22)$$

Согласно (3.18.20) – (3.18.22) при учете подвижности жидкого компонента топлива равенства

$$J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0 \quad (3.18.23)$$

сохраняются и оси связанный системы координат OX , OY , OZ остаются главными осями инерции ракеты. Моменты инерции ракеты J_{xx} , J_{yy} , J_{zz} сохраняют роль главных моментов инерции J_x , J_y , J_z :

$$J_{xx} = J_x; \quad J_{yy} = J_y; \quad J_{zz} = J_z. \quad (3.18.24)$$

Перейдем к рассмотрению моментов инерции $J_{xx}^{(j)}$, $J_{yy}^{(j)}$, $J_{zz}^{(j)}$, определяемых формулами (3.18.18). Пользуясь тождеством

$$(2x_C^{(j)} - x_j)x_j = x_C^{(j)2} - (x_j - x_C^{(j)})^2, \quad (3.18.25)$$

можно придать формулам (3.18.18) вид

$$\begin{aligned} J_{xx}^{(j)} &= m_j(y_j^2 + z_j^2); \quad J_{yy}^{(j)} = m_j(x_C^{(j)2} + z_j^2) + J_j; \\ J_{zz}^{(j)} &= m_j(x_C^{(j)2} + y_j^2) + J_j, \end{aligned} \quad (3.18.26)$$

$$\text{где } J_j = \pi \rho_j \int_{l_j}^{\theta_j} r ds - m_j(x_j - x_C^{(j)})^2. \quad (3.18.27)$$

Разность $x_j - x_C^{(j)}$ определяет глубину, на которой расположен центр масс жидкости, находящейся в j -м баке; от расположения j -го бака эта разность не зависит. Функция θ_j , определяемая дифференциальным уравнением (3.7.13) с краевым условием (3.7.14), тоже не зависит от расположения этого бака. Таким образом, величина J_j , входящая в формулы (3.8.26), зависит лишь от конфигурации j -го бака, от уровня заполнения этого бака жидкостью и от плотности жидкости, находящейся в баке; от расположения бака величина J_j не зависит. При $x_C^{(j)} = 0$, $y_j = 0$, $z_j = 0$, т. е. в том случае, когда центр масс жидкой массы, находящейся в j -м баке, совпадает с началом связанный системы координат $OXYZ$, формулы (3.18.26) принимают вид

$$J_{xx}^{(j)} = 0; \quad J_{yy}^{(j)} = J_j; \quad J_{zz}^{(j)} = J_j. \quad (3.18.28)$$

Согласно (3.14.28) величина J_j определяет момент инерции жидкости, находящейся в j -м баке, относительно поперечной оси, проходящей через центр масс этой жидкости. Момент инерции жидкости относительно продольной оси бака согласно (3.18.28) равен нулю, что соответствует исходным предположениям об осевой симметрии топливных баков и об идеальности жидких компонентов топлива.

По своему физическому смыслу величина J_j неотрицательна, и, вводя в рассмотрение радиус инерции h_j , можно положить

$$J_j = m_j h_j^2. \quad (3.18.29)$$

В соответствии с формулами (3.18.27) и (3.18.29) радиус инерции h_j может быть найден по формуле

$$h_j = [\frac{\pi}{v_j} \int l_j \frac{\partial \theta_j}{\partial n} r ds - (x_j - x_C^{(j)})^2]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.18.30)$$

где $v_j = m_j / \rho_j$ – объем жидкости, находящейся в j -м баке.

Согласно (3.18.1), (3.18.24), (3.18.26) и (3.18.29) моменты инерции J_x, J_y, J_z могут быть вычислены по формулам

$$\begin{aligned} J_x &= J_{xx}^{(0)} + \sum_{j=1}^N m_j (y_j^2 + z_j^2); \\ J_y &= J_{yy}^{(0)} + \sum_{j=1}^N m_j (x_C^{(j)}{}^2 + z_j^2 + h_j^2); \\ J_z &= J_{zz}^{(0)} + \sum_{j=1}^N m_j (x_C^{(j)}{}^2 + y_j^2 + h_j^2). \end{aligned} \quad (3.18.31)$$

Заменяя в (3.18.31) моменты инерции незаправленной ракеты $J_{xx}^{(0)}, J_{yy}^{(0)}, J_{zz}^{(0)}$ их развернутыми выражениями, получим для главных моментов инерции ракеты J_x, J_y, J_z расчетные формулы

$$\begin{aligned} J_x &= \int_{V_0} (y^2 + z^2) \rho dv + \sum_{j=1}^N m_j (y_j^2 + z_j^2); \\ J_y &= \int_{V_0} (x^2 + z^2) \rho dv + \sum_{j=1}^N m_j (x_C^{(j)}{}^2 + z_j^2 + h_j^2); \\ J_z &= \int_{V_0} (x^2 + y^2) \rho dv + \sum_{j=1}^N m_j (x_C^{(j)}{}^2 + y_j^2 + h_j^2). \end{aligned} \quad (3.18.32)$$

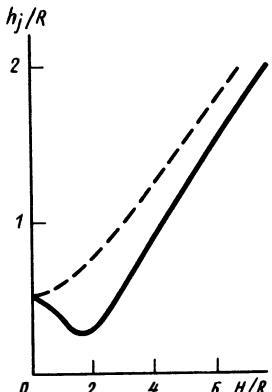


Рис. 3.8.

В качестве примера приведем формулу для подсчета радиуса инерции жидкости в цилиндрическом баке [2]

$$h_j = \left[\frac{H^2}{12} - \frac{3R^2}{4} + \frac{16R^3}{H} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{th} \frac{\nu_k H}{2R}}{\nu_k^3 (\nu_k^2 - 1)} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.18.33)$$

В пределе, когда отношение H/R стремится к нулю, равенство (3.18.33) вырождается в предельное

$$h_j = \frac{R}{2}. \quad (3.18.34)$$

При $R/H \rightarrow 0$ из (3.18.33) вытекает предельное соотношение

$$h_j = \frac{H}{2\sqrt{3}}. \quad (3.18.35)$$

В рассматриваемом примере радиус инерции "замороженной" жидкости определяется формулой

$$h_j = \sqrt{\frac{H^2}{12} + \frac{R^2}{4}}. \quad (3.18.36)$$

Согласно (3.18.34) – (3.18.36) при расчете радиуса инерции жидкости, находящейся в цилиндрическом топливном баке, эффект, который дает учет подвижности, исчезает при $H/R \rightarrow 0$ и при $H/R \rightarrow \infty$. На рис. 3.8 сплошной линией показана зависимость отношения h_j/R от H/R , найденная по формуле (3.18.33), т. е. с учетом подвижности жидкости, а пунктирной линией – без учета подвижности жидкости по формуле (3.18.36).

§ 3.19. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ РАКЕТЫ, УЧИТЫВАЮЩИЕ ПОДВИЖНОСТЬ ЖИДКОСТЕЙ В ТОПЛИВНЫХ БАКАХ

Уравнения сил и моментов (3.14.10) и (3.17.8) содержат систему функций $f_j(y, z, t)$, $j = 1, 2, \dots, N$, характеризующую колебания свободных поверхностей жидкостей в топливных баках. В то же время краевая задача, образуемая дифференциальным уравнением (3.5.3) с краевыми условиями (3.9.9) и определяющая функцию $f_j(y, z, t)$ в соответствии с формулой (3.6.10), содержит ускорения w_{0x}, w_{0y}, w_{0z} , $d\omega_x/dt, d\omega_y/dt, d\omega_z/dt$, характеризующие движение, совершаемое корпусом ракеты. Таким образом, задача о движении корпуса и задача о колебаниях жидкостей в топливных баках могут быть решены только в результате совместного их

рассмотрения. Чтобы получить полную систему уравнений, описывающую движение корпуса ракеты и движения, совершаемые жидкостями, находящимися в топливных баках, следует исключить из уравнений сил и моментов (3.14.10) и (3.17.8) функции $f_j(y, z, t)$ посредством соотношения (3.6.10) и присоединить к полученным зависимостям уравнения (3.5.3) с краевыми условиями (3.6.9):

$$\begin{aligned}
 m(\mathbf{w}_0 - \mathbf{g}) + \sum_{j=1}^N \rho_j \int_{\sigma_j} \mathbf{r} \left(\frac{\partial^3 \psi_j}{\partial x \partial t^2} \right)_{x=x_j} d\sigma = \mathbf{F}; \\
 (J_{xx} \frac{d\omega_x}{dt} + J_{xy} \frac{d\omega_y}{dt} + J_{xz} \frac{d\omega_z}{dt}) \mathbf{e}_x + \\
 + (J_{xy} \frac{d\omega_x}{dt} + J_{yy} \frac{d\omega_y}{dt} + J_{yz} \frac{d\omega_z}{dt}) \mathbf{e}_y + \\
 + (J_{xz} \frac{d\omega_x}{dt} + J_{yz} \frac{d\omega_y}{dt} + J_{zz} \frac{d\omega_z}{dt}) \mathbf{e}_z + \\
 + \sum_{j=1}^N \rho_j \int_{\sigma_j} \psi_j \left(\frac{\partial^3 \psi_j}{\partial x \partial t^2} \right)_{x=x_j} d\sigma + \sum_{j=1}^N \rho_j \int_{\sigma_j} \mathbf{r} \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x} \right)_{x=x_j} d\sigma \times \\
 \times (\mathbf{w}_0 - \mathbf{g}) = \mathbf{M}; \tag{3.19.1}
 \end{aligned}$$

$$\nabla^2 \psi_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N;$$

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial n} = 0 \text{ на } S_j, \quad j = 1, 2, \dots, N;$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial t^2} + (w_{0x} - g_x) \frac{\partial \psi_j}{\partial n} + (w_{0y} - g_y) y + \\
 + (w_{0z} - g_z) z + \frac{d\omega}{dt} \cdot \psi_j = C_j(t) \text{ на } \sigma_j, \quad j = 1, 2, \dots, N.
 \end{aligned}$$

Пользуясь формулой (3.6.10), можно отыскать по функциям $\psi_j(x, y, z, t)$, $j = 1, 2, \dots, N$ систему функций $f_j(y, z, t)$, $j = 1, 2, \dots, N$, определяющую колебания свободных поверхностей жидкостей в топливных баках. Зная векторные функции времени $\mathbf{v}_0(t)$ и $\boldsymbol{\omega}(t)$ и функции $\psi_j(x, y, z, t)$, $j = 1, 2, \dots, N$, можно построить по формуле (3.5.16) систему векторных функций $\mathbf{v}_j(x, y, z, t)$, $j = 1, 2, \dots, N$, определяющую поля скоростей жидкостей, находящихся в топливных баках. Таким образом, уравнения (3.19.1) полностью описывают движения, совершаемые корпусом ракеты и жидкостями, находящимися в ее топливных баках.

Для построения уравнений движения (3.19.1) необходимо отыскать предварительно потенциалы Жуковского φ_{jx} , φ_{jy} , φ_{jz} , $j = 1, 2, \dots, N$, явно входящие в уравнения (3.19.1) и фигурирующие в формулах Жуковского (3.16.3).

§ 3.20. УРАВНЕНИЯ ПРОДОЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ, ДВИЖЕНИЯ В ПЛОСКОСТИХ ТАНГАЖА, РЫСКАНИЯ И КРЕНА

Проектируя в первых двух уравнениях (3.19.1) векторы на координатные оси OX , OY , OZ и пользуясь при этом формулами перехода (3.7.6) и соотношениями (3.18.23) и (3.18.24), получим три уравнения сил

$$\begin{aligned} m(w_{0x} - g_x) + \sum_{j=1}^N \rho_j \int_{\sigma_j} x_j \left(\frac{\partial^3 \psi_j}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} d\sigma &= F_x; \\ m(w_{0y} - g_y) + \sum_{j=1}^N \rho_j \int_{\sigma_j} (y_j + r \cos \alpha) \left(\frac{\partial^3 \psi_j}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} d\sigma &= F_y; \\ m(w_{0z} - g_z) + \sum_{j=1}^N \rho_j \int_{\sigma_j} (z_j + r \sin \alpha) \left(\frac{\partial^3 \psi_j}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} d\sigma &= F_z \end{aligned} \quad (3.20.1)$$

и три уравнения моментов

$$\begin{aligned} J_x \frac{d\omega_x}{dt} + \sum_{j=1}^N \rho_j \int_{\sigma_j} \varphi_{jx} \left(\frac{\partial^3 \psi_j}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} d\sigma + \\ + (w_{0z} - g_z) \sum_{j=1}^N \rho_j \int_{\sigma_j} (y_j + r \cos \alpha) \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} d\sigma - \\ - (w_{0y} - g_y) \sum_{j=1}^N \rho_j \int_{\sigma_j} (z_j + r \sin \alpha) \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} d\sigma &= M_x; \\ J_y \frac{d\omega_y}{dt} + \sum_{j=1}^N \rho_j \int_{\sigma_j} \varphi_{jy} \left(\frac{\partial^3 \psi_j}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} d\sigma + (w_{0x} - \\ - g_x) \sum_{j=1}^N \rho_j \int_{\sigma_j} (z_j + r \sin \alpha) \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} d\sigma - (w_{0z} - \\ - g_z) \sum_{j=1}^N \rho_j \int_{\sigma_j} x_j \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} d\sigma &= M_y; \\ J_z \frac{d\omega_z}{dt} + \sum_{j=1}^N \rho_j \int_{\sigma_j} \varphi_{jz} \left(\frac{\partial^3 \psi_j}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} d\sigma + (w_{0y} - \end{aligned} \quad (3.20.2)$$

$$- g_y) \sum_{j=1}^N \rho_j \int_{\sigma_j} x_j \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} d\sigma - (w_{0x} - g_x) \sum_{j=1}^N \rho_j \int_{\sigma_j} (y_j + r \cos \alpha) \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} d\sigma = M_z.$$

В § 3.8 были получены равенства (3.8.4) и (3.8.7) для потенциалов Жуковского φ_{jx} , φ_{jy} , φ_{jz} и формула (3.8.18) для потенциала перемещений ψ_j . Пользуясь этими формулами, преобразуем поверхностные интегралы, входящие в уравнения (3.20.1) и (3.20.2).

Преобразовав формулу (3.8.18)

$$\psi_j = (\psi_{jy} - \psi_{jx} \sin \alpha_j) \cos \alpha + (\psi_{jz} + \psi_{jx} \cos \alpha_j) \sin \alpha, \quad (3.20.3)$$

с учетом (3.10.21) найдем

$$\begin{aligned} \int_{\sigma_j} x_j \left(\frac{\partial^3 \psi_j}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} d\sigma &= x_j \int_{\sigma_j} \left\{ \left[\frac{\partial^3 (\psi_{jy} - \psi_{jx} \sin \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} \cos \alpha + \right. \\ &+ \left. \left[\frac{\partial^3 (\psi_{jz} + \psi_{jx} \cos \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} \sin \alpha \right\} d\sigma = \\ &= x_j \left\{ \int_0^{2\pi} \cos \alpha d\alpha \int_0^{R_j} \left[\frac{\partial^3 (\psi_{jy} - \psi_{jx} \sin \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} r dr + \right. \\ &+ \left. \int_0^{2\pi} \sin \alpha d\alpha \int_0^{R_j} \left[\frac{\partial^3 (\psi_{jz} + \psi_{jx} \cos \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} r dr \right\} = 0; \end{aligned} \quad (3.20.4)$$

$$\begin{aligned} \int_{\sigma_j} (y_j + r \cos \alpha) \left(\frac{\partial^3 \psi_j}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} d\sigma &= \\ &= \int_{\sigma_j} (y_j + r \cos \alpha) \left\{ \left[\frac{\partial^3 (\psi_{jy} - \psi_{jx} \sin \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} \cos \alpha + \right. \\ &+ \left. \left[\frac{\partial^3 (\psi_{jz} + \psi_{jx} \cos \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} \sin \alpha \right\} d\sigma = \\ &= y_j \left\{ \int_0^{2\pi} \cos \alpha d\alpha \int_0^{R_j} \left[\frac{\partial^3 (\psi_{jy} - \psi_{jx} \sin \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} r dr + \right. \\ &+ \left. \int_0^{2\pi} \sin \alpha d\alpha \int_0^{R_j} \left[\frac{\partial^3 (\psi_{jz} + \psi_{jx} \cos \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} r dr \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{2\pi} \sin \alpha \cos \alpha d\alpha \int_0^{R_j} \left[\frac{\partial^3 (\psi_{jz} + \psi_{jx} \cos \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} r^2 dr + \\
& + \int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha d\alpha \int_0^{R_j} \left[\frac{\partial^3 (\psi_{jy} - \psi_{jx} \sin \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} r^2 dr = \\
& = \pi \int_0^{R_j} \left[\frac{\partial^3 (\psi_{jy} - \psi_{jx} \sin \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} r^2 dr = \\
& = \pi \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial^3 \psi_{jy}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} r^2 dr - \pi \sin \alpha_j \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial^3 \psi_{jx}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} r^2 dr; \quad (3.20.5) \\
& \int_{\sigma_j} (z_j + r \sin \alpha) \left(\frac{\partial^3 \psi_j}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} d\sigma = \\
& = \int_{\sigma_j} (z_j + r \sin \alpha) \left\{ \left[\frac{\partial^3 (\psi_{jy} - \psi_{jx} \sin \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} \cos \alpha + \right. \\
& \left. + \left[\frac{\partial^3 (\psi_{jz} + \psi_{jx} \cos \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} \sin \alpha \right\} d\sigma = \\
& = z_j \left\{ \int_0^{2\pi} \cos \alpha d\alpha \int_0^{R_j} \left[\frac{\partial^3 (\psi_{jy} - \psi_{jx} \sin \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} r dr + \right. \\
& \left. + \int_0^{2\pi} \sin \alpha d\alpha \int_0^{R_j} \left[\frac{\partial^3 (\psi_{jz} + \psi_{jx} \cos \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} r dr \right\} + \\
& + \int_0^{2\pi} \sin \alpha \cos \alpha d\alpha \int_0^{R_j} \left[\frac{\partial^3 (\psi_{jy} - \psi_{jx} \sin \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} r^2 dr + \\
& + \int_0^{2\pi} \sin^2 \alpha d\alpha \int_0^{R_j} \left[\frac{\partial^3 (\psi_{jz} + \psi_{jx} \cos \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} r^2 dr = \\
& = \pi \int_0^{R_j} \left[\frac{\partial^3 (\psi_{jz} + \psi_{jx} \cos \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} r^2 dr = \\
& = \pi \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial^3 \psi_{jz}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} r^2 dr + \\
& + \pi \cos \alpha_j \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial^3 \psi_{jx}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} r^2 dr. \quad (3.20.6)
\end{aligned}$$

Согласно (3.20.4) первому из уравнений (3.20.1) можно придать вид

$$m(w_{0x} - g_x) = F_x . \quad (3.20.7)$$

Уравнение продольного движения (3.20.7) ничем не отличается от уравнения, положенного в основу исследования продольного движения ракеты в гл. 1. Таким образом, колебания жидкостей в топливных баках на продольное движение ракеты не влияют.

Согласно (3.20.5) и (3.20.6) второе и третье из уравнений (3.20.1) могут быть приведены к виду

$$\begin{aligned} m(w_{0y} - g_y) + \pi \sum_{j=1}^N \rho_j \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial^3 \psi_{jy}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} r^2 dr - \\ - \pi \sum_{j=1}^N \rho_j \sin \alpha_j \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial^3 \psi_{jx}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} r^2 dr = F_y ; \\ m(w_{0z} - g_z) + \pi \sum_{j=1}^N \rho_j \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial^3 \psi_{jz}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} r^2 dr + \\ + \pi \sum_{j=1}^N \rho_j \cos \alpha_j \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial^3 \psi_{jx}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} r^2 dr = F_z . \end{aligned} \quad (3.20.8)$$

Перейдем к преобразованию уравнений моментов (3.20.2). Пользуясь формулами (3.8.4), (3.8.7), (3.10.21) и (3.20.3), найдем

$$\begin{aligned} \int_{\sigma_j} \varphi_{jx} \left(\frac{\partial^3 \psi_j}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} d\sigma = r_j \int_{\sigma_j} (\sin \alpha \cos \alpha_j - \\ - \cos \alpha \sin \alpha_j) \left\{ \left[\frac{\partial^3 (\psi_{jy} - \psi_{jx} \sin \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} \cos \alpha + \right. \\ \left. + \left[\frac{\partial^3 (\psi_{jz} + \psi_{jx} \cos \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} \sin \alpha \right\} r d\sigma = \\ = r_j \left\{ \int_0^{2\pi} \sin \alpha \cos \alpha_j \int_0^{R_j} \cos \alpha_j \left[\frac{\partial^3 (\psi_{jy} - \psi_{jx} \sin \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} - \right. \\ \left. - \sin \alpha_j \left[\frac{\partial^3 (\psi_{jz} + \psi_{jx} \cos \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} r^2 dr + \right. \\ \left. + \cos \alpha_j \int_0^{2\pi} \sin^2 \alpha d\alpha \int_0^{R_j} \left[\frac{\partial^3 (\psi_{jz} + \psi_{jx} \cos \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} r^2 dr - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sin \alpha_j \int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha d\alpha \int_0^{R_j} \left[\frac{\partial^3 (\psi_{jy} - \psi_{jx} \sin \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} r^2 dr \Big\} = \\
& = \pi r_j \left\{ \cos \alpha_j \int_0^{R_j} \left[\frac{\partial^3 (\psi_{jz} + \psi_{jx} \cos \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} r^2 dr - \right. \\
& \quad \left. - \sin \alpha_j \int_0^{R_j} \left[\frac{\partial^3 (\psi_{jy} - \psi_{jx} \sin \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} r^2 dr \right\} = \\
& = \pi r_j \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial^3 \psi_{jx}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} r^2 dr - \pi r_j \sin \alpha_j \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial^3 \psi_{jy}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} r^2 dr + \\
& \quad + \pi r_j \cos \alpha_j \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial^3 \psi_{jz}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} r^2 dr; \tag{3.20.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\sigma_j} \varphi_{jy} \left(\frac{\partial^3 \psi_j}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} d\sigma = \\
& = - \int_{\sigma_j} (x_j - K_j) \sin \alpha \left\{ \left[\frac{\partial^3 (\psi_{jy} - \psi_{jx} \sin \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} \cos \alpha + \right. \\
& \quad \left. + \left[\frac{\partial^3 (\psi_{jz} + \psi_{jx} \cos \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} \sin \alpha \right\} r d\sigma = \\
& = - \int_0^{2\pi} \sin \alpha \cos \alpha d\alpha \int_0^{R_j} \left[\frac{\partial^3 (\psi_{jy} - \psi_{jx} \sin \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} (x_j - K_j) r^2 dr - \\
& \quad - \int_0^{2\pi} \sin^2 \alpha d\alpha \int_0^{R_j} \left[\frac{\partial^3 (\psi_{jz} + \psi_{jx} \cos \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} (x_j - K_j) r^2 dr = \\
& = - \pi \int_0^{R_j} \left[\frac{\partial^3 (\psi_{jz} + \psi_{jx} \cos \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} (x_j - K_j) r^2 dr = \\
& = - \pi \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial^3 \psi_{jz}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} (x_j - K_j) r^2 dr - \pi \cos \alpha_j \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial^3 \psi_{jx}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} \times \\
& \quad \times (x_j - K_j) r^2 dr; \tag{3.20.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\sigma_j} \varphi_{jz} \left(\frac{\partial^3 \psi_j}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} d\sigma = \int_{\sigma_j} (x_j - \\
& - K_j) \cos \alpha \left\{ \left[\frac{\partial^3 (\psi_{jy} - \psi_{jx} \sin \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} \cos \alpha + \right. \\
& \left. + \left[\frac{\partial^3 (\psi_{jz} + \psi_{jx} \cos \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} \sin \alpha \right\} r d\sigma = \\
& = \int_0^{2\pi} \sin \alpha \cos \alpha d\alpha \int_0^{R_j} \left[\frac{\partial^3 (\psi_{jz} + \psi_{jx} \cos \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} (x_j - K_j) r^2 dr + \\
& + \int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha d\alpha \int_0^{R_j} \left[\frac{\partial^3 (\psi_{jy} - \psi_{jx} \sin \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} (x_j - K_j) r^2 dr = \\
& = \pi \int_0^{R_j} \left[\frac{\partial^3 (\psi_{jy} - \psi_{jx} \sin \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} (x_j - K_j) r^2 dr = \\
& = \pi \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial^3 \psi_{jy}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} (x_j - K_j) r^2 dr - \pi \sin \alpha_j \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial^3 \psi_{jx}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} \times \\
& \times (x_j - K_j) r^2 dr. \tag{3.20.11}
\end{aligned}$$

Заменяя в левых частях формул (3.20.4), (3.20.5) и (3.20.6) производную $\partial^3 \psi_j / \partial \xi \partial t^2$ производной $\partial \psi_j / \partial \xi$, получим соотношения

$$\begin{aligned}
& \int_{\sigma_j} x_j \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} d\sigma = 0; \\
& \int_{\sigma_j} (y_j + r \cos \alpha) \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} d\sigma = \pi \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial \psi_{jy}}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} r^2 dr - \\
& - \pi \sin \alpha_j \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial \psi_{jx}}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} r^2 dr; \tag{3.20.12} \\
& \int_{\sigma_j} (z_j + r \sin \alpha) \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} d\sigma = \pi \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial \psi_{jz}}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} r^2 dr + \\
& + \pi \cos \alpha_j \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial \psi_{jx}}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} r^2 dr.
\end{aligned}$$

Согласно (3.20.9), (3.20.10), (3.20.11) и (3.20.12) уравнениям моментов (3.20.2) можно придать вид

$$\begin{aligned}
J_x \frac{d\omega_x}{dt} + \pi \sum_{j=1}^N \rho_j r_j \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial^3 \psi_{jx}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} r^2 dr - \\
- \pi \sum_{j=1}^N \rho_j r_j \sin \alpha_j \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial^3 \psi_{jy}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} r^2 dr + \\
+ \pi \sum_{j=1}^N \rho_j r_j \cos \alpha_j \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial^3 \psi_{jz}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} r^2 dr + \\
+ \pi (w_{0z} - g_z) \left[\sum_{j=1}^N \rho_j \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial \psi_{jy}}{\partial \xi} \right)'_{\xi=0} r^2 dr - \right. \\
- \left. \sum_{j=1}^N \rho_j \sin \alpha_j \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial \psi_{jx}}{\partial \xi} \right)'_{\xi=0} r^2 dr \right] - \pi (w_{0y} - \\
- g_y) \left[\sum_{j=1}^N \rho_j \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial \psi_{jz}}{\partial \xi} \right)'_{\xi=0} r^2 dr + \right. \\
\left. + \sum_{j=1}^N \rho_j \cos \alpha_j \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial \psi_{jx}}{\partial \xi} \right)'_{\xi=0} r^2 dr \right] = M_x; \\
J_y \frac{d\omega_y}{dt} - \pi \sum_{j=1}^N \rho_j \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial^3 \psi_{jz}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} (x_j - K_j) r^2 dr - \\
- \pi \sum_{j=1}^N \rho_j \cos \alpha_j \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial^3 \psi_{jx}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} (x_j - K_j) r^2 dr + \\
+ \pi (w_{0x} - g_x) \left[\sum_{j=1}^N \rho_j \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial \psi_{jz}}{\partial \xi} \right)'_{\xi=0} r^2 dr + \right. \\
\left. + \sum_{j=1}^N \rho_j \cos \alpha_j \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial \psi_{jx}}{\partial \xi} \right)'_{\xi=0} r^2 dr \right] = M_y; \\
J_z \frac{d\omega_z}{dt} + \pi \sum_{j=1}^N \rho_j \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial^3 \psi_{jy}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} (x_j - K_j) r^2 dr - \\
- \pi \sum_{j=1}^N \rho_j \sin \alpha_j \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial^3 \psi_{jx}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} (x_j - K_j) r^2 dr - \\
- \pi (w_{0x} - g_x) \left[\sum_{j=1}^N \rho_j \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial \psi_{jy}}{\partial \xi} \right)'_{\xi=0} r^2 dr - \right.
\end{aligned} \tag{3.20.13}$$

$$-\sum_{j=1}^N \rho_j \sin \alpha_j \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial^3 \psi_{jx}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} r^2 dr = M_z .$$

При $\cos \alpha_j \neq 0$ j -му топливному баку всегда будет соответствовать в силу симметрии ракеты точно такой же топливный бак с некоторым номером k , симметрично расположенный относительно плоскости $y = 0$ (см. рис. 3.3), и будут иметь место равенства

$$\begin{aligned} \psi_{kx} &\equiv \psi_{jx}; \quad \psi_{kz} \equiv \psi_{jz}; \quad \rho_k = \rho_j; \\ r_k &= r_j; \quad R_k = R_j; \\ x_k &= x_j; \quad K_k = K_j; \quad \cos \alpha_k = -\cos \alpha_j . \end{aligned} \tag{3.20.14}$$

Отсюда вытекают соотношения

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \rho_j \cos \alpha_j \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial^3 \psi_{jx}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} r^2 dr &= 0; \\ \sum_{j=1}^N \rho_j r_j \cos \alpha_j \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial^3 \psi_{jz}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} r^2 dr &= 0; \\ \sum_{j=1}^N \rho_j \cos \alpha_j \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial \psi_{jx}}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} r^2 dr &= 0; \\ \sum_{j=1}^N \rho_j \cos \alpha_j \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial^3 \psi_{jx}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} (x_j - K_j) r^2 dr &= 0 . \end{aligned} \tag{3.20.15}$$

Аналогично при $\sin \alpha_j \neq 0$ j -му топливному баку всегда будет соответствовать точно такой же топливный бак с некоторым номером k , симметрично расположенный по отношению к плоскости $z = 0$, и будут иметь место зависимости

$$\begin{aligned} \psi_{kx} &\equiv \psi_{jx}; \quad \psi_{ky} \equiv \psi_{jy}; \quad \rho_k = \rho_j; \quad r_k = r_j; \quad R_k = R_j; \\ x_k &= x_j; \quad K_k = K_j; \quad \sin \alpha_k = -\sin \alpha_j . \end{aligned} \tag{3.20.16}$$

Равенства (3.20.16) влечут за собой соотношения

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \rho_j \sin \alpha_j \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial^3 \psi_{jx}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} r^2 dr &= 0; \\ \sum_{j=1}^N \rho_j r_j \sin \alpha_j \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial^3 \psi_{jy}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} r^2 dr &= 0; \end{aligned} \tag{3.20.17}$$

$$\sum_{j=1}^N \rho_j \sin \alpha_j \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial \psi_{jx}}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} r^2 dr = 0; \\ \sum_{j=1}^N \rho_j \sin \alpha_j \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial^3 \psi_{jx}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} (x_j - K_j) r^2 dr = 0. \quad (3.20.17)$$

Согласно (3.20.15) и (3.20.17) уравнения сил (3.20.8) можно преобразовать следующим образом:

$$m(w_{0y} - g_y) + \pi \sum_{j=1}^N \rho_j \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial^3 \psi_{jy}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} r^2 dr = F_y; \\ m(w_{0z} - g_z) + \pi \sum_{j=1}^N \rho_j \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial^3 \psi_{jz}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} r^2 dr = F_z, \quad (3.20.18)$$

а уравнениям моментов (3.20.13) можно придать вид

$$J_x \frac{d\omega_x}{dt} + \pi \sum_{j=1}^N \rho_j r_j \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial^3 \psi_{jx}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} r^2 dr + \\ + \pi (w_{0z} - g_z) \sum_{j=1}^N \rho_j \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial \psi_{jy}}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} r^2 dr - \\ - \pi (w_{0y} - g_y) \sum_{j=1}^N \rho_j \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial \psi_{jz}}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} r^2 dr = M_x; \\ J_y \frac{d\omega_y}{dt} - \pi \sum_{j=1}^N \rho_j \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial^3 \psi_{jz}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} (x_j - K_j) r^2 dr + \\ + \pi (w_{0x} - g_x) \sum_{j=1}^N \rho_j \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial \psi_{jz}}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} r^2 dr = M_y; \quad (3.20.19)$$

$$J_z \frac{d\omega_z}{dt} + \pi \sum_{j=1}^N \rho_j \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial^3 \psi_{jy}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} (x_j - K_j) r^2 dr - \\ - \pi (w_{0x} - g_x) \sum_{j=1}^N \rho_j \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial \psi_{jy}}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} r^2 dr = M_z.$$

Объединяя первое уравнение (3.20.18) с третьим уравнением (3.20.19) и присоединяя к ним дифференциальные уравнения (3.8.14) с краевыми условиями (3.8.15), получим

$$\begin{aligned}
m(w_{0y} - g_y) + \pi \sum_{j=1}^N \rho_j \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial^3 \psi_{jy}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} r^2 dr &= F_y; \\
J_z \frac{d\omega_z}{dt} + \pi \sum_{j=1}^N \rho_j \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial^3 \psi_{jy}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} (x_j - K_j) r^2 dr - \\
- \pi (w_{0x} - g_x) \sum_{j=1}^N \rho_j \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial \psi_{jy}}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} r^2 dr &= M_z; \\
\frac{\partial^2 \psi_{jy}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi_{jy}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_{jy}}{\partial r} - \frac{\psi_{jy}}{r^2} &= 0, \tag{3.20.20}
\end{aligned}$$

$$j = 1, 2, \dots, N;$$

$$\frac{\partial \psi_{jy}}{\partial n} = 0 \text{ на } l_j^*, \quad j = 1, 2, \dots, N;$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi_{jy}}{\partial t^2} + (w_{0x} - g_x) \frac{\partial \psi_{jy}}{\partial \xi} + r [w_{0y} - g_y + \\
+ (x_j - K_j) \frac{d\omega_z}{dt}] &= 0 \text{ при } \xi = 0, \quad 0 < r < R_j, \quad j = 1, 2, \dots, N.
\end{aligned}$$

Таким образом, уравнения (3.20.20) представляют собой уравнения движения ракеты в плоскости тангажа, учитывающие подвижность жидкостей, находящихся в топливных баках ракеты.

Аналогично, объединяя второе уравнение (3.20.18) со вторым уравнением (3.20.19) и присоединяя к ним дифференциальные уравнения (3.8.16) с краевыми условиями (3.8.17), получим уравнения движения ракеты в плоскости рыскания

$$\begin{aligned}
m(w_{0z} - g_z) + \pi \sum_{j=1}^N \rho_j \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial^3 \psi_{jz}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} r^2 dr &= F_z; \\
J_y \frac{d\omega_y}{dt} - \pi \sum_{j=1}^N \rho_j \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial^3 \psi_{jz}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} (x_j - K_j) r^2 dr + \\
+ \pi (w_{0x} - g_x) \sum_{j=1}^N \rho_j \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial \psi_{jz}}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} r^2 dr &= M_y; \\
\frac{\partial^2 \psi_{jz}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi_{jz}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_{jz}}{\partial r} - \frac{\psi_{jz}}{r^2} &= 0, \tag{3.20.21}
\end{aligned}$$

$$j = 1, 2, \dots, N;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_{jz}}{\partial n} &= 0 \quad \text{на } l_j^*, \quad j = 1, 2, \dots, N; \\ \frac{\partial^2 \psi_{jz}}{\partial t^2} + (w_{0x} - g_x) \frac{\partial \psi_{jz}}{\partial \xi} + r [w_{0z} - g_z - \\ &- (x_j - K_j) \frac{d\omega_y}{dt}] &= 0 \quad \text{при } \xi = 0, \quad 0 < r < R_j, \quad j = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.20.21)$$

Уравнения движения в плоскости рыскания (3.20.21) можно получить из уравнений движения в плоскости тангажа (3.20.20), заменяя величины $w_{0y} - g_y$, $d\omega_z/dt$, F_y , M_z , J_z и ψ_{jy} соответственно величинами $w_{0z} - g_z$, $-d\omega_y/dt$, F_z , $-M_y$, J_y и ψ_{jz} . Таким образом, уравнения движения в плоскости тангажа и в плоскости рыскания имеют совершенно одинаковые структуры. Так же как и в гл. 1, мы ограничимся в дальнейшем рассмотрением уравнений движения в плоскости тангажа, имея в виду применимость всех полученных результатов к движению в плоскости рыскания.

Присоединяя к первому уравнению моментов (3.20.19) дифференциальные уравнения (3.8.12) с краевыми условиями (3.8.13), получим уравнения

$$\begin{aligned} J_x \frac{d\omega_x}{dx} + \pi \sum_{j=1}^N \rho_j r_j \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial^3 \psi_{jx}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} r^2 dr + \\ + \pi (w_{0z} - g_z) \sum_{j=1}^N \rho_j \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial \psi_{jy}}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} r^2 dr - \\ - \pi (w_{0y} - g_y) \sum_{j=1}^N \rho_j \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial \psi_{jz}}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} r^2 dr &= M_x; \end{aligned} \quad (3.20.22)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_{jx}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi_{jx}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_{jx}}{\partial r} - \frac{\psi_{jx}}{r^2} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N;$$

$$\frac{\partial \psi_{jx}}{\partial n} = 0 \quad \text{на } l_j^*, \quad j = 1, 2, \dots, N;$$

$$\frac{\partial^2 \psi_{jx}}{\partial t^2} + (w_{0x} - g_x) \frac{\partial \psi_{jx}}{\partial \xi} + r r_j \frac{d\omega_x}{dt} = 0 \quad \text{при } \xi = 0,$$

$$0 < r < R_j, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Уравнения (3.20.22) определяют вращение корпуса ракеты вокруг его продольной оси и возникающие при этом вращении колебания свобод-

ных поверхностей жидкостей в топливных баках, которые согласно (3.8.19) характеризуются функциями

$$f_j = \left(\frac{\partial \psi_{jx}}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} \sin(\alpha - \alpha_j), \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (3.20.23)$$

Таким образом, уравнения (3.20.22) представляют собой уравнения движения ракеты в плоскости крена с учетом подвижности жидкостей, находящихся в топливных баках ракеты.

В уравнения (3.20.22) входят величины $w_{0y} - g_y$, $w_{0z} - g_z$, ψ_{jy} и ψ_{jz} , характеризующие движение, совершающееся ракетой в плоскостях тангажа и рыскания. Слагаемые, содержащие эти величины, определяют влияние, которое оказывают колебания ракеты в плоскостях тангажа и рыскания на вращение ракеты вокруг ее продольной оси. Этот эффект возникает вследствие того, что колебания свободных поверхностей жидкостей, вызываемые колебаниями корпуса ракеты в плоскостях тангажа и рыскания, приводят к колебаниям центра масс ракеты относительно ее оси и влияют, таким образом, на осевую составляющую главного момента внешних сил относительно центра масс ракеты. Ввиду относительной малости поперечных кажущихся ускорений $w_{0y} - g_y$ и $w_{0z} - g_z$ указанный эффект является практически весьма слабым и им обычно пренебрегают. Опуская в (3.20.22) слагаемые, характеризующие данный эффект, получим уравнения

$$\begin{aligned} J_x \frac{d\omega_x}{dt} + \pi \sum_{j=1}^N \rho_j r_j \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial^3 \psi_{jx}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} r^2 dr &= M_x; \\ \frac{\partial^2 \psi_{jx}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi_{jx}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_{jx}}{\partial r} - \frac{\psi_{jx}}{r^2} &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, N; \\ \frac{\partial \psi_{jx}}{\partial n} &= 0 \text{ на } l_j^*, \quad j = 1, 2, \dots, N; \\ \frac{\partial^2 \psi_{jx}}{\partial t^2} + (w_{0x} - g_x) \frac{\partial \psi_{jx}}{\partial \xi} + r r_j \frac{d\omega_x}{dt} &= 0 \text{ при } \xi = 0, \\ 0 < r < R_j, \quad j &= 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (3.20.24)$$

где r_j – расстояние от оси j -го топливного бака до продольной оси ракеты OX . При $r_1 = r_2 = \dots = r_N = 0$, т. е. в том случае, когда оси всех топливных баков совпадают с продольной осью ракеты, уравнения (3.20.24) распадаются на уравнение

$$J_x \frac{d\omega_x}{dt} = M_x \quad (3.20.25)$$

и однородные дифференциальные уравнения для функций ψ_{jx} с однородными краевыми условиями. Согласно (3.8.32) в данном случае

$$J_x = \int_0^r (y^2 + z^2) \rho dV \quad (3.20.26)$$

$(y_j^2 + z_j^2 = r_j^2)$. Таким образом, при $r_1 = r_2 = \dots = r_N = 0$ наличие жидкостей в топливных баках не влияет на вращение ракеты вокруг ее продольной оси, что согласуется с исходными предположениями об осевой симметрии топливных баков и об идеальности жидких компонентов топлива.

Непосредственное исследование устойчивости движения ракеты на основе уравнений движения, построенных в этом параграфе, весьма затруднительно из-за наличия дифференциальных уравнений в частных производных. Поэтому уравнения движения ракеты, учитывающие подвижность жидких компонентов топлива, мы преобразуем ниже в системы обыкновенных дифференциальных уравнений, к которым применимы обычные методы исследования устойчивости движения. Это преобразование основывается на понятии, которое рассмотрено в параграфе о собственных колебаниях свободных поверхностей жидкостей.

§ 3.21. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ В СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В § 3.12 определение функций $\psi_{jx}(\xi, r, t)$ и $\psi_{jy}(\xi, r, t)$ было сведено к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений (3.12.27). Определив из этих уравнений функции $\alpha_j(t)$ и $\beta_j(t)$, далее по формулам (3.12.26) можно найти функции $\psi_{jx}(\xi, r, t)$ и $\psi_{jy}(\xi, r, t)$. Пользуясь формулами (3.12.26), преобразуем уравнения движения ракеты в плоскостях тангажа и крена, построенные в § 3.20, в системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Согласно (3.12.26) первым двум уравнениям (3.20.20) можно придать вид

$$\begin{aligned} m(w_{0y} - g_y) + \pi \sum_{j=1}^N \rho_j \frac{d^2 \beta_j}{dt^2} \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial \Theta_j}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} r^2 dr &= F_y; \\ J_z \frac{d\omega_z}{dt} + \pi \sum_{j=1}^N \rho_j \frac{d^2 \beta_j}{dt^2} \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial \Theta_j}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} (x_j - K_j) r^2 dr &- (3.21.1) \\ - \pi (w_{0x} - g_x) \sum_{j=1}^N \rho_j \beta_j \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial \Theta_j}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} r^2 dr &= M_z \end{aligned}$$

(в процессе опорожнения j -го бака возникает зависимость собственной функции Θ_j от времени, однако при дифференцировании функций ψ_{jx} и ψ_{jy} этой зависимостью можно пренебречь, так как скорость изменения

функции Θ_j в этом случае очень мала по сравнению со скоростью изменения функций α_j и β_j).

Введя обозначения

$$\begin{aligned} a_{jy} &= \pi \rho_j \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial \Theta_j}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} r^2 dr; \\ a_{j\vartheta} &= \pi \rho_j \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial \Theta_j}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} (x_j - K_j) r^2 dr, \end{aligned} \quad (3.21.2)$$

можно привести уравнения (3.21.1) к виду

$$\begin{aligned} m(w_{0y} - g_y) + \sum_{j=1}^N a_{jy} \frac{d^2 \beta_j}{dt^2} &= F_y; \\ J_z \frac{d \omega_z}{dt} + \sum_{j=1}^N a_{j\vartheta} \frac{d^2 \beta_j}{dt^2} - (w_{0x} - g_x) \sum_{j=1}^N a_{jy} \beta_j &= M_z. \end{aligned} \quad (3.21.3)$$

Согласно (3.10.14) формулам (3.21.2) можно придать вид

$$\begin{aligned} a_{jy} &= \pi \rho_j \int_0^{R_j} F_j(r) r^2 dr; \\ a_{j\vartheta} &= \pi \rho_j \int_0^{R_j} F_j(r) (x_j - K_j) r^2 dr = a_{jy} (x_j - \frac{\int_0^{R_j} F_j(r) K_j r^2 dr}{\int_0^{R_j} F_j(r) r^2 dr}), \end{aligned}$$

или, если воспользоваться обозначением (3.12.28),

$$a_{jy} = \pi \rho_j \int_0^{R_j} F_j(r) r^2 dr; \quad a_{j\vartheta} = (x_j - \delta_j) a_{jy}. \quad (3.21.4)$$

С учетом демпфирования первое из уравнений (3.12.27) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \beta_j}{dt^2} + \epsilon_j \frac{d \beta_j}{dt} + \omega_j^2 \beta_j + \lambda_j [w_{0y} - g_y + \\ + (x_j - \delta_j) \frac{d \omega_z}{dt}] \frac{\int_0^{R_j} F_j(r) r^2 dr}{\int_0^{R_j} F_j^2(r) dr} = 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & \frac{\pi \rho_j}{\lambda_j} \int_0^{R_j} F_j^2 r dr \left(\frac{d^2 \beta_j}{dt^2} + \epsilon_j \frac{d \beta_j}{dt^2} + \omega_j^2 \beta_j \right) + \\ & + \pi \rho_j \int_0^{R_j} F_j r^2 dr [w_{0y} - g_y + (x_j - \delta_j) \frac{d \omega_z}{dt}] = 0. \end{aligned} \quad (3.21.5)$$

Введя обозначение

$$\mu_j = \frac{\pi \rho_j}{\lambda_j} \int_0^{R_j} F_j^2 r dr \quad (3.21.6)$$

и пользуясь обозначениями (3.21.4), можно привести уравнение (3.21.5) к виду

$$\begin{aligned} & \mu_j \left(\frac{d^2 \beta_j}{dt^2} + \epsilon_j \frac{d \beta_j}{dt} + \omega_j^2 \beta_j \right) + a_{jy} (w_{0y} - g_y) + \\ & + a_{j\vartheta} \frac{d \omega_z}{dt} = 0. \end{aligned} \quad (3.21.7)$$

Согласно (3.21.3) и (3.21.7) уравнения движения ракеты в плоскости тангажа могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} & m(w_{0y} - g_y) + \sum_{j=1}^N a_{jy} \frac{d^2 \beta_j}{dt^2} = F_y; \\ & J_z \frac{d \omega_z}{dt} + \sum_{j=1}^N a_{j\vartheta} \frac{d^2 \beta_j}{dt^2} - (w_{0x} - g_x) \sum_{j=1}^N a_{jy} \beta_j = M_z; \\ & \mu_j \left(\frac{d^2 \beta_j}{dt^2} + \epsilon_j \frac{d \beta_j}{dt} + \omega_j^2 \beta_j \right) + a_{jy} (w_{0y} - g_y) + \\ & + a_{j\vartheta} \frac{d \omega_z}{dt} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.21.8)$$

Система дифференциальных уравнений (3.21.8) описывает движение, совершающееся корпусом ракеты в плоскости тангажа, и определяет функции времени $\beta_1(t), \beta_2(t), \dots, \beta_N(t)$, характеризующие колебания свободных поверхностей жидкостей в топливных баках.

Функции $F_1(r), F_2(r), \dots, F_N(r)$, входящие в формулы (3.21.4) и (3.21.6), в процессе расчета форм собственных колебаний жидкостей определяются с точностью до произвольных множителей, не зависящих от переменной r . Чтобы придать однозначность коэффициентам дифферен-

циальных уравнений (3.21.8), установим для функций $F_j(r)$, $j = 1, 2, \dots, N$ дополнительное условие

$$\frac{dF_j}{dr} = 1 \text{ при } r = 0, \quad (3.21.9)$$

при наличии которого система функций $F_1(r)$, $F_2(r)$, ..., $F_N(r)$ будет определяться уже однозначно. Согласно (3.10.12) в этом случае функции $f_j(r, \alpha, t)$, определяющие отклонения точек свободных поверхностей жидкостей от плоскостей σ_j , будут всегда удовлетворять условию

$$\left(\frac{\partial f_j}{\partial r} \right)_{r=0} = \beta_j(t) \cos \alpha^! \quad (3.21.10)$$

В частности, в полуплоскости $\alpha = 0$, нормальной к линии узлов, будет иметь место равенство

$$\beta_j(t) = \left(\frac{\partial f_j}{\partial r} \right)_{r=0}. \quad (3.21.11)$$

При малых колебаниях свободной поверхности жидкости в j -м баке правая часть равенства (3.21.11) представляет собой угол между плоскостью, касательной к свободной поверхности σ_j^* в точке $r = 0$, и плоскостью σ_j . Таким образом, при выполнении условия (3.21.9) функция $\beta_j(t)$ будет определять угол поворота свободной поверхности жидкости в j -м баке вокруг ее линии узлов в сечении свободной поверхности, нормальному к этой линии (рис. 3.9).

Перейдем к преобразованию уравнений движения ракеты в плоскости крена. Согласно (3.12.26) первому уравнению (3.20.24) можно привести вид

$$J_x \frac{d\omega_x}{dt} + \pi \sum_{j=1}^N \rho_j r_j \frac{d^2 \alpha_j}{dt^2} \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} r^2 dr = M_x,$$

$$\text{или } J_x \frac{d\omega_x}{dt} + \sum_{j=1}^N a_{j\gamma} \frac{d^2 \alpha_j}{dt^2} = M_x, \quad (3.21.12)$$

$$\text{где } a_{j\gamma} = \pi \rho_j r_j \int_0^{R_j} \left(\frac{\partial \Theta_j}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} r^2 dr. \quad (3.21.13)$$

В соответствии с формулами (3.21.2) и (3.21.13) коэффициенты $a_{j\gamma}$ и a_{jy} связаны между собой зависимостью

$$a_{j\gamma} = r_j a_{jy}. \quad (3.21.14)$$

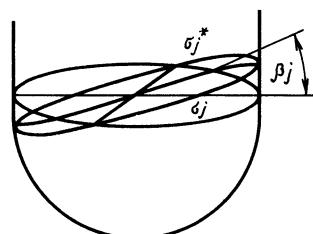


Рис. 3.9.

С учетом демпфирования второе уравнение (3.12.27) принимает вид

$$\frac{d^2 \alpha_j}{dt^2} + \epsilon_j \frac{d \alpha_j}{dt} + \omega_j^2 \alpha_j + \lambda_j r_j \frac{d \omega_x}{dt} \frac{\int_0^{R_j} F_j r^2 dr}{\int_0^{R_j} F_j^2 r dr} = 0,$$

или

$$\begin{aligned} & \frac{\pi \rho_j}{\lambda_j} \int_0^{R_j} F_j^2 r dr \left(\frac{d^2 \alpha_j}{dt^2} + \epsilon_j \frac{d \alpha_j}{dt} + \omega_j^2 \alpha_j \right) + \\ & + \pi \rho_j r_j \frac{d \omega_x}{dt} \int_0^{R_j} F_j r^2 dr = 0. \end{aligned} \quad (3.21.15)$$

Согласно (3.21.4) и (3.21.14) должно иметь место равенство

$$a_{j\gamma} = \pi \rho_j r_j \int_0^{R_j} F_j(r) r^2 dr. \quad (3.21.16)$$

В соответствии с формулами (3.21.6) и (3.21.16) уравнению (3.21.15) можно придать вид

$$\mu_j \left(\frac{d^2 \alpha_j}{dt^2} + \epsilon_j \frac{d \alpha_j}{dt} + \omega_j^2 \alpha_j \right) + a_{j\gamma} \frac{d \omega_x}{dt} = 0. \quad (3.21.17)$$

Согласно (3.21.12) и (3.21.17) уравнения движения ракеты в плоскости крена могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} J_x \frac{d \omega_x}{dt} + \sum_{j=1}^N a_{j\gamma} \frac{d^2 \alpha_j}{dt^2} &= M_x ; \\ \mu_j \left(\frac{d^2 \alpha_j}{dt^2} + \epsilon_j \frac{d \alpha_j}{dt} + \omega_j^2 \alpha_j \right) + a_{j\gamma} \frac{d \omega_x}{dt} &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.21.18)$$

Система дифференциальных уравнений (3.21.18) описывает вращение корпуса ракеты вокруг его продольной оси и определяет функции времени $\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_N(t)$, характеризующие колебания свободных поверхностей жидкостей, вызываемые этим вращением. При выполнении условия (3.21.9) функция $\alpha_j(t)$ определяет угол поворота свободной поверхности жидкости в j -м баке вокруг ее линии узлов в сечении свободной поверхности, нормальному к этой линии.

§ 3.22. УРАВНЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ, УЧИТЫВАЮЩИЕ ПОДВИЖНОСТЬ ЖИДКИХ КОМПОНЕНТОВ ТОПЛИВА

Перейдем теперь к построению дифференциальных уравнений возмущенного движения ракеты, учитывающих подвижность жидких компонентов топлива. Рассмотрим сначала движение ракеты в плоскости тангенса.

Пусть $\beta_1(t), \beta_2(t), \dots, \beta_N(t)$ – функции, характеризующие колебания свободных поверхностей жидкостей, совершаемые ими при невозмущенном движении ракеты в плоскости тангенса, и $\beta'_1(t), \beta'_2(t), \dots, \beta'_N(t)$ – функции, характеризующие колебания свободных поверхностей, возникающие при возмущенном движении ракеты. Согласно уравнениям (3.21.8) функции $\beta_1(t), \beta_2(t), \dots, \beta_N(t)$ должны удовлетворять дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} \mu_j \left(\frac{d^2 \beta_j}{dt^2} + \epsilon_j \frac{d\beta_j}{dt} + \omega_j^2 \beta_j \right) + a_{jy} (w_{0y} - g_y) + \\ + a_{j\vartheta} \frac{d\omega_z}{dt} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (3.22.1)$$

а функции $\beta'_1(t), \beta'_2(t), \dots, \beta'_N(t)$ – уравнениям

$$\begin{aligned} \mu_j \left(\frac{d^2 \beta'_j}{dt^2} + \epsilon_j \frac{d\beta'_j}{dt} + \omega_j^2 \beta'_j \right) + a_{jy} (w'_{0y} - g_{y'}) + \\ + a_{j\vartheta} \frac{d\omega'_z}{dt} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (3.22.2)$$

где $w'_{0y} - g_{y'}$ – кажущееся поперечное ускорение в плоскости тангенса, возникающее в процессе возмущенного движения ракеты; ω'_z – скорость вращения ракеты вокруг оси OZ , соответствующая возмущенному движению (ввиду предполагаемой малости колебаний свободных поверхностей жидкостей в уравнениях (3.21.2) можно пренебречь малыми изменениями коэффициентов этих дифференциальных уравнений, которые могут возникать при переходе от невозмущенного движения ракет к возмущенному). В соответствии с уравнениями (3.22.1) и (3.22.2) разности

$$\Delta \beta_j = \beta'_j - \beta_j, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (3.22.3)$$

должны удовлетворять дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} \mu_j \left(\frac{d^2 \Delta \beta_j}{dt^2} + \epsilon_j \frac{d\Delta \beta_j}{dt} + \omega_j^2 \Delta \beta_j \right) + a_{jy} (w'_{0y} - g_{y'} - w_{0y} + \\ + g_y) + a_{j\vartheta} \frac{d(\omega'_z - \omega_z)}{dt} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.22.4)$$

Пользуясь матрицей перехода (1.12.5), найдем

$$\begin{aligned} w'_0 y' - g_{y'} &= w'_0 y - g_y - (w_{0x} - g_x) \Delta \vartheta = \\ &= w_{0y} - g_y - (w_{0x} - g_x) \Delta \vartheta + \frac{d \Delta V_y}{dt}; \end{aligned} \quad (3.22.5)$$

$$\omega'_z = \frac{d \vartheta'}{dt} = \frac{d \vartheta}{dt} + \frac{d \Delta \vartheta}{dt} = \omega_z + \frac{d \Delta \vartheta}{dt}$$

(с погрешностью второго порядка малости $v'_0 \cong V'_C = V_C + \Delta V_C$).

Согласно (3.22.5) дифференциальным уравнениям (3.22.4) можно придать вид

$$\begin{aligned} \mu_j \left(\frac{d^2 \Delta \beta_j}{dt^2} + \epsilon_j \frac{d \Delta \beta_j}{dt} + \omega_j^2 \Delta \beta_j \right) + a_{jy} \frac{d \Delta V_y}{dt} + a_{j\vartheta} \frac{d^2 \Delta \vartheta}{dt^2} - \\ - a_{jy} (w_{0x} - g_x) \Delta \vartheta = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.22.6)$$

Первые два уравнения (3.21.8) можно представить в виде

$$\begin{aligned} m(w_{0y} - g_y) &= F_y + F_{\text{жy}}; \\ J_z \frac{d \omega_z}{dt} &= M_z + M_{\text{жz}}, \end{aligned} \quad (3.22.7)$$

где $F_{\text{жy}} = - \sum_{j=1}^N a_{jy} \frac{d^2 \beta_j}{dt^2}$ и

$$M_{\text{жz}} = - \sum_{j=1}^N a_{j\vartheta} \frac{d^2 \beta_j}{dt^2} + (w_{0x} - g_x) \sum_{j=1}^N a_{jy} \beta_j \quad (3.22.8)$$

— соответственно сила и момент, возникающие вследствие подвижности жидкостей.

В гл. 1 без учета подвижности жидкости были получены уравнения усиленного движения ракеты в плоскости тангажа (1.13.5).

С учетом силы $F_{\text{жy}}$ и момента $M_{\text{жz}}$ уравнения (1.13.5) примут вид

$$\begin{aligned} m \frac{d \Delta V_y}{dt} + \nu_y \frac{d \Delta \vartheta}{dt} + c_{yy} \Delta V_y + c_{y\vartheta} \Delta \vartheta = \\ = c_{y\delta} \Delta \delta_\vartheta + \Delta F_y + \Delta F_{\text{жy}}; \\ J_z \frac{d^2 \Delta \vartheta}{dt^2} + \mu_z \frac{d \Delta \vartheta}{dt} + c_{\vartheta y} \Delta V_y + c_{\vartheta\vartheta} \Delta \vartheta = \end{aligned} \quad (3.22.9)$$

$$= c_{\vartheta\delta} \Delta\delta_{\vartheta} + \Delta M_z + \Delta M_{xz},$$

где ΔF_{xy} и ΔM_{xz} – изменения силы F_{xy} и момента M_{xz} , возникающие при переходе от невозмущенного движения ракеты к возмущенному.

Согласно (3.22.8) в возмущенном движении будут иметь место равенства

$$\begin{aligned} \Delta F_{xy} &= - \sum_{j=1}^N a_{jy} \frac{d^2 \Delta \beta_j}{dt^2}; \\ \Delta M_{xz} &= - \sum_{j=1}^N a_{j\vartheta} \frac{d^2 \Delta \beta_j}{dt^2} + (w_{0x} - g_x) \sum_{j=1}^N a_{jy} \Delta \beta_j \end{aligned} \quad (3.22.10)$$

(ввиду предполагаемой малости колебаний свободных поверхностей жидкостей можно пренебречь малыми изменениями коэффициентов дифференциальных выражений (3.22.8), которые могут возникать при переходе от невозмущенного к возмущенному движению ракеты).

Подставляя (3.22.10) в (3.22.9) и присоединяя к полученным уравнениям дифференциальные уравнения (3.22.6), получим систему уравнений

$$\begin{aligned} m \frac{d \Delta V_y}{dt} + v_y \frac{d \Delta \vartheta}{dt} + c_{yy} \Delta V_y + c_{y\vartheta} \Delta \vartheta + \\ + \sum_{j=1}^N a_{jy} \frac{d^2 \Delta \beta_j}{dt^2} = c_{y\delta} \Delta \delta_{\vartheta} + \Delta F_y; \\ J_z \frac{d^2 \Delta \vartheta}{dt^2} + \mu_z \frac{d \Delta \vartheta}{dt} + c_{\vartheta y} \Delta V_y + c_{\vartheta\vartheta} \Delta \vartheta + \\ + \sum_{j=1}^N a_{j\vartheta} \frac{d^2 \Delta \beta_j}{dt^2} - (w_{0x} - g_x) \sum_{j=1}^N a_{jy} \Delta \beta_j = c_{\vartheta\delta} \Delta \delta_{\vartheta} + \Delta M_z; \\ \mu_j \left(\frac{d^2 \Delta \beta_j}{dt^2} + \epsilon_j \frac{d \Delta \beta_j}{dt} + \omega_j^2 \Delta \beta_j \right) + a_{jy} \frac{d \Delta V_y}{dt} + \\ + a_{j\vartheta} \frac{d^2 \Delta \vartheta}{dt^2} - a_{jy} (w_{0x} - g_x) \Delta \vartheta = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.22.11)$$

Уравнения (3.22.11) представляют собой дифференциальные уравнения возмущенного движения ракеты в плоскости тангенса, учитывающие подвижность жидких компонентов топлива.

Перейдем к рассмотрению вращения ракеты вокруг ее продольной оси. Согласно (3.21.18) возмущения $\Delta \alpha_j$, возникающие при переходе

от невозмущенного к возмущенному движению ракеты, должны удовлетворять дифференциальным уравнениям

$$\mu_j \left(\frac{d^2 \Delta \alpha_j}{dt^2} + \epsilon_j \frac{d \Delta \alpha_j}{dt} + \omega_j^2 \Delta \alpha_j \right) + a_{j\gamma} \frac{d \Delta \omega_x}{dt} = 0,$$

$$j = 1, 2, \dots, N,$$

или

$$\mu_j \left(\frac{d^2 \Delta \alpha_j}{dt^2} + \epsilon_j \frac{d \Delta \alpha_j}{dt} + \omega_j^2 \Delta \alpha_j \right) + a_{j\gamma} \frac{d^2 \Delta \gamma}{dt^2} = 0,$$

$$j = 1, 2, \dots, N, \quad (3.22.12)$$

так как $\omega_x = d\gamma/dt$.

Первому из уравнений (3.21.18) можно придать вид

$$J_x \frac{d \omega_x}{dt} = M_x + M_{\text{жx}}, \quad (3.22.13)$$

$$\text{где } M_{\text{жx}} = - \sum_{j=1}^N a_{j\gamma} \frac{d^2 \Delta \alpha_j}{dt^2}. \quad (3.22.14)$$

В гл. 1 без учета момента $M_{\text{жx}}$ было получено уравнение возмущенного движения по крену (1.13.8).

С учетом момента $M_{\text{жx}}$ уравнение (1.13.8) примет вид

$$J_x \frac{d^2 \Delta \gamma}{dt^2} + \mu_x \frac{d \Delta \gamma}{dt} = c_{\gamma\delta} \Delta \delta_\gamma + \Delta M_x + \Delta M_{\text{жx}}, \quad (3.22.15)$$

$$\text{где } \Delta M_{\text{жx}} = - \sum_{j=1}^N a_{j\gamma} \frac{d^2 \Delta \alpha_j}{dt^2} \quad (3.22.16)$$

согласно (3.22.14). Подставляя (3.22.16) в (3.22.15) и присоединяя к полученному уравнению дифференциальные уравнения (3.22.13), получим систему уравнений

$$\begin{aligned} J_x \frac{d^2 \Delta \gamma}{dt^2} + \mu_x \frac{d \Delta \gamma}{dt} + \sum_{j=1}^N a_{j\gamma} \frac{d^2 \Delta \alpha_j}{dt^2} &= c_{\gamma\delta} \Delta \delta_\gamma + \Delta M_x; \\ \mu_j \left(\frac{d^2 \Delta \alpha_j}{dt^2} + \epsilon_j \frac{d \Delta \alpha_j}{dt} + \omega_j^2 \Delta \alpha_j \right) + a_{j\gamma} \frac{d^2 \Delta \gamma}{dt^2} &= 0, \end{aligned} \quad (3.22.17)$$

$$j = 1, 2, \dots, N.$$

Уравнения (3.22.17) представляют собой дифференциальные уравнения возмущенного движения ракеты в плоскости крена с учетом подвижности жидкого компонента топлива.

§ 3.23. РАСЧЕТ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

Вопрос о расчете коэффициентов c_{yy} , $c_{y\vartheta}$, $c_{y\delta}$, $c_{\vartheta y}$, $c_{\vartheta\vartheta}$, $c_{\vartheta\delta}$, $c_{\gamma\delta}$, ν_y , μ_x , μ_z , входящих в уравнения возмущенного движения (3.22.11) и (3.22.17), был рассмотрен в гл. 1. Ниже приведены расчетные формулы для вычисления остальных коэффициентов этих дифференциальных уравнений a_{jy} , $a_{j\vartheta}$, $a_{j\gamma}$, μ_j , ω_j , J_x , J_z (моменты инерции J_x и J_z в гл. 1 рассчитывались без учета подвижности жидкого компонента топлива).

Для расчета необходимо решить дифференциальные уравнения

$$\frac{\partial^2 \theta_j}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \theta_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_j}{\partial r} - \frac{\theta_j}{r^2} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (3.23.1)$$

с краевыми условиями

$$\frac{\partial \theta_j}{\partial n} = r \cos \chi + \xi \sin \chi \quad \text{на } l_j, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (3.23.2)$$

и отыскать первые собственные значения и первые собственные функции краевых задач, образуемых дифференциальными уравнениями

$$\frac{\partial^2 \Theta_j}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Theta_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta_j}{\partial r} - \frac{\Theta_j}{r^2} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (3.23.3)$$

и краевыми условиями

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta_j}{\partial n} &= 0 \quad \text{на } l_j^*; \\ \frac{\partial \Theta_j}{\partial n} &= \lambda_j \Theta_j \quad \text{при } \xi = 0, \quad 0 < r < R_j, \end{aligned} \quad j = 1, 2, \dots, N; \quad (3.23.4)$$

(см. § 3.7 и 3.9). Применяя для расчета собственных значений λ_j и собственных функций Θ_j метод последовательных приближений, изложенный в работе [2], можно свести все указанные выше вычисления к решению дифференциальных уравнений (3.23.1) с краевыми условиями вида

$$\frac{\partial \theta_j}{\partial n} = f_j(s) \quad \text{на } l_j, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (3.23.5)$$

где $f_j(s)$ – заданные функции длины дуги s контура l_j .

Зная функции θ_j и Θ_j , $j = 1, 2, \dots, N$ и числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$, можно рассчитывать коэффициенты дифференциальных уравнений возмущенного движения a_{jy} , μ_j , ω_j , J_x , J_z по формулам

$$\begin{aligned} a_{jy} &= \pi \rho_j \int_0^{R_j} F_j(r) r^2 dr; \quad \mu_j = \frac{\pi \rho_j}{\lambda_j} \int_0^{R_j} F_j^2(r) r dr; \\ \omega_j &= \sqrt{\lambda_j (w_{0x} - g_x)}; \quad J_x = \int_{V_0} (y^2 + z^2) \rho dV + \\ &+ \sum_{j=1}^N m_j (y_j^2 + z_j^2); \quad \backslash \\ J_z &= \int_{V_0} (x^2 + y^2) \rho dV + \sum_{j=1}^N m_j (x_C^{(j)2} + y_j^2 + h_j^2), \end{aligned} \quad (3.23.6)$$

где $F_j(r) = \left(\frac{\partial \Theta_j}{\partial \xi} \right)_{\xi=0}$; $h_j = [\frac{\pi}{v_j} \int l_j \theta_j \frac{\partial \theta_j}{\partial n} r ds - (x_j - x_C^{(j)})^2]^{1/2}$

$$(3.23.7)$$

(см. § 3.10, 3.18 и 3.21).

Зная коэффициенты a_{jy} , $j = 1, 2, \dots, N$, можно рассчитать коэффициенты $a_{j\vartheta}$ и $a_{j\gamma}$, $j = 1, 2, \dots, N$, по формулам

$$a_{j\vartheta} = (x_j - \delta_j) a_{jy}, \quad a_{j\gamma} = r_j a_{jy}, \quad (3.23.8)$$

$$\text{где } \delta_j = \frac{\int_0^{R_j} F_j K_j r^2 dr}{\int_0^{R_j} F_j r^2 dr}; \quad K_j = - \frac{(\theta_j)_{\xi=0}}{r} \quad (3.23.9)$$

(см. § 3.8, § 3.12, § 3.21).

Во всех рассуждениях этой главы мы предполагали для простоты, что продольная ось топливного бака всегда пересекает жидкую массу, находящуюся в этом баке, т. е. координата r изменяется в диапазоне $0 < r < R_j$. Если j -й бак имеет форму тора, во втором из краевых условий (3.23.4) интервал $0 < r < R_j$ должен быть заменен интервалом $R_j^{(0)} < r < R_j$, где $R_j^{(0)}$ – внутренний радиус плоской фигуры σ_j , имеющей в данном случае форму кольца. При этом отпадает требование регулярности решений дифференциальных уравнений (3.23.1) и (3.23.3) на оси топливного бака $r = 0$. В рассматриваемом случае в формулах (3.23.6) и (3.23.9) для a_{jy} , μ_j и δ_j интервал интегрирования $(0, R_j)$ следует заменить интервалом $(R_j^{(0)}, R_j)$.

До тех пор, пока j -й бак не начинает опорожняться, коэффициенты a_{jy} , $a_{j\vartheta}$, $a_{j\gamma}$ и μ_j сохраняют постоянные значения. В процессе опорожнения j -го бака возникает зависимость этих коэффициентов от времени t .

Как было указано в § 3.13, в процессе экспериментального определения коэффициентов демпфирования ϵ_j попутно определяют частоту собственных колебаний свободных поверхностей жидкостей ω_j . Зная частоты ω_1 , ω_2 , ..., ω_N , можно приближенно рассчитать остальные коэффициенты дифференциальных уравнений возмущенного движения, не прибегая к решению дифференциальных уравнений (3.23.1) и (3.23.3) с краевыми условиями (3.23.2) и (3.23.4). Согласно (3.12.15) для первого тона собственных колебаний свободной поверхности можно приближенно положить

$$F_j(r) = C_j r. \quad (3.23.10)$$

Для того чтобы выполнялось условие (3.21.9), константа должна быть равна единице. Полагая в формулах (3.23.6) для коэффициентов a_{jy} и μ_j

$$F_j(r) = r, \quad (3.23.11)$$

получим приближенные соотношения

$$\begin{aligned} a_{jy} &= \pi \rho_j \int_0^{R_j} r^3 dr = \frac{\pi}{4} \rho_j R_j^4; \\ \mu_j &= \frac{\pi \rho_j}{\lambda_j} \int_0^{R_j} r^3 dr = \frac{\pi \rho_j}{4 \lambda_j} R_j^4. \end{aligned} \quad (3.23.12)$$

Согласно (3.23.6) должно иметь место равенство

$$\lambda_j = \frac{\omega_j^2}{w_{0x} - g_x},$$

которое позволяет привести формулы (3.23.12) к виду

$$a_{jy} = \frac{\pi \rho_j R_j^4}{4}; \quad \mu_j = \frac{\pi \rho_j R^4}{4 \omega_j^2} (w_{0x} - g_x). \quad (3.23.13)$$

Расчет момента инерции J_x без учета подвижности жидких компонентов топлива приводит к завышенным результатам. Таким образом,

$$J_z < \int_{V_0} (x^2 + y^2) \rho dV + \sum_{j=1}^N \rho_j \int_{V_j} (x^2 + y^2) dV. \quad (3.23.14)$$

С другой стороны, согласно (3.23.6)

$$J_z > \int_{V_0} (x^2 + y^2) \rho dV + \sum_{j=1}^N m_j (x_C^{(j)}{}^2 + y_j^2). \quad (3.23.15)$$

В соответствии с неравенствами (3.23.14) и (3.23.15) приближенная формула

$$\begin{aligned} J_z = & \int_{V_0} (x^2 + y^2) \rho dV + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N [\rho_j \int_{V_j} (x^2 + y^2) dV + \\ & + m_j (x_C^{(j)}{}^2 + y_j^2)] \end{aligned} \quad (3.23.16)$$

дает погрешность по абсолютной величине, не превышающую

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N [\rho_j \int_{V_j} (x^2 + y^2) dV - m_j (x_C^{(j)}{}^2 + y_j^2)]. \quad (3.23.17)$$

Сумма (3.23.17) составляет обычно лишь несколько процентов от приближенного значения момента инерции J_z , определяемого формулой (3.23.16). Заменяя в (3.23.6) точную формулу для момента инерции J_z приближенной (3.23.16), получим расчетные формулы для моментов инерции

$$\begin{aligned} J_x &= \int_{V_0} (y^2 + z^2) \rho dV + \sum_{j=1}^N m_j (y_j^2 + z_j^2); \\ J_z &= \int_{V_0} (x^2 + y^2) \rho dV + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N [\rho_j \int_{V_j} (x^2 + y^2) dV + \\ &+ m_j (x_C^{(j)}{}^2 + y_j^2)]. \end{aligned} \quad (3.23.18)$$

При существенном удалении свободной поверхности жидкости в j -м баке от плоскости $x = 0$, проходящей через начало связанный системы координат, величина δ_j обычно мала по сравнению с абсолютной величиной координаты x_j . Если же свободная поверхность жидкости в j -м баке близка к плоскости $x = 0$, коэффициент $a_{j\vartheta}$ ввиду своей малости не играет существенной роли при исследовании устойчивости движения ракеты. Пренебрегая в (3.23.8) величиной δ_j , получим расчетные формулы

$$a_{j\vartheta} = x_j a_{jy}; \quad a_{j\gamma} = r_j a_{jy}. \quad (3.23.19)$$

Таким образом, получив экспериментальные значения коэффициентов демпфирования ϵ_j и частот собственных колебаний ω_j , можно осуществить ориентировочное исследование устойчивости движения ракеты, поль-

зусь при вычислении остальных коэффициентов дифференциальных уравнений возмущенного движения простыми расчетными формулами (3.23.13), (3.23.18) и (3.23.19).

§ 3.24. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РАКЕТЫ КАК ОБЪЕКТА АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

В гл. 2 при исследовании устойчивости движения ракеты с помощью простейших линейных дифференциальных уравнений была описана связь между входным и выходным сигналом автомата стабилизации. При учете подвижности жидких компонентов топлива в процессе исследования устойчивости движения ракеты приходится рассматривать колебания ее корпуса в существенно большем диапазоне частот; в этом случае описание закона управления дифференциальными уравнениями становится уже весьма сложным. В связи с этим для исследования устойчивости движения ракеты с учетом подвижности жидких компонентов топлива используются обычно частотные методы теории автоматического регулирования.

Так же как и в гл. 2, при исследовании устойчивости движения ракеты будем "замораживать" коэффициенты дифференциальных уравнений возмущенного движения, считая, что в рассматриваемом интервале времени эти коэффициенты сохраняют значения, соответствующие некоторому фиксированному начальному моменту времени $t = \tau$.

Рассмотрим сначала движение ракеты в плоскости тангажа. Для построения искомых частотных характеристик положим в уравнениях возмущенного движения (3.22.12)

$$\Delta F_y = 0; \quad \Delta M_z = 0; \quad \Delta \delta_\vartheta = e^{i\omega t} \quad (3.24.1)$$

и, считая коэффициенты этих дифференциальных уравнений постоянными, будем искать неизвестные функции ΔV_y , $\Delta \vartheta$, $\Delta \beta_j$, $j = 1, 2, \dots, N$ в виде

$$\Delta V_y = V e^{i\omega t}; \quad \Delta \vartheta = \theta e^{i\omega t}; \quad \Delta \beta_j = B_j e^{i\omega t}, \\ j = 1, 2, \dots, N. \quad (3.24.2)$$

Подставляя (3.24.1) и (3.24.2) в (3.22.12), получим для множителей V , θ и B_j , $j = 1, 2, \dots, N$ систему алгебраических уравнений

$$(c_{yy} + i\omega m)V + (c_{y\vartheta} + i\nu_y \omega)\theta - \omega^2 \sum_{j=1}^N a_{jy} B_j = c_{y\delta}; \\ c_{\vartheta y} V + (c_{\vartheta\vartheta} + i\mu_z \omega - \omega^2 J_z)\theta - \sum_{j=1}^N [(w_{0x} - g_x) a_{jy} + \\ + \omega^2 a_{j\vartheta}] B_j = c_{\vartheta\delta}; \\ \mu_j (\omega_j^2 - \omega^2 + i\epsilon_j \omega) B_j + i a_{jy} \omega V - [(w_{0x} - g_x) a_{jy} + \\ + \omega^2 a_{j\vartheta}] \theta = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (3.24.3)$$

Согласно (3.24.3) должны иметь место равенства

$$B_j = \frac{-ia_{jy}\omega V + [(\omega_{0x} - g_x)a_{jy} + \omega^2 a_{j\vartheta}] \theta}{\mu_j(\omega_j^2 - \omega^2 + i\epsilon_j\omega)}, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (3.24.4)$$

Подставляя (3.24.4) в первые два уравнения (3.24.3), получим для неизвестных V и θ систему, состоящую из двух алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} & [c_{yy} + i\omega m + \sum_{j=1}^N \frac{ia_{jy}^2 \omega^3}{\mu_j(\omega_j^2 - \omega^2 + i\epsilon_j\omega)}] V + \left\{ c_{y\vartheta} + i\nu_y \omega - \right. \\ & \left. - \sum_{j=1}^N \frac{[(\omega_{0x} - g_x)a_{jy} + \omega^2 a_{j\vartheta}] \omega^2 a_{jy}}{\mu_j(\omega_j^2 - \omega^2 + i\epsilon_j\omega)} \right\} \theta = c_{y\delta}; \\ & \left\{ c_{\vartheta y} + \sum_{j=1}^N \frac{[(\omega_{0x} - g_x)a_{jy} + \omega^2 a_{jy}] ia_{jy} \omega}{\mu_j(\omega_j^2 - \omega^2 + i\epsilon_j\omega)} \right\} V + \left\{ c_{\vartheta\vartheta} + \right. \\ & \left. + i\mu_z \omega - \omega^2 J_z - \sum_{j=1}^N \frac{[(\omega_{0x} - g_x)a_{jy} + \omega^2 a_{j\vartheta}]^2}{\mu_j(\omega_j^2 - \omega^2 + i\epsilon_j\omega)} \right\} \theta = c_{\vartheta\delta}. \end{aligned} \quad (3.24.5)$$

Введя обозначения

$$\begin{aligned} & c_{yy} + i\omega m + \sum_{j=1}^N \frac{ia_{jy}^2 \omega^3}{\mu_j(\omega_j^2 - \omega^2 + i\epsilon_j\omega)} = a_{11}(\omega) + ib_{11}(\omega); \\ & c_{y\vartheta} + i\nu_y \omega - \sum_{j=1}^N \frac{[(\omega_{0x} - g_x)a_{jy} + \omega^2 a_{j\vartheta}] \omega^2 a_{jy}}{\mu_j(\omega_j^2 - \omega^2 + i\epsilon_j\omega)} = \\ & = a_{12}(\omega) + ib_{12}(\omega); \\ & c_{\vartheta y} + \sum_{j=1}^N \frac{[(\omega_{0x} - g_x)a_{jy} + \omega^2 a_{j\vartheta}] ia_{jy} \omega}{\mu_j(\omega_j^2 - \omega^2 + i\epsilon_j\omega)} = a_{21}(\omega) + ib_{21}(\omega); \\ & c_{\vartheta\vartheta} + i\mu_z \omega - \omega^2 J_z - \sum_{j=1}^N \frac{[(\omega_{0x} - g_x)a_{jy} + \omega^2 a_{j\vartheta}]^2}{\mu_j(\omega_j^2 - \omega^2 + i\epsilon_j\omega)} = \\ & = a_{22}(\omega) + ib_{22}(\omega), \end{aligned} \quad (3.24.6)$$

можно привести уравнения (3.24.5) к виду

$$(a_{11} + ib_{11})V + (a_{12} + ib_{12})\theta = c_{y\delta};$$

$$(a_{21} + ib_{21})V + (a_{22} + ib_{22})\theta = c_{\vartheta\vartheta}. \quad (3.24.7)$$

Отделяя действительные и мнимые части в левых частях соотношений (3.24.6), получим для функций $a_{jk}(\omega)$ и $b_{jk}(\omega)$, $j = 1, 2$, $k = 1, 2$ расчетные формулы

$$\begin{aligned}
 a_{11}(\omega) &= c_{yy} + \sum_{j=1}^N \frac{\epsilon_j \omega^4 a_{jy}^2}{\mu_j [(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \epsilon_j^2 \omega^2]} ; \\
 b_{11}(\omega) &= \omega m + \sum_{j=1}^N \frac{(\omega_j^2 - \omega^2) \omega^3 a_{jy}^2}{\mu_j [(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \epsilon_j^2 \omega^2]} ; \\
 a_{12}(\omega) &= c_{y\vartheta} - \sum_{j=1}^N \frac{(\omega_j^2 - \omega^2) \omega^2 a_{jy} [(w_{0x} - g_x) a_{jy} + \omega^2 a_{j\vartheta}]}{\mu_j [(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \epsilon_j^2 \omega^2]} ; \\
 b_{12}(\omega) &= \nu_y \omega + \sum_{j=1}^N \frac{\epsilon_j \omega^3 a_{jy} [(w_{0x} - g_x) a_{jy} + \omega^2 a_{j\vartheta}]}{\mu_j [(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \epsilon_j^2 \omega^2]} ; \\
 a_{21}(\omega) &= c_{\vartheta y} + \sum_{j=1}^N \frac{\epsilon_j \omega^2 a_{jy} [(w_{0x} - g_x) a_{jy} + \omega^2 a_{j\vartheta}]}{\mu_j [(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \epsilon_j^2 \omega^2]} ; \\
 b_{21}(\omega) &= \sum_{j=1}^N \frac{(\omega_j^2 - \omega^2) \omega a_{jy} [(w_{0x} - g_x) a_{jy} + \omega^2 a_{j\vartheta}]}{\mu_j [(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \epsilon_j^2 \omega^2]} ; \\
 a_{22}(\omega) &= c_{\vartheta\vartheta} - \omega^2 J_z - \sum_{j=1}^N \frac{(\omega_j^2 - \omega^2) [(w_{0x} - g_x) a_{jy} + \omega^2 a_{j\vartheta}]^2}{\mu_j [(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \epsilon_j^2 \omega^2]} ; \\
 b_{22}(\omega) &= \mu_z \omega + \sum_{j=1}^N \frac{\epsilon_j \omega [(w_{0x} - g_x) a_{jy} + \omega^2 a_{j\vartheta}]^2}{\mu_j [(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \epsilon_j^2 \omega^2]} .
 \end{aligned} \tag{3.24.8}$$

Из уравнений (3.24.7) найдем

$$\begin{aligned}
 \theta &= \frac{c_{\vartheta\delta}(a_{11} + i b_{11}) - c_{y\delta}(a_{21} + i b_{21})}{(a_{11} + i b_{11})(a_{22} + i b_{22}) - (a_{12} + i b_{12})(a_{21} + i b_{21})} = \\
 &= \frac{c_{\vartheta\delta} a_{11} - c_{y\delta} a_{21} + i(c_{\vartheta\delta} b_{11} - c_{y\delta} b_{21})}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} - b_{11} b_{22} + b_{12} b_{21} + i(a_{11} b_{22} - a_{12} b_{21} + b_{11} a_{22} - b_{12} a_{21})} ,
 \end{aligned}$$

или $\theta = \theta_1(\omega) + i \theta_2(\omega)$, (3.24.9)

где $\theta_1(\omega)$ и $\theta_2(\omega)$ – функции частоты ω ,

$$\theta_1 = \frac{c_1(c_{\vartheta\delta} a_{11} - c_{y\delta} a_{21}) + c_2(c_{\vartheta\delta} b_{11} - c_{y\delta} b_{21})}{c_1^2 + c_2^2} ; \tag{3.24.10}$$

$$\theta_2 = \frac{c_1(c_{\vartheta\delta} b_{11} - c_{y\delta} b_{21}) - c_2(c_{\vartheta\delta} a_{11} - c_{y\delta} a_{21})}{c_1^2 + c_2^2};$$

$$c_1 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} - b_{11}b_{22} + b_{12}b_{21};$$

$$c_2 = a_{11}b_{22} - a_{12}b_{21} + b_{11}a_{22} - b_{12}a_{21}. \quad (3.24.10)$$

Соотношение (3.24.9) можно привести к виду

$$\theta = k_o(\omega) e^{i\varphi_o(\omega)}, \quad (3.24.11)$$

где $k_o(\omega) = \sqrt{\theta_1^2(\omega) + \theta_2^2(\omega)}$;

$$\varphi_o(\omega) = \arctg \frac{\theta_2(\omega)}{\theta_1(\omega)}. \quad (3.24.12)$$

Согласно (3.24.2) и (3.24.11) в рассматриваемом случае возмущение $\Delta\vartheta$, являющееся входным сигналом для автомата стабилизации, будет определяться зависимостью

$$\Delta\vartheta = k_o(\omega) e^{i[\omega t + \varphi_o(\omega)]} \quad (3.24.13)$$

Таким образом, при отсутствии возмущающих сил и моментов гармонические колебания исполнительных органов системы управления вызывают гармонические колебания входного сигнала автомата стабилизации, характеризуемые коэффициентом усиления $k_o(\omega)$ и фазовым сдвигом $\varphi_o(\omega)$. Функции $k_o(\omega)$ и $\varphi_o(\omega)$, для которых мы установили расчетные формулы (3.24.12), определяют амплитудно-частотную и фазово-частотную характеристики ракеты как объекта автоматического регулирования для случая колебаний ракеты в плоскости тангажа.

Перейдем к рассмотрению вращения ракеты вокруг ее продольной оси. Положив в уравнениях возмущенного движения (3.22.19)

$$\Delta M_x = 0, \quad \Delta\delta_\gamma = e^{i\omega t} \quad (3.24.14)$$

и считая коэффициенты этих дифференциальных уравнений "замороженными" в некоторый момент времени $t = \tau$, будем искать неизвестные функции $\Delta\gamma$ и $\Delta\alpha_j$, $j = 1, 2, \dots, N$ в виде

$$\Delta\gamma = \Gamma e^{i\omega t}, \quad \Delta\alpha_j = A_j e^{i\omega t}, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (3.24.15)$$

Подставляя (3.24.14) и (3.24.15) в (3.22.19), получим для множителей Γ и A_j , $j = 1, 2, \dots, N$ систему алгебраических уравнений

$$(i\omega\mu_x - \omega^2 J_x)\Gamma - \omega^2 \sum_{j=1}^N a_{j\gamma} A_j = c_{\gamma\delta}; \quad (3.24.16)$$

$$\mu_j (\omega_j^2 - \omega^2 + i\epsilon_j \omega) A_j - \omega^2 a_{j\gamma} \Gamma = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Исключая из уравнений (3.24.16) неизвестные A_j , $j = 1, 2, \dots, N$, получим уравнение

$$-[\omega^2 J_x - i\omega\mu_x + \sum_{j=1}^N \frac{a_{j\gamma}^2 \omega^4}{\mu_j(\omega_j^2 - \omega^2 + i\epsilon_j \omega)}] \Gamma = c_{\gamma\delta},$$

или $[c_1(\omega) + ic_2(\omega)] \Gamma = c_{\gamma\delta}$, (3.24.17)

где $c_1(\omega) = -\omega^2 J_x - \sum_{j=1}^N \frac{(\omega_j^2 - \omega^2) \omega^4 a_{j\gamma}^2}{\mu_j[(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \epsilon_j^2 \omega^2]}$;

$$c_2(\omega) = \omega\mu_x - \sum_{j=1}^N \frac{\epsilon_j \omega^5 a_{j\gamma}^2}{\mu_j[(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \epsilon_j^2 \omega^2]}.$$
 (3.24.18)

Согласно (3.24.17) будет иметь место равенство

$$\Gamma = \frac{c_{\gamma\delta}}{c_1 + ic_2},$$

или $\Gamma = \Gamma_1(\omega) + i\Gamma_2(\omega)$, (3.24.19)

где $\Gamma_1(\omega) = \frac{c_{\gamma\delta}c_1(\omega)}{c_1^2(\omega) + c_2^2(\omega)}$; $\Gamma_2(\omega) = -\frac{c_{\gamma\delta}c_2(\omega)}{c_1^2(\omega) + c_2^2(\omega)}$.

(3.24.20)

Придав формуле (3.24.19) вид

$$\Gamma = k_o(\omega)e^{i\varphi_o(\omega)},$$
 (3.24.21)

где $k_o(\omega) = \sqrt{\Gamma_1^2(\omega) + \Gamma_2^2(\omega)}$;

$$\varphi_o(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\Gamma_2(\omega)}{\Gamma_1(\omega)},$$
 (3.24.22)

получим согласно (3.24.15) и (3.24.21) зависимость

$$\Delta\gamma = k_o(\omega)e^{i[\omega t + \varphi_o(\omega)]}.$$
 (3.24.23)

В соответствии с равенством (3.24.23) функции $k_o(\omega)$ и $\varphi_o(\omega)$, для которых мы получили расчетные формулы (3.24.18), (3.24.20) и (3.24.22), определяют амплитудно-частотную и фазово-частотную характеристики ракеты как объекта автоматического регулирования для случая вращения ракеты вокруг ее продольной оси.

Определив для какого-либо из каналов управления частотные характеристики ракеты как объекта регулирования и задавшись частотными характеристиками автомата стабилизации, можно построить годограф разом-

кнутой системы автоматического регулирования и, пользуясь частотным критерием устойчивости, сделать вывод об устойчивости либо неустойчивости движения ракеты при заданных частотных характеристиках автомата стабилизации. Если коэффициент усиления и фазовый сдвиг автомата стабилизации определяются функциями $k_a(\omega)$ и $\varphi_a(\omega)$, то коэффициент усиления k и фазовый сдвиг φ разомкнутой системы автоматического регулирования будут определяться зависимостями

$$k = k_o(\omega)k_a(\omega); \quad \varphi = \varphi_o(\omega) + \varphi_a(\omega). \quad (3.24.24)$$

Соотношения (3.24.24) являются уравнениями годографа в полярных координатах k и φ . В прямоугольных координатах X и Y уравнения годографа будут иметь вид

$$\begin{aligned} X &= k_o(\omega)k_a(\omega) \cos [\varphi_o(\omega) + \varphi_a(\omega)]; \\ Y &= k_o(\omega)k_a(\omega) \sin [\varphi_o(\omega) + \varphi_a(\omega)]. \end{aligned} \quad (3.24.25)$$

Построив годограф разомкнутой системы в соответствии с расчетной схемой, изложенной в этом параграфе, можно сделать вывод о локальной устойчивости либо неустойчивости движения ракеты в момент времени $t = \tau$, воспользовавшись критерием Найквиста.

§ 3.25. ФАЗОВАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ КОЛЕБАНИЙ КОРПУСА РАКЕТЫ И СВОБОДНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ЖИДКОСТЕЙ В ТОПЛИВНЫХ БАКАХ

При отыскании частотных характеристик автомата стабилизации, обеспечивающих устойчивость движения ракеты, будем исходить из приближенного расчета частотных характеристик ракеты как объекта автоматического регулирования, основываясь на следующих упрощениях уравнений (3.24.3) и (3.24.16).

1. Гармонические колебания исполнительных органов системы управления с частотой ω возбуждают колебания свободной поверхности жидкости в топливном баке с номером $j = k$ практически лишь при значениях частоты ω , весьма близкой к частоте собственных колебаний этой свободной поверхности ω_k . Если среди остальных частот собственных колебаний $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{k-1}, \omega_{k+1}, \dots, \omega_N$ отсутствуют частоты, близкие к частоте ω_k , то при расчете частотных характеристик ракеты как регулируемого объекта для частот ω , близких к частоте ω_k , практически можно не учитывать колебания свободных поверхностей жидкостей в топливных баках с номерами $1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, N$. В этом случае в суммах, входящих в уравнения (3.24.3), сохраняются лишь слагаемые, содержащие неизвестную величину B_k , а в сумме, входящей в уравнения (3.24.16), сохранится лишь одно слагаемое, содержащее неизвестную величину A_k .

2. При определении неизвестных V и θ из первых двух уравнений системы (3.24.3) для частот ω , близких к частотам собственных колебаний свободных поверхностей жидкостей, основную роль среди слагаемых,

содержащих эти неизвестные, играют слагаемые $i\omega mV$ и $\omega^2 J_z \theta$. В связи с этим при приближенном расчете частотных характеристик ракеты как регулируемого объекта для частот ω , близких к частотам собственных колебаний жидкостей в топливных баках, в уравнениях (3.24.3) и (3.24.16) можно пренебречь слагаемыми, содержащими в качестве множителей коэффициенты c_{yy} , $c_{y\delta}$, $c_{\vartheta y}$, v_y , μ_z и μ_x .

Таким образом, приближенный расчет частотных характеристик ракеты как объекта автоматического регулирования для частот ω , близких к частоте ω_k , можно осуществить, заменяя систему уравнений (3.24.3) уравнениями

$$\begin{aligned} i\omega mV - \omega^2 a_{ky} B_k &= c_{y\delta}; \\ -\omega^2 J_z \theta - [(w_{0x} - g_x) a_{ky} + \omega^2 a_{k\vartheta}] B_k &= c_{\vartheta\delta}; \\ \mu_k (\omega_k^2 - \omega^2 + i\epsilon_k \omega) B_k + ia_{ky} \omega V - \\ - [(w_{0x} - g_x) a_{ky} + \omega^2 a_{k\vartheta}] \theta &= 0, \end{aligned} \quad (3.25.1)$$

а систему уравнений (3.24.16) – уравнениями

$$\begin{aligned} -\omega^2 J_x \Gamma - \omega^2 a_{k\gamma} A_k &= c_{\gamma\delta}; \\ \mu_k (\omega_k^2 - \omega^2 + i\epsilon_k \omega) A_k - \omega^2 a_{k\gamma} \Gamma &= 0. \end{aligned} \quad (3.25.2)$$

Рассмотрим сначала вопрос о стабилизации движения ракеты в плоскости тангажа. Исключая из уравнений (3.25.1) неизвестные V и θ , получим уравнение

$$\begin{aligned} \mu_k (\omega_k^2 - \omega^2 + i\epsilon_k \omega) B_k + \frac{a_{ky}}{m} (c_{y\delta} + \omega^2 a_{ky} B_k) + \\ + \frac{1}{\omega^2 J_z} [(w_{0x} - g_x) a_{ky} + \omega^2 a_{k\vartheta}] \{ c_{\vartheta\delta} + [(w_{0x} - \\ - g_x) a_{ky} + \omega^2 a_{k\vartheta}] B_k \} = 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \left\{ (ma_{k\vartheta}^2 + J_z a_{ky}^2 - \mu_k mJ_z) \omega^4 + [\mu_k mJ_z \omega_k^2 + 2m(w_{0x} - \\ - g_x) a_{ky} a_{k\vartheta}] \omega^2 + m(w_{0x} - g_x)^2 a_{ky}^2 + i\mu_k mJ_z \epsilon_k \omega^3 \right\} B_k = \\ = -(ma_{k\vartheta} c_{\vartheta\delta} + J_z a_{ky} c_{y\delta}) \omega^2 - m(w_{0x} - g_x) a_{ky} c_{\vartheta\delta}. \end{aligned} \quad (3.25.3)$$

Биквадратное уравнение

$$(ma_{k\vartheta}^2 + J_z a_{ky}^2 - \mu_k mJ_z) \omega^4 + [\mu_k mJ_z \omega_k^2 + 2m(w_{0x} - g_x) a_{ky} a_{k\vartheta}] \omega^2 + m(w_{0x} - g_x)^2 a_{ky}^2 = 0 \quad (3.25.4)$$

всегда имеет положительное вещественное решение ω_k^* , близкое к частоте ω_k . Для его приближенного отыскания в (3.25.4) положим

$$\omega = \omega_k + \eta. \quad (3.25.5)$$

Пренебрегая высшими степенями малой величины η , получим уравнение

$$\begin{aligned} & \left\{ 4(ma_{k\vartheta}^2 + J_z a_{ky}^2 - \mu_k m J_z) \omega_k^3 + 2[\mu_k m J_z \omega_k^2 + \right. \\ & \left. + 2m(w_{0x} - g_x) a_{ky} a_{k\vartheta}] \omega_k \right\} \eta + (ma_{k\vartheta}^2 + J_z a_{ky}^2) \omega_k^4 + \\ & + 2m(w_{0x} - g_x) a_{ky} a_{k\vartheta} \omega_k^2 + m(w_{0x} - g_x)^2 a_{ky}^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.25.6)$$

Согласно (3.19.10) и (3.21.4) уравнение (3.25.6) может быть приведено к виду

$$\begin{aligned} & \left\{ -2\mu_k m J_z + a_{ky}^2 [4m(x_k - \delta_k)^2 + 4J_z + \frac{4m(x_k - \delta_k)}{\lambda_k}] \right\} \eta + \\ & + \omega_k a_{ky}^2 [J_z + m(x_k - \delta_k)^2 + \frac{2m(x_k - \delta_k)}{\lambda_k} + \frac{m}{\lambda_k^2}] = 0, \\ \text{или } & \left\{ 1 - \frac{2a_{ky}^2}{\mu_k m} [1 + \frac{m(x_k - \delta_k)}{\lambda_k J_z} + \frac{m(x_k - \delta_k)^2}{J_z}] \right\} \eta = \\ & = \frac{\omega_k a_{ky}^2}{2\mu_k m} [1 + \frac{m}{J_z} (x_k - \delta_k + \frac{1}{\lambda_k})^2]. \end{aligned} \quad (3.25.7)$$

Отношение $a_{ky}^2 / \mu_k m$ всегда мало по сравнению с единицей, и в соответствии с равенством (3.25.7) можно приблизенно положить

$$\eta = \frac{\omega_k a_{ky}^2}{2\mu_k m} \left(1 + \frac{mx_k^{*2}}{J_z} \right), \quad (3.25.8)$$

$$\text{где } x_k^* = x_k - \delta_k + \frac{1}{\lambda_k}. \quad (3.25.9)$$

Согласно (3.25.5) и (3.25.8) решение ω_k^* биквадратного уравнения (3.25.4) может быть приближенно вычислено по формуле

$$\omega_k^* = \omega_k \left[1 + \frac{a_{ky}^2}{2\mu_k m} \left(1 + \frac{mx_k^{*2}}{J_z} \right) \right]. \quad (3.25.10)$$

При значениях частот ω , близких к частоте ω_k^* , B_k можно приближенно определить из уравнения (3.25.3), полагая в нем

$$\omega = \omega_k^* + \delta \quad (3.25.11)$$

и пренебрегая в левой части этого уравнения малыми величинами порядка малости δ^2 и $\epsilon_k \delta$, а в правой части уравнения – малыми величинами порядка малости δ . Уравнение (3.25.3) в этом случае примет вид

$$\begin{aligned} & \left\{ \left\{ 4(ma_{k\vartheta}^2 + J_z a_{ky}^2 - \mu_k m J_z) \omega_k^{*3} + 2[\mu_k m J_z \omega_k^{*2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2m(w_{0x} - g_x) a_{ky} a_{k\vartheta} \right] \omega_k^* \right\} \delta + i\mu_k m J_z \epsilon_k \omega_k^{*3} \right\} B_k = \\ & = -(ma_{k\vartheta} c_{\vartheta\delta} + J_z a_{ky} c_{y\delta}) \omega_k^{*2} - m(w_{0x} - g_x) a_{ky} c_{y\delta} \quad (3.25.12) \end{aligned}$$

(напомним, что ω_k^* – решение уравнения (3.25.4)). Пренебрегая в левой части уравнения (3.25.12) малыми величинами порядка малости $\delta \eta$ и $\epsilon_k \eta (\eta = \omega_k^* - \omega_k)$, а в правой части этого уравнения – малыми величинами порядка малости η , можно заменить в уравнении (3.25.12) частоту ω_k^* частотой ω_k . Согласно (3.10.10) и (3.21.4) в этом случае уравнению (3.25.12) можно будет придать вид

$$\begin{aligned} & \omega_k \mu_k m J_z \left\{ 2 \left\{ 1 - \frac{2a_{ky}}{\mu_k m} [1 + \frac{m(x_k - \delta_k)}{\lambda_k J_z} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{m(x_k - \delta_k)^2}{J_z}] \right\} \delta - i\epsilon_k \right\} B_k = a_{ky} [J_z c_{y\delta} + \\ & + m(x_k - \delta_k + \frac{1}{\lambda_k}) c_{\vartheta\delta}] \quad (3.25.13) \end{aligned}$$

Так как отношение $a_{ky}^2 / \mu_k m$ мало по сравнению с единицей, уравнение (3.25.13) можно заменить приближенным уравнением

$$(2\delta - i\epsilon_k) B_k = \frac{a_{ky}}{\omega_k \mu_k m J_z} [J_z c_{y\delta} + m(x_k - \delta_k + \frac{1}{\lambda_k}) c_{\vartheta\delta}],$$

или согласно (3.25.9)

$$(2\delta - i\epsilon_k) B_k = \frac{a_{ky} (J_z c_{y\delta} + mx_k^* c_{\vartheta\delta})}{\omega_k \mu_k m J_z}. \quad (3.25.14)$$

В соответствии со вторым уравнением (3.25.1) функция $\theta(\omega)$ может быть найдена по формуле

$$\theta = - \frac{[(w_{0x} - g_x) a_{ky} + \omega^2 a_{k\vartheta}] B_k + c_{\vartheta\delta}}{\omega^2 J_z}. \quad (3.25.15)$$

Подставляя B_k из (3.25.14) в (3.25.15), получим соотношение

$$\theta = - \frac{1}{\omega^2 \omega_k \mu_k m J_z^2 (2\delta - i\epsilon_k)} \left\{ [(w_{0x} - g_x) a_{ky} + \omega^2 a_{k\vartheta}] a_{ky} (J_z c_{y\delta} + mx_k^* c_{\vartheta\delta}) + \omega_k \mu_k m J_z c_{\vartheta\delta} (2\delta - i\epsilon_k) \right\}. \quad (3.25.16)$$

Учитывая предполагаемую нами близость частоты ω к частоте ω_k и малость величин δ и ϵ_k , можно заменить равенство (3.25.16) приближенным

$$\theta = - \frac{[(w_{0x} - g_x) a_{ky} + \omega^2 a_{k\vartheta}] a_{ky} (J_z c_{y\delta} + mx_k^* c_{\vartheta\delta})}{\omega_k^3 \mu_k m J_z^2 (2\delta - i\epsilon_k)}. \quad (3.25.17)$$

В соответствии с формулами (3.10.10) и (3.21.4) соотношению (3.25.17) можно придать вид

$$\theta = - \frac{(x_k - \delta_k + \frac{1}{\lambda_k}) a_{ky}^2 (J_z c_{y\delta} + mx_k^* c_{\vartheta\delta})}{\omega_k \mu_k m J_z^2 (2\delta - i\epsilon_k)},$$

или, если воспользоваться обозначением (3.25.9),

$$\theta = - \frac{x_k^* (J_z c_{y\delta} + mx_k^* c_{\vartheta\delta}) a_{ky}^2}{\omega_k \mu_k m J_z^2 (2\delta - i\epsilon_k)}. \quad (3.25.18)$$

Согласно (3.24.11) и (3.25.18) будут иметь место равенства

$$k_o(\omega) \cos \varphi_o(\omega) = \operatorname{Re} \theta = - \frac{2x_k^* (J_z c_{y\delta} + mx_k^* c_{\vartheta\delta}) a_{ky}^2 \delta}{\omega_k \mu_k m J_z^2 (4\delta^2 + \epsilon_k^2)}; \quad (3.25.19)$$

$$k_o(\omega) \sin \varphi_o(\omega) = \operatorname{Im} \theta = - \frac{x_k^* (J_z c_{y\delta} + mx_k^* c_{\vartheta\delta}) a_{ky}^2 \epsilon_k}{\omega_k \mu_k m J_z^2 (4\delta^2 + \epsilon_k^2)}.$$

В соответствии с формулами (3.24.25) и (3.25.19) в рассматриваемом случае уравнения годографа разомкнутой системы автоматического регулирования будут иметь вид

$$X = - \frac{x_k^* (J_z c_{y\delta} + mx_k^* c_{\vartheta\delta}) a_{ky}^2}{\omega_k \mu_k m J_z^2 (4\delta^2 + \epsilon_k^2)} k_a(\omega) [2\delta \cos \varphi_a(\omega) - \epsilon_k \sin \varphi_a(\omega)]; \quad (3.25.20)$$

$$Y = - \frac{x_k^* (J_z c_{y\delta} + mx_k^* c_{\vartheta\delta}) a_{ky}^2}{\omega_k \mu_k m J_z^2 (4\delta^2 + \epsilon_k^2)} k_a(\omega) [2\delta \sin \varphi_a(\omega) + \epsilon_k \cos \varphi_a(\omega)].$$

Учитывая предполагаемую нами близость частоты ω к частоте ω_k , можно заменить равенства (3.25.20) приближенными

$$X = - \frac{x_k^*(J_z c_{y\delta} + m x_k^* c_{\vartheta\delta}) a_{ky}^2}{\omega_k \mu_k m J_z^2 (4\delta^2 + \epsilon_k^2)} k_a(\omega_k) [2\delta \cos \varphi_a(\omega_k) - \epsilon_k \sin \varphi_a(\omega_k)];$$

$$Y = - \frac{x_k^*(J_z c_{y\delta} + m x_k^* c_{\vartheta\delta}) a_{ky}^2}{\omega_k \mu_k m J_z^2 (4\delta^2 + \epsilon_k^2)} k_a(\omega_k) [2\delta \sin \varphi_a(\omega_k) + \epsilon_k \cos \varphi_a(\omega_k)],$$

или $X = \frac{2c_k \epsilon_k [2\delta \cos \varphi_a(\omega_k) - \epsilon_k \sin \varphi_a(\omega_k)]}{4\delta^2 + \epsilon_k^2};$

$$Y = \frac{2c_k \epsilon_k [2\delta \sin \varphi_a(\omega_k) + \epsilon_k \cos \varphi_a(\omega_k)]}{4\delta^2 + \epsilon_k^2}, \quad (3.25.21)$$

$$\text{где } c_k = - \frac{k_a(\omega_k) x_k^*(J_z c_{y\delta} + m x_k^* c_{\vartheta\delta}) a_{ky}^2}{2\epsilon_k \omega_k \mu_k m J_z^2}. \quad (3.25.22)$$

Согласно (3.25.21) должны иметь место равенства

$$X \cos \varphi_a(\omega_k) + Y \sin \varphi_a(\omega_k) = \frac{4c_k \epsilon_k \delta}{4\delta^2 + \epsilon_k^2}; \quad (3.25.23)$$

$$X \sin \varphi_a(\omega_k) - Y \cos \varphi_a(\omega_k) = - \frac{2c_k \epsilon_k^2}{4\delta^2 + \epsilon_k^2},$$

в соответствии с которыми параметр δ может быть выражен через координаты годографа X, Y соотношением

$$\delta = - \frac{\epsilon_k [X \cos \varphi_a(\omega_k) + Y \sin \varphi_a(\omega_k)]}{2 [X \sin \varphi_a(\omega_k) - Y \cos \varphi_a(\omega_k)]}. \quad (3.25.24)$$

Подставляя (3.25.24) во второе равенство (3.25.23), можно привести уравнение годографа к виду

$$-2c_k = [X \sin \varphi_a(\omega_k) - Y \cos \varphi_a(\omega_k)] \left\{ 1 + \frac{[X \cos \varphi_a(\omega_k) + Y \sin \varphi_a(\omega_k)]^2}{[X \sin \varphi_a(\omega_k) - Y \cos \varphi_a(\omega_k)]^2} \right\} = \frac{X^2 + Y^2}{X \sin \varphi_a(\omega_k) - Y \cos \varphi_a(\omega_k)},$$

$$\text{или } X^2 + Y^2 + 2c_k [X \sin \varphi_a(\omega_k) - Y \cos \varphi_a(\omega_k)] = 0. \quad (3.25.25)$$

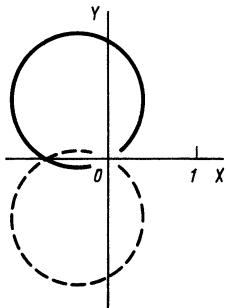


Рис. 3.10.

Уравнение (3.25.25) представляет собой уравнение окружности. Приведение этого уравнения к каноническому виду

$$(3.25.26)$$

$$[X + c_k \sin \varphi_a(\omega_k)]^2 + [Y - c_k \cos \varphi_a(\omega_k)]^2 = c_k^2$$

показывает, что координаты центра данной окружности X_0, Y_0 соответственно равны:

$$X_0 = -c_k \sin \varphi_a(\omega_k);$$

$$Y_0 = c_k \cos \varphi_a(\omega_k), \quad (3.25.27)$$

радиус окружности равен $|c_k|$, окружность проходит через начало координат.

При $X_0 < 0$ годограф разомкнутой системы при значениях частоты ω , близких к частоте ω_k , будет иметь вид, показанный на рис. 3.10: сплошной линией для случая $Y_0 > 0$ и пунктирной линией — для случая $Y_0 < 0$. В обоих случаях независимо от радиуса окружности на частотах ω , близких к частоте ω_k , годограф разомкнутой системы не может охватывать точку $X = 1, Y = 0$. Согласно (3.25.27) при внесенных нами упрощениях условие

$$c_k \sin \varphi_a(\omega_k) > 0 \quad (3.25.28)$$

является достаточным условием устойчивости колебаний корпуса ракеты и свободных поверхностей жидкостей в топливных баках¹. Условие (3.25.28) называют условием фазовой стабилизации, так как выполнение его обеспечивается созданием в автомате стабилизации фазового опережения на частоте $\omega = \omega_k$ при $c_k > 0$ либо фазового запаздывания на этой частоте при $c_k < 0$; значение, принимаемое на частоте $\omega = \omega_k$ коэффициентом усиления автомата стабилизации, в данном случае роли не играет. В соответствии с формулой (3.25.22) условию фазовой стабилизации (3.25.28) можно придать вид

$$x_k^*(J_z c_{y\delta} + m x_k^* c_{\vartheta\delta}) \sin \varphi_a(\omega_k) < 0. \quad (3.25.29)$$

Если система управления не создает управляющей силы и ее исполнительные органы формируют только управляющий момент (управление рассогласованием тяг), условие (3.25.29) принимает вид

$$\sin \varphi_a(\omega_k) > 0, \quad (3.25.30)$$

так как в этом случае $c_{y\delta} = 0, c_{\vartheta\delta} < 0$.

Таким образом, в рассматриваемом случае фазовую стабилизацию

¹ После уроцений, сделанных в начале параграфа, передаточная функция не может иметь полюсов в правой полуплоскости.

колебаний можно обеспечить, реализуя в автомате стабилизации фазовое опережение в диапазоне частот, охватывающем все частоты собственных колебаний свободных поверхностей жидкостей $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$.

Если исполнительные органы системы управления создают управляющую силу, то

$$c_{\theta\delta} = -lc_{y\delta}, \quad (3.25.31)$$

где l – расстояние от линии действия управляющей силы до плоскости $x = 0$. В этом случае условие (3.25.29) принимает вид

$$x_k^*(1 - \frac{mx_k^*l}{J_z}) \sin \varphi_a(\omega_k) < 0 \quad (3.25.32)$$

(коэффициент $c_{y\delta}$ всегда положителен). Согласно (3.25.32) для фазовой стабилизации колебаний требуется фазовое опережение на частоте ω_k при

$$x_k^* < 0 \quad \text{и} \quad x_k^* > J_z/ml \quad (3.25.33)$$

и фазовое запаздывание при

$$0 < x_k^* < J_z/ml. \quad (3.25.34)$$

Координата x_k^* обычно мало отличается от координаты x_k . Таким образом, при реализации в автомате стабилизации фазового опережения в диапазоне частот, охватывающем частоты собственных колебаний свободных поверхностей жидкостей $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$, осуществляется фазовая стабилизация колебаний для топливных баков, у которых свободные поверхности жидкостей лежат ниже центра масс ракеты. Для остальных топливных баков условия фазовой стабилизации, как правило, будут при этом нарушаться. Реализация в автомате стабилизации фазового опережения для одних топливных баков и фазового запаздывания для других практически невозможна, так как частоты собственных колебаний $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$ лежат обычно в небольшом частотном диапазоне и, кроме того, меняются в процессе полета ракеты. В связи с этим в автомате стабилизации для всего диапазона частот собственных колебаний свободных поверхностей жидкостей реализуют обычно фазовое опережение, а в верхних топливных баках, для которых на первой ступени полета условие фазовой стабилизации нарушается, устанавливают перфорированные крышки, практически исключающие колебания свободных поверхностей жидкостей до тех пор, пока эти баки не начинают опорожняться. К тому времени, когда топливо в баках начинает расходиться, поверхности жидкостей в них, как правило, оказываются уже ниже центра масс ракеты и устойчивость движения не нарушается. Места для установки крышек выбирают с учетом минимально допустимого уровня заправки баков.

Указанным выше путем удается обычно добиться стабилизации колебаний для большей части активного полета ракеты, однако на конечных

участках активного движения условия устойчивости часто нарушаются. Этот случай рассмотрен в следующем параграфе.

Перейдем к рассмотрению вращения ракеты вокруг ее продольной оси. Исключая из уравнений (3.25.2) неизвестную величину Γ , получим уравнение

$$[J_x \mu_k (\omega_k^2 - \omega^2 + i\epsilon_k \omega) + \omega^2 a_{k\gamma}^2] A_k + a_{k\gamma} c_{\gamma\delta} = 0. \quad (3.25.35)$$

Полагая в (3.25.35)

$$\omega_k^2 = (1 - \frac{a_{k\gamma}^2}{J_x \mu_k}) \omega_k^{*2}, \quad (3.25.36)$$

это уравнение можно преобразовать:

$$[(1 - \frac{a_{k\gamma}^2}{J_x \mu_k})(\omega_k^{*2} - \omega^2) + i\epsilon_k \omega] A_k = - \frac{a_{k\gamma} c_{\gamma\delta}}{J_x \mu_k}. \quad (3.25.37)$$

При значениях частоты ω , близких к частоте

$$\omega_k^* = \frac{\omega_k}{\sqrt{1 - \frac{a_{k\gamma}^2}{J_x \mu_k}}}, \quad (3.25.38)$$

в соответствии с равенством (3.25.36) величину A_k можно приближенно определить из уравнения (3.25.37), полагая в этом уравнении

$$\omega = \omega_k^* + \delta \quad (3.25.39)$$

и пренебрегая в левой части уравнения малыми величинами порядка малости δ^2 и $\epsilon_k \delta$. Уравнение (3.25.37) в этом случае примет вид

$$[2(1 - \frac{a_{k\gamma}^2}{J_x \mu_k})\delta - i\epsilon_k] A_k = \frac{a_{k\gamma} c_{\gamma\delta}}{\omega_k^* J_x \mu_k}. \quad (3.25.40)$$

Отношение $a_{k\gamma}^2 / J_x \mu_k$ всегда мало по сравнению с единицей, и согласно (3.25.38) частота ω_k^* всегда будет близка к частоте ω_k . В соответствии с этим уравнение (3.25.40) можно заменить приближенным уравнением

$$(2\delta - i\epsilon_k) A_k = \frac{a_{k\gamma} c_{\gamma\delta}}{\omega_k J_x \mu_k}. \quad (3.25.41)$$

Подставляя A_k из (3.25.41) в первое уравнение (3.25.2), получим

$$\Gamma = - \frac{\omega^2 a_{k\gamma}^2 + \omega_k J_x \mu_k (2\delta - i\epsilon_k)}{\omega^2 \omega_k J_x^2 \mu_k (2\delta - i\epsilon_k)} c_{\gamma\delta}. \quad (3.25.42)$$

Учитывая малость δ и ϵ_k , формулу (3.25.42) можно заменить приближенной

$$\Gamma = - \frac{a_{k\gamma}^2 c_{\gamma\delta}}{\omega_k J_x^2 \mu_k (2\delta - i\epsilon_k)} . \quad (3.25.43)$$

Согласно (3.24.21) и (3.25.43) будут иметь место равенства

$$k_o(\omega) \cos \varphi_o(\omega) = \operatorname{Re} \Gamma = - \frac{2a_{k\gamma}^2 c_{\gamma\delta} \delta}{\omega_k J_x^2 \mu_k (4\delta^2 + \epsilon_k^2)} ; \quad (3.25.44)$$

$$k_o(\omega) \sin \varphi_o(\omega) = \operatorname{Im} \Gamma = - \frac{a_{k\gamma}^2 c_{\gamma\delta} \epsilon_k}{\omega_k J_x^2 \mu_k (4\delta^2 + \epsilon_k^2)} .$$

В соответствии с формулами (3.24.25) и (3.25.44) в рассматриваемом случае уравнения годографа разомкнутой системы автоматического регулирования будут иметь вид

$$X = - \frac{a_{k\gamma}^2 c_{\gamma\delta}}{\omega_k J_x^2 \mu_k (4\delta^2 + \epsilon_k^2)} k_a(\omega) [2\delta \cos \varphi_a(\omega) - \epsilon_k \sin \varphi_a(\omega)] ; \quad (3.25.45)$$

$$Y = - \frac{a_{k\gamma}^2 c_{\gamma\delta}}{\omega_k J_x^2 \mu_k (4\delta^2 + \epsilon_k^2)} k_a(\omega) [2\delta \sin \varphi_a(\omega) + \epsilon_k \cos \varphi_a(\omega)] .$$

Учитывая предполагаемую нами близость частоты ω к частоте ω_k , можно заменить равенства (3.25.45) приближенными

$$X = - \frac{a_{k\gamma}^2 c_{\gamma\delta}}{\omega_k J_x^2 \mu_k (4\delta^2 + \epsilon_k^2)} k_a(\omega_k) [2\delta \cos \varphi_a(\omega_k) - \epsilon_k \sin \varphi_a(\omega_k)] ; \quad (3.25.46)$$

$$Y = - \frac{a_{k\gamma}^2 c_{\gamma\delta}}{\omega_k J_x^2 \mu_k (4\delta^2 + \epsilon_k^2)} k_a(\omega_k) [2\delta \sin \varphi_a(\omega_k) + \epsilon_k \cos \varphi_a(\omega_k)] .$$

Полагая в данном случае

$$c_k = - \frac{k_a(\omega_k) a_{k\gamma}^2 c_{\gamma\delta}}{2\epsilon_k \omega_k J_x^2} , \quad (3.25.47)$$

можно привести уравнения годографа разомкнутой системы (3.25.46) к виду (3.25.26), установленному ранее при рассмотрении движения ракеты

в плоскости тангажа. В рассматриваемом случае всегда будет иметь место неравенство

$$c_k > 0, \quad (3.25.48)$$

так как коэффициент $c_{\gamma\delta}$ всегда отрицателен. В соответствии с неравенством (3.25.48) условия фазовой стабилизации (3.25.28) для случая вращения ракеты вокруг ее продольной оси будут иметь вид

$$\sin \varphi_a(\omega_k) > 0, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (3.25.49)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае фазовую стабилизацию колебаний можно обеспечить, реализуя в автомате стабилизации фазовое опережение в диапазоне частот, охватывающем все частоты собственных колебаний свободных поверхностей $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$.

В заключение отметим, что указанные критерии устойчивости основываются на упрощениях расчетной схемы, приведенных в начале параграфа, и в отдельных случаях могут оказываться неверными. Строгое заключение об устойчивости движения может быть сделано лишь на основе точного построения годографа.

§ 3.26. АВТОКОЛЕБАНИЯ РАКЕТЫ В ПЛОСКОСТИ ТАНГАЖА

Рассмотрим теперь случай, когда для k -го топливного бака не может быть обеспечено условие фазовой стабилизации колебаний в плоскости тангажа (3.25.28). Согласно (3.25.27) при $c_k \sin \varphi_a(\omega_k) < 0$ координата X_0 центра окружности, приближенно определяющей вид годографа разомкнутой системы для частот ω , близких к частоте ω_k , будет положительной. В данном случае эта окружность имеет вид, показанный на рис. 3.11: сплошной линией для случая $Y_0 > 0$ и пунктирной линией — для случая $Y_0 < 0$. В соответствии с уравнениями рассматриваемой окружности (3.25.26) точки ее пересечения с прямой $Y = 0$ будут определяться квадратным уравнением

$$[X + c_k \sin \varphi_a(\omega_k)]^2 + c_k^2 \cos^2 \varphi_a(\omega_k) = c_k^2,$$

$$\text{или } X[X + 2c_k \sin \varphi_a(\omega_k)] = 0. \quad (3.26.1)$$

Таким образом, окружность будет пересекать ось X в точках с координатами

$$X = 0 \quad \text{и} \quad X = -2c_k \sin \varphi_a(\omega_k),$$

и условие устойчивости колебаний k -го топливного бака будет иметь вид

$$-2c_k \sin \varphi_a(\omega_k) < 1. \quad (3.26.2)$$

В соответствии с формулой (3.25.22) условию (3.26.2) можно приводить вид

$$\frac{k_a(\omega_k) \sin \varphi_a(\omega_k) x_k^*(J_z c_{y\delta} + m x_k^* c_{\vartheta\delta}) a_{ky}^2}{\epsilon_k \omega_k \mu_k m J_z^2} < 1,$$

$$\text{или } \epsilon_k > \epsilon_k^{(0)}, \quad (3.26.3)$$

$$\text{где } \epsilon_k^{(0)} = \frac{k_a(\omega_k) \sin \varphi_a(\omega_k) x_k^*(J_z c_{y\delta} + m x_k^* c_{\theta\delta}) a_{ky}^2}{\omega_k \mu_k m J_z^2}. \quad (3.26.4)$$

Величина $\epsilon_k^{(0)}$ определяет то минимальное значение коэффициента демпфирования ϵ_k , при котором колебания остаются еще устойчивыми. В частности, при $\epsilon_k = \epsilon_k^{(0)}$ годограф разомкнутой системы автоматического регулирования на некоторой частоте $\omega_k^{(0)}$, близкой к частоте ω_k , проходит через точку $X = 1$, $Y = 0$, и колебания приобретают гармонический характер.

Как уже было отмечено в § 3.13, коэффициент демпфирования зависит от амплитуды колебаний свободной поверхности жидкости в топливном баке и увеличивается при возрастании амплитуды этих колебаний. Значение предела, к которому стремится коэффициент демпфирования ϵ_k , когда амплитуда колебаний свободной поверхности жидкости в k -м баке стремится к нулю, как правило, оказывается недостаточным для выполнения условия устойчивости (3.26.3). В этом случае равенство $\epsilon_k = \epsilon_k^{(0)}$ выполняется лишь при некотором конкретном значении амплитуды колебаний свободной поверхности жидкости в k -м топливном баке, которое можно рассчитать, располагая экспериментальными данными о зависимости коэффициента демпфирования от амплитуды колебаний свободной поверхности. Значение амплитуды колебаний свободной поверхности жидкости в k -м топливном баке, при котором коэффициент демпфирования ϵ_k принимает значение $\epsilon_k^{(0)}$, определяемое формулой (3.26.4), будем обозначать ниже через $\beta_k^{(0)}$ ¹. В рассматриваемом случае одним из возможных движений ракеты будет такое ее движение в плоскости тангенса, при котором свободная поверхность жидкости в k -м топливном баке совершает гармонические колебания с амплитудой $\beta_k^{(0)}$. Если ампли-

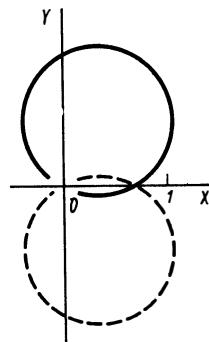


Рис. 3.11.

¹ При расчете амплитуды $\beta_k^{(0)}$ следует учитывать зависимость частотных характеристик автомата стабилизации, входящих в формулу (3.26.4), от амплитуды входного сигнала автомата стабилизации. Учет нелинейности автомата стабилизации подробнее рассматривается в конце параграфа.

туда колебаний свободной поверхности жидкости в k -м топливном баке не достигает критического значения $\beta_k^{(0)}$, будет иметь место неравенство $\epsilon_k < \epsilon_k^{(0)}$, колебания являются неустойчивыми и их амплитуда возрастает. При значениях амплитуды колебаний свободной поверхности, превышающих $\beta_k^{(0)}$, будет иметь место неравенство $\epsilon_k > \epsilon_k^{(0)}$ и колебания будут затухающими. Таким образом, движение ракеты в плоскости тангенса, при котором свободная поверхность жидкости в k -м топливном баке совершает гармонические колебания с амплитудой $\beta_k^{(0)}$, является устойчивым автоколебательным движением, которое неизбежно будет возникать в рассмотренных нами условиях.

В § 3.24 было показано, что при $\Delta\delta_\vartheta = e^{i\omega t}$, $\Delta F_y = 0$, $\Delta M_z = 0$ дифференциальные уравнения возмущенного движения (3.22.12) имеют решение, определяемое формулами (3.24.2). В соответствии с этим при

$$\Delta\delta_\vartheta = \delta_0 e^{i\omega t}; \quad \Delta F_y = 0; \quad \Delta M_z = 0 \quad (3.26.5)$$

дифференциальные уравнения возмущенного движения будут иметь решения

$$\Delta V_y = \delta_0 V e^{i\omega t}; \quad \Delta\vartheta = \delta_0 \theta e^{i\omega t}; \quad (3.26.6)$$

$$\Delta\beta_j = \delta_0 B_j e^{i\omega t}, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

так как эти дифференциальные уравнения линейны. Таким образом, колебания исполнительных органов системы управления с амплитудой δ_0 вызывают колебания свободной поверхности жидкости в k -м топливном баке, имеющие амплитуду $\delta_0 |B_k|$. Согласно (3.25.11) и (3.25.14) должно иметь место равенство

$$\sqrt{4(\omega - \omega_k^*)^2 + \epsilon_k^2} |B_k| = \frac{a_{ky} |J_z c_{y\delta} + mx_k^2 c_{\vartheta\delta}|}{\omega_k \mu_k m J_z}. \quad (3.26.7)$$

В соответствии с этим равенством амплитуда колебаний свободной поверхности в k -м топливном баке будет определяться величиной

$$\frac{a_{ky} |J_z c_{y\delta} + mx_k^* c_{\vartheta\delta}| \delta_0}{\omega_k \mu_k m J_z \sqrt{4(\omega - \omega_k^*)^2 + \epsilon_k^2}}, \quad (3.26.8)$$

где ω — частота колебаний исполнительных органов системы управления; δ_0 — амплитуда этих колебаний.

Полагая в этом выражении $\omega = \omega_k^{(0)}$, где $\omega_k^{(0)}$ — частота исследуемых автоколебаний, и приравнивая полученный результат значению амплитуды автоколебаний свободной поверхности жидкости в k -м топливном

баке $\beta_k^{(0)}$, получим для амплитуды автоколебаний исполнительных органов управления формулу

$$\delta_0 = \frac{\omega_k \mu_k m J_z \sqrt{4(\omega_k^{(0)} - \omega_k^*)^2 + \epsilon_k^{(0)2}}}{a_{ky} |J_z c_{y\delta} + mx_k^* c_{\vartheta\delta}|} \beta_k^{(0)}, \quad (3.26.9)$$

где $\epsilon_k^{(0)}$ – значение коэффициента демпфирования ϵ_k , соответствующее рассматриваемому автоколебательному режиму колебаний.

Точка годографа разомкнутой системы, соответствующая частоте автоколебаний $\omega_k^{(0)}$, имеет координаты $X = 1$, $Y = 0$. В соответствии с формулой (3.25.11) и второй формулой (3.25.21) должно иметь место равенство

$$2(\omega_k^{(0)} - \omega_k^*) \sin \varphi_a(\omega_k) + \epsilon_k^{(0)} \cos \varphi_a(\omega_k) = 0. \quad (3.26.10)$$

Согласно (3.26.10) формулу (3.26.9) можно преобразовать так:

$$\delta_0 = \frac{\omega_k \mu_k m J_z \epsilon_k^{(0)}}{a_{ky} |J_z c_{y\delta} + mx_k^* c_{\vartheta\delta}| |\sin \varphi_a(\omega_k)|} \beta_k^{(0)}. \quad (3.26.11)$$

В рассматриваемом случае величина, входящая в правую часть равенства (3.26.4), положительна и формуле (3.26.4) можно придать вид

$$\epsilon_k^{(0)} = \frac{k_a(\omega_k) |\sin \varphi_a(\omega_k)| |x_k^*| |J_z c_{y\delta} + mx_k^* c_{\vartheta\delta}| a_{ky}^2}{\omega_k \mu_k m J_z^2}. \quad (3.26.12)$$

Подставляя (3.26.12) в (3.26.11), получим формулу для определения амплитуды автоколебаний исполнительных органов системы управления

$$\delta_0 = \frac{k_a(\omega_k) |x_k^*| a_{ky}}{J_z} \beta_k^{(0)}. \quad (3.26.13)$$

В автоколебательном режиме амплитуда колебаний входного сигнала автомата стабилизации ϑ_0 будет связана с амплитудой колебаний исполнительных органов системы управления δ_0 соотношением

$$\delta_0 = k_a(\omega_k^{(0)}) \vartheta_0. \quad (3.26.14)$$

Учитывая близость частоты автоколебаний $\omega_k^{(0)}$ к частоте ω_k , можно заменить равенство (3.26.14) приближенным

$$\delta_0 = k_a(\omega_k) \vartheta_0. \quad (3.26.15)$$

Согласно (3.26.13) и (3.26.15) амплитуду автоколебаний входного сигнала автомата стабилизации можно определить по формуле

$$\vartheta_0 = \frac{|x_k^*| \alpha_{k_y}}{J_z} \beta_k^{(0)}. \quad (3.26.16)$$

С помощью формул (3.26.4) и (3.26.16) можно определить амплитуду автоколебаний свободной поверхности жидкости в k -м топливном баке $\beta_k^{(0)}$ и амплитуду автоколебаний входного сигнала автомата стабилизации ϑ_0 , располагая экспериментальными данными о зависимости коэффициента демпфирования от амплитуды колебаний свободной поверхности в k -м баке.

Большие амплитуды автоколебаний свободных поверхностей жидкостей в топливных баках недопустимы, так как они вызывают быстрое падение давления наддува¹. Большие амплитуды автоколебаний входного сигнала автомата стабилизации также являются недопустимыми, так как из-за них помехи на входе автомата стабилизации могут превысить допустимый уровень. Снижение амплитуд автоколебаний до допустимого уровня достигается подбором достаточно эффективных внутрибаковых устройств, повышающих коэффициенты демпфирования, в частности, путем установки в топливном баке продольных перфорированных ребер. Поперечное сечение бака, снабженного такими продольными демпфирующими ребрами, показано на рис. 3.12. Число демпфирующих ребер и их профиль подбирают таким образом, чтобы потребный коэффициент демпфирования достигался в данном баке при допустимой амплитуде колебаний свободной поверхности жидкости.

При наличии продольных ребер, показанных на рис. 3.12, смачиваемая поверхность бака перестает быть поверхностью вращения. В этом случае момент инерции жидкости, находящейся в топливном баке, относительно его оси отличен от нуля, так как в этом случае в процессе вращения бака вокруг его продольной оси жидкость вовлекается во вращение захватывающими ее ребрами. Кроме того, при наличии ребер колебания бака вокруг его продольной оси вызывают колебания свободной поверхности находящейся в нем жидкости, которые не учитывались нами при рассмотрении устойчивости движения ракеты в плоскости крена. Расчет указанных выше эффектов связан с большими вычислительными трудностями, поэтому обычно применяются экспериментальные методы [18].

Как отмечалось выше, коэффициент усиления автомата стабилизации

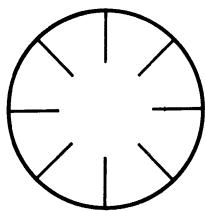


Рис. 3.12.

¹ Влияние колебаний свободной поверхности жидкости в топливном баке на давление наддува подробно рассматривается в курсе проектирования ракет.

$k_a(\omega_k)$ и фазовый сдвиг $\varphi_a(\omega_k)$ зависят от амплитуды колебаний входного сигнала ϑ_0 . При расчете амплитуд автоколебаний эту зависимость учитывают следующим образом. В первом приближении при определении потребного коэффициента демпфирования $\epsilon_k^{(0)}$ в формуле (3.26.4) подставляют предельные значения, к которым стремятся величины $k_a(\omega_k)$ и $\varphi_a(\omega_k)$ при $\vartheta_0 \rightarrow 0$. Отыскав далее амплитуду колебаний свободной поверхности жидкости $\beta_k^{(0)}$, по формуле (3.26.16) определяют первое приближение для амплитуды колебаний входного сигнала автомата стабилизации ϑ_0 . В следующем приближении для определения потребного коэффициента демпфирования $\epsilon_k^{(0)}$ в формуле (3.26.4) подставляют значения коэффициента усиления $k_a(\omega_k)$ и фазового сдвига $\varphi_a(\omega_k)$, соответствующие первому приближению для амплитуды колебаний входного сигнала автомата стабилизации ϑ_0 , далее рассчитывают второе приближение для амплитуды колебаний свободной поверхности жидкости $\beta_k^{(0)}$ и для амплитуды колебаний входного сигнала автомата стабилизации ϑ_0 и т.д. Этот процесс последовательных приближений обычно хорошо сходится и быстро приводит к цели.

Методы исследования, изложенные в этой главе, применяются для предварительного выбора частотных характеристик автоматов стабилизации и для разработки внутрибаковых устройств, необходимых для стабилизации колебаний жидких компонентов топлива. Дальнейшую проверку устойчивости движения и окончательный выбор частотных характеристик автоматов стабилизации осуществляют обычно методом электромоделирования с реальной аппаратурой системы управления.

ГЛАВА 4. СТАБИЛИЗАЦИЯ ДВИЖЕНИЯ РАКЕТЫ С УЧЕТОМ УПРУГОСТИ ЕЕ КОРПУСА

§ 4.1. ПРОСТЕЙШАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЯХ КОРПУСА РАКЕТЫ

При исследовании упругих колебаний ракеты, возникающих в процессе ее полета, мы ограничимся рассмотрением изгибных колебаний корпуса ракеты в плоскости тангажа, так как все расчетные схемы для плоскости рыскания практически ничем не отличаются от соответствующих расчетных схем для плоскости тангажа. Заменяя уравнение изгиба уравнением кручения, можно получить расчетные схемы стабилизации крутильных колебаний ракеты.

Расчет деформаций различных элементов конструкции ракеты, возникающих под действием заданных нагрузок, представляет собой весьма сложную задачу строительной механики, и в связи с этим при составлении уравнений движения ракеты, учитывающих упругость ее конструкции, реальную конструкцию ракеты заменяют некоторой упрощенной схемой — ее механической моделью.

При выводе уравнений движения ракеты в плоскости тангажа, учитывающих упругость ее конструкции, будем исходить из следующих допущений.

1. Будем предполагать, что корпус ракеты деформируется, как упругий стержень, и при расчете его изгибных деформаций будем исходить из соответствующих уравнений сопротивления материалов.

2. Будем пренебречь взаимным влиянием деформаций сжатия (растяжения), сдвига, изгиба и кручения и в соответствии с этим при рассмотрении изгибных колебаний ракеты будем пользоваться уравнениями чистого изгиба.

3. Будем предполагать, что частицы ракеты, лежащие в начальный момент времени в каком-либо ее плоском поперечном сечении, в процессе движения ракеты не меняют своего взаимного расположения. Применительно к корпусу ракеты это предположение совпадает с гипотезой плоских сечений, часто используемой в курсе сопротивления материалов. Для жидкых компонентов топлива данное предположение означает, что на свободных поверхностях жидкостей нет волнобразования. Это предположение исключает также возможность учета реальных деформаций элементов конструкции, крепящихся к несущему корпусу, и деформации узлов крепления.

4. Будем предполагать, что крайние поперечные сечения ракеты свободны от нагрузок. В соответствии с этим при рассмотрении изгиба ракеты будем считать, что перерезывающая сила и изгибающий момент в концах ракеты обращаются в нуль.

В предыдущих главах мы предполагали, что оси связанный системы координат $OXYZ$ совпадают с главными центральными осями инерции в том случае, когда свободные поверхности жидкости плоские и нормальны к продольной оси ракеты. В дальнейшем, учитывая при выводе уравнений движения ракеты упругость ее конструкции, мы по-прежнему будем предполагать, что оси подвижной системы координат $OXYZ$ всегда совпадают с главными центральными осями инерции ракеты.

Изгиб корпуса ракеты в плоскости тангажа оказывает влияние на аэродинамические и реактивные силы, действующие на ракету. В каждом поперечном сечении корпуса ракеты будем рассматривать так называемый местный угол атаки, складывающийся из угла α , образуемого положительным направлением оси OX и направлением вектора скорости центра масс ракеты, и угла поворота данного сечения, возникающего в процессе изгиба корпуса. Поперечную распределенную аэродинамическую нагрузку будем считать пропорциональной этому местному углу атаки¹. Влияние изгиба корпуса на вектор суммарной тяги двигателей P заключается в повороте этого вектора, вследствие чего в подвижной системе координат $OXYZ$ у вектора P возникает поперечная составляющая. Эту поперечную силу мы будем рассматривать как сосредоточенную силу, приложенную к корпусу ракеты в месте крепления к нему двигательной установки. Кроме того, изгиб корпуса ракеты вызывает смещение линии действия продольной составляющей вектора P , вследствие которого возникает дополнительный момент реактивных сил относительно оси OZ . Влиянием изгиба корпуса ракеты на управляющие силы будем пренебрегать.

В следующем параграфе на основе сформулированных выше исходных предпосылок выводится дифференциальное уравнение изгибных колебаний корпуса ракеты в плоскости тангажа, с помощью которого в дальнейшем исследуют устойчивость движения ракеты в этой плоскости.

§ 4.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ

В соответствии с предложениями, сформулированными в предыдущем параграфе, дифференциальное уравнение изгибных колебаний корпуса ракеты в плоскости тангажа можно получить, построив уравнение колебаний упругого полого стержня, претерпевающего в процессе колебаний чистый изгиб в плоскости $z = 0$. Исходя из принципа Даламбера уравнение колебаний упругого стержня можно вывести из уравнений его упругого равновесия, добавив к внешним силам, действующим на стержень, силы инерции. В случае чистого изгиба в плоскости $z = 0$ уравнения равновесия упругого стержня имеют вид [29]

$$\frac{dQ}{dx} = q_y; \quad \frac{dM}{dx} = Q - m_z; \quad B_y \frac{d^2 v}{dx^2} = M, \quad (4.2.1)$$

¹Такого рода учет влияния изгиба корпуса ракеты на аэродинамические силы является приближенным, однако им пользуются в динамических расчетах, так как колебания аэродинамических сил, вызываемые изгибами колебаниями корпуса, оказывают незначительное воздействие на движение ракеты.

где q_y – поперечная распределенная сила, действующая на стержень; Q – перерезывающая сила, возникающая в упругом стержне; m_z – распределенный момент внешних сил, действующих на стержень; B_y – изгибная жесткость; v – прогиб стержня; M – изгибающий момент.

Чтобы из уравнений равновесия (4.2.1) получить уравнения изгибных колебаний стержня, надо добавить к поперечной распределенной силе q_y поперечную силу q_{yu} , создаваемую силами инерции, а к распределенному моменту m_z – распределенный момент сил инерции m_{zu} . Кроме того, в уравнениях (4.2.1) символы обыкновенного дифференцирования следует заменить символами частного дифференцирования, так как в процессе колебаний неизвестные функции v , M и Q будут зависеть от двух независимых переменных – координаты сечения x и времени t . В результате получим систему уравнений

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = q_y + q_{yu}; \quad \frac{\partial M}{\partial x} = Q - m_z - m_{zu}; \quad B_y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = M. \quad (4.2.2)$$

Чтобы определить распределенную силу q_{yu} и распределенный момент m_{zu} , рассчитываем силы инерции, возникающие в процессе движения ракеты в стартовой системе координат $O_0X_cY_cZ_c$. В качестве координатных осей OX , OY , OZ в § 4.1 были выбраны оси, совмещенные с главными центральными осями инерции ракеты. В этом случае относительное движение частиц ракеты в подвижной системе координат $OXYZ$ может возникать только в результате деформаций ракеты, так как поступательное ее перемещение в системе координат $OXYZ$ меняет положение центра масс ракеты в этой координатной системе, а поворот ракеты относительно подвижных координатных осей нарушает равенство нулю центробежных моментов инерции J_{xy} , J_{xz} , J_{yz} . В связи с предполагаемой малостью упругих колебаний относительные скорости частиц ракеты $v_{\text{отн}}$ можно считать малыми. Считают, что ракета вращается медленно и, таким образом, при определении абсолютных ускорений частиц ракеты w можно пренебречь переносным $\omega \times (\omega \times r)$ и кориолисовым $2\omega \times v_{\text{отн}}$ ускорениями (ω – угловая скорость подвижной системы координат $OXYZ$, r – радиус-вектор частицы в этой системе координат). Для абсолютных ускорений частиц ракеты w получим приближенную формулу

$$w = w_0 + \frac{d\omega}{dt} \times r + w_{\text{отн}}, \quad (4.2.3)$$

где w_0 – абсолютное ускорение начала подвижной системы координат $OXYZ$; $w_{\text{отн}}$ – относительные ускорения частиц ракеты.

Согласно (4.2.3) в случае плоского движения ракеты, т.е. при $\omega_x \equiv \omega_y \equiv \omega_{oz} \equiv 0$, будут иметь место равенства

$$w_x = w_{0x} - y \frac{d\omega_z}{dt} + w_{\text{отн}x};$$

$$w_y = w_{0y} + x \frac{d\omega_z}{dt} + w_{\text{отн}}. \quad (4.2.4)$$

Определим теперь относительные ускорения $w_{\text{отн}}x$ и $w_{\text{отн}}y$, возникающие в процессе изгиба колебаний ракеты в плоскости тангенса. Рассмотрим относительное движение частиц ракеты, лежащих в плоском поперечном сечении, имеющем координату x при недеформированном состоянии корпуса. В соответствии с предположениями, сделанными в § 4.1, в процессе изгиба колебаний эти частицы не будут менять своего взаимного расположения, и, таким образом, частица, имеющая координаты x, y при недеформированном состоянии корпуса ракеты, в процессе изгиба будет принимать положения, определяемые координатами x', y' , где в соответствии с рис. 4.1

$$x' = x + u - y \sin \varphi; \quad y' = y + v - y(1 - \cos \varphi), \quad (4.2.5)$$

где u, v — поступательные перемещения сечения в направлении осей OX и OY ; φ — угол поворота сечения вокруг его оси, параллельной оси OZ .

Угол φ будет связан с прогибом корпуса v соотношением

$$\operatorname{tg} \varphi = \partial v / \partial x. \quad (4.2.6)$$

В соответствии с предположением о малости упругих колебаний ракеты, пренебрегая величинами высших порядков малости, можно положить

$$\sin \varphi = \partial v / \partial x; \quad \cos \varphi = 1. \quad (4.2.7)$$

Согласно (4.2.7) соотношения (4.2.5) можно заменить приближенными соотношениями

$$x' = x + u - y \partial v / \partial x; \quad y' = y + v. \quad (4.2.8)$$

Пользуясь формулами (4.2.8), найдем

$$\begin{aligned} w_{\text{отн}}x &= \frac{\partial^2 x'}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - y \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2}; \\ w_{\text{отн}}y &= \frac{\partial^2 y'}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

Подставляя (4.2.9) в (4.2.4), получим формулы для абсолютных ускорений w_x, w_y :

$$\begin{aligned} w_x &= w_{0x} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - y \left(\frac{d\omega_z}{dt} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2} \right); \\ w_y &= w_{0y} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + x \frac{d\omega_z}{dt}. \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

Построим теперь два плоских поперечных сечения ракеты S и S' , имеющие при недеформированном состоянии корпуса координаты x и $x + dx$ (рис. 4.2). На элементарный цилиндр (на рисунке заштрихован)

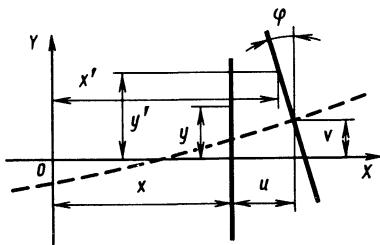


Рис. 4.1.

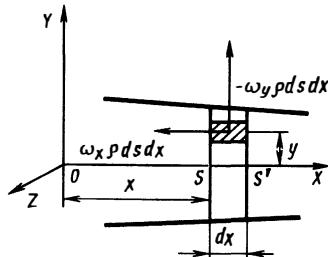


Рис. 4.2.

с площадью основания ds и высотой dx будет действовать сила инерции, проекция которой на ось OX равна $w_x \rho ds dx$, а на ось OY — $w_y \rho ds dx$ (ρ — плотность рассматриваемого элементарного цилиндра). Таким образом, поперечная нагрузка $q_{yu} dx$ и момент $m_{zu} dx$, создаваемые силами инерции, которые действуют на частицы ракеты, заключенные между сечением S и S' , будут определяться соотношениями

$$q_{yu} dx = - \int_S w_y \rho ds dx; \quad m_{zu} dx = \int_S w_x y \rho ds dx. \quad (4.2.11)$$

Согласно (4.2.11) распределенная сила q_{yu} и распределенный момент m_{zu} могут быть найдены по формулам

$$q_{yu} = - \int_S w_y \rho ds; \quad m_{zu} = \int_S w_x y \rho ds. \quad (4.2.12)$$

Подставляя (4.2.10) в (4.2.12), получим соотношения

$$\begin{aligned} q_{yu} &= - \left(w_{0y} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + x \frac{d\omega_z}{dt} \right) \int_S \rho ds; \\ m_{zu} &= \left(w_{0x} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \int_S y \rho ds - \left(\frac{d\omega_z}{dt} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2} \right) \int_S y^2 \rho ds. \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

Мы предполагаем везде, что плоскости $y = 0$ и $z = 0$ являются плоскостями симметрии ракеты. Таким образом, должно иметь место равенство

$$\int_S y \rho ds = 0, \quad (4.2.14)$$

в соответствии с которым формулам (4.2.13) можно придать вид

$$\begin{aligned} q_{yu} &= -\mu \left(w_{0y} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + x \frac{d\omega_z}{dt} \right); \\ m_{zu} &= -j_z \left(\frac{d\omega_z}{dt} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2} \right), \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

$$\text{где } \mu = \int_S \rho ds; \quad j_z = \int_S y^2 \rho ds. \quad (4.2.16)$$

Подставляя (4.2.15) в (4.2.2), получим уравнения:

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial x} &= q_y - \mu (w_{0y} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + x \frac{d\omega_z}{dt}); \\ \frac{\partial M}{\partial x} &= Q - m_z + j_z (\frac{d\omega_z}{dt} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2}); \\ B_y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= M.\end{aligned}\quad (4.2.17)$$

Пользуясь вторым и третьим уравнениями (4.2.17), найдем:

$$Q = \frac{\partial}{\partial x} (B_y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}) + m_z - j_z (\frac{d\omega_z}{dt} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2}). \quad (4.2.18)$$

Подставляя (4.2.18) в первое уравнение системы (4.2.17), получим дифференциальное уравнение в частных производных для функции $v(x, t)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2} (B_y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}) - \frac{\partial}{\partial x} (j_z \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t^2}) + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \\ = q_y - \frac{\partial m_z}{\partial x} - \mu w_{0y} - (\mu_x - \frac{d j_z}{dx}) \frac{d \omega_z}{dt}.\end{aligned}\quad (4.2.19)$$

В соответствии с предположениями, сформулированными в § 4.1, должны иметь место равенства

$$M = Q = 0 \text{ при } x = a \text{ и } x = b, \quad (4.2.20)$$

где a и b – абсциссы крайних поперечных сечений ракеты. Согласно (4.2.17), (4.2.18) решение дифференциального уравнения (4.2.19) $v(x, t)$ должно удовлетворять краевым условиям

$$\begin{aligned}B_y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= 0; \quad \frac{\partial}{\partial x} (B_y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}) - j_z \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2} = \\ = -m_z + j_z \frac{d\omega_z}{dt}\end{aligned}\quad (4.2.21)$$

при $x = a$ и при $x = b$.

Таким образом, при заданных нагрузках q_y и m_z при заданном движении подвижной системы координат $OXYZ$ определение прогиба корпуса $v(x, t)$ сводится к решению дифференциального уравнения изгибных колебаний (4.2.19) с краевыми условиями (4.2.21).

§ 4.3. УРАВНЕНИЕ СИЛ И УРАВНЕНИЕ МОМЕНТОВ

Уравнения движения, совершающегося подвижной системой координат $OXYZ$ в начальной стартовой координатной системе $O_0X_cY_cZ_c$, можно

построить, воспользовавшись теоремой об изменении момента количества движения, так как оси координат OX , OY , OZ совмещены с главными центральными осями инерции ракеты. Если к внешним силам, действующим на ракету, присоединить реактивные силы и обозначить главный вектор полученной системы сил через Q и главный момент этих сил относительно начала подвижной системы координат $OXYZ$ через M , будут иметь место равенства

$$mw_{0y} = Q_y; \quad J_z \frac{d\omega_z}{dt} = M_z, \quad (4.3.1)$$

где J_z — момент инерции ракеты относительно оси OZ .

Внешние силы, действующие в плоскости тангажа на участок ракеты, заключенный между ее поперечными сечениями, имеющими абсциссы x и $x + dx$, будут приводиться к силе $q_y dx$ и моменту $m_z dx$. Момент этой системы сил относительно оси OZ будет равен $(q_y x + m_z)dx$. В соответствии с этим проекцию главного вектора внешних сил Q_y и проекцию главного момента M_z можно определить по формулам

$$Q_y = \int_a^b q_y dx; \quad M_z = \int_a^b (q_y x + m_z) dx. \quad (4.3.2)$$

Согласно (4.3.2) уравнениям (4.3.1) можно придать вид

$$mw_{0y} = \int_a^b q_y dx; \quad J_z \frac{d\omega_z}{dt} = \int_a^b (q_y x + m_z) dx. \quad (4.3.3)$$

Уравнения сил и моментов (4.3.3) совместно с дифференциальным уравнением изгибных колебаний (4.2.19) и краевыми условиями (4.2.21) определяют движение подвижной системы координат в плоскости тангажа и изгибные колебания корпуса, возникающие в этой плоскости в процессе движения ракеты.

Покажем теперь, что функция $v(x, t)$, найденная из дифференциального уравнения (4.2.19) с краевыми условиями (4.2.21), всегда будет удовлетворять интегральным условиям

$$\int_a^b v \mu dx = 0; \quad \int_a^b (x v \mu + \frac{\partial v}{\partial x} j_z) dx = 0 \quad (4.3.4)$$

в соответствии с уравнениями (4.3.3), определяющими ускорения w_{0y} и $d\omega_z/dt$. Интегральные соотношения (4.3.4) играют важную роль при исследовании изгибных колебаний корпуса ракеты.

Интегрируя обе части равенства (4.2.19) по переменной x в пределах от a до b , получим соотношение:

$$[\frac{\partial}{\partial x} (B_y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}) - j_z \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2}] \Big|_{x=a}^{x=b} + \int_a^b \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \mu dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b q_y dx - w_{0y} \int_a^b \mu dx + (-m_z + j_z \frac{d\omega_z}{dt}) \Big|_x=a^x=b - \\
&- \frac{d\omega_z}{dt} \int_a^b x \mu dx,
\end{aligned}$$

или согласно (4.2.21)

$$\int_a^b \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \mu dx = \int_a^b q_y dx - w_{0y} \int_a^b \mu dx - \frac{d\omega_z}{dt} \int_a^b x \mu dx. \quad (4.3.5)$$

Умножив обе части уравнения (4.2.19) на x и проинтегрировав по x в пределах от a до b , получим равенство:

$$\begin{aligned}
&\int_a^b x \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} (B_y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}) - j_z \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2} \right] dx + \int_a^b x \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \mu dx = \\
&= \int_a^b x q_y dx - w_{0y} \int_a^b x \mu dx - \frac{d\omega_z}{dt} \int_a^b x^2 \mu dx - \\
&- \int_a^b x \frac{\partial}{\partial x} (m_z - j_z \frac{d\omega_z}{dt}) dx.
\end{aligned}$$

Проинтегрировав это соотношение по частям, можно преобразовать его следующим образом:

$$\begin{aligned}
&-\int_a^b \left[\frac{\partial}{\partial x} (B_y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}) - j_z \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2} \right] dx + \left\{ x \left[\frac{\partial}{\partial x} (B_y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}) \right] - \right. \\
&\left. - j_z \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2} \right\}_{x=a}^{x=b} + \int_a^b x \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \mu dx = \int_a^b x q_y dx - w_{0y} \int_a^b x \mu dx - \\
&- \frac{d\omega_z}{dt} \int_a^b x^2 \mu dx + \int_a^b (m_z - j_z \frac{d\omega_z}{dt}) dx + [x(-m_z + \\
&+ j_z \frac{d\omega_z}{dt})]_{x=a}^{x=b},
\end{aligned}$$

или согласно (4.2.21)

$$-\int_a^b \left[\frac{\partial}{\partial x} (B_y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}) - j_z \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2} \right] dx + \int_a^b x \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \mu dx =$$

$$\begin{aligned}
& \int_a^b x q_y dx - w_{0y} \int_a^b x \mu dx - \frac{d \omega_z}{dt} \int_a^b x^2 \mu dx + \\
& + \int_a^b \left(m_z - j_z \frac{d \omega_z}{dt} \right) dx. \tag{4.3.6}
\end{aligned}$$

В соответствии с первым из краевых условий (4.2.21) должно иметь место равенство

$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial x} \left(B_y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) dx = \left(B_y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=a}^{x=b} = 0, \tag{4.3.7}$$

и, таким образом, соотношению (4.3.6) можно придать вид

$$\begin{aligned}
& \int_a^b \left(x \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \mu + j_z \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2} \right) dx = \int_a^b (x q_y + m_z) dx - w_{0y} \int_a^b x \mu dx - \\
& - \frac{d \omega_z}{dt} \int_a^b (x^2 \mu + j_z) dx. \tag{4.3.8}
\end{aligned}$$

Пользуясь уравнениями (4.3.3), можно преобразовать равенства (4.3.5) и (4.3.8):

$$\begin{aligned}
& \int_a^b \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \mu dx = w_{0y} (m - \int_a^b \mu dx) - \frac{d \omega_z}{dt} \int_a^b x \mu dx; \\
& \int_a^b \left(x \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \mu + j_z \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2} \right) dx = -w_{0y} \int_a^b x \mu dx + \\
& + \frac{d \omega_z}{dt} [J_z - \int_a^b (x^2 \mu + j_z) dx]. \tag{4.3.9}
\end{aligned}$$

Полная масса ракеты m , координата ее центра масс x_C и момент инерции J_z могут быть выражены интегралами

$$m = \int_V \rho d\tau; \quad x_C = \frac{1}{m} \int_V x \rho d\tau; \quad J_z = \int_V (x^2 + y^2) \rho d\tau, \tag{4.3.10}$$

где V – область, занимаемая ракетой при недеформированном состоянии ее корпуса (деформации корпуса не влияют на координату центра масс x_C вследствие сделанного нами выбора подвижной системы координат $OXYZ$; влиянием деформаций корпуса на момент инерции J_z мы будем везде пренебрегать). Интегрирование какой-либо функции по области V

можно осуществить, проинтегрировав сперва эту функцию по поперечному сечению области S и выполнив затем интегрирование полученного результата по переменной x в пределах от a до b . Таким образом, формулам (4.3.10) можно придать вид

$$m = \int_a^b \int_S \rho ds dx;$$

$$x_C = \frac{1}{m} \int_a^b x \int_S \rho ds dx; \quad J_z = \int_a^b (x^2 \int_S \rho ds + \int_S y^2 \rho ds) dx,$$

или согласно (4.2.16)

$$m = \int_a^b \mu dx; \quad x_C = \frac{1}{m} \int_a^b x \mu dx; \quad J_z = \int_a^b (x^2 \mu + j_z) dx. \quad (4.3.11)$$

В соответствии с равенствами (4.3.11) соотношения (4.3.9) могут быть приведены к виду

$$\int_a^b \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \mu dx = 0; \quad \int_a^b (x \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \mu + j_z \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2}) dx = 0 \quad (4.3.12)$$

($x_C = 0$, так как начало системы координат $OXYZ$ совмещено с центром масс ракеты). Согласно (4.3.12) должны иметь место равенства

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\int_a^b v \mu dx \right) = 0; \quad \frac{d^2}{dt^2} \left[\int_a^b (x v \mu + j_z \frac{\partial v}{\partial x}) dx \right] = 0 \quad (4.3.13)$$

(при дифференцировании по времени в левых частях соотношений (4.3.13) медленным изменением функций μ и j_z , возникающим в процессе полета ракеты, можно пренебречь).

Предположим, что перед начальным моментом времени полета ракеты $t = t_0$ прогибы ее корпуса $v(x, t)$ отсутствуют. В этом случае будут иметь место соотношения

$$\begin{aligned} \int_a^b v \mu dx &= 0; \quad \int_a^b (x v \mu + j_z \frac{\partial v}{\partial x}) dx = 0; \\ \frac{d}{dt} \left(\int_a^b v \mu dx \right) &= 0; \\ \frac{d}{dt} \left[\int_a^b (x v \mu + j_z \frac{\partial v}{\partial x}) dx \right] &= 0. \end{aligned} \quad (4.3.14)$$

Дважды интегрируя левые и правые части равенств (4.3.13) по времени t в пределах от t_0 до t , согласно (4.3.14) получим интегральные соотношения (4.3.4).

§ 4.4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ РАКЕТЫ В ПЛОСКОСТИ ТАНГАЖА, УЧИТЫВАЮЩИЕ УПРУГОСТЬ КОРПУСА РАКЕТЫ

Построим теперь развернутые выражения для распределенной поперечной силы q_y и распределенного момента m_z , которые входят в уравнения сил и моментов (4.3.3) и в уравнения изгибных колебаний (4.2.19). Последовательно рассмотрим распределенные силы и моменты, порождаемые силой тяжести, аэродинамическими силами, реактивными силами и управляющими силами и моментами.

1. *Сила тяжести.* В соответствии с первой формулой (4.2.16) функция $\mu(x)$ представляет собой массу ракеты, приходящуюся на единицу ее длины в поперечном сечении S , имеющем абсциссу x . В связи с этим функцию $\mu(x)$ принято называть распределенной массой ракеты. Вектор распределенной силы q , вызываемой силой тяжести, будет равен μg , где g – вектор ускорения свободного падения. Проецируя вектор q на ось OY , получим зависимость

$$q_y = \mu g_y. \quad (4.4.1)$$

Центр масс любого поперечного сечения ракеты будет лежать на ее продольной оси, так как предполагается, что ракета симметрична относительно плоскостей $y = 0$ и $z = 0$. Таким образом, сила тяжести не вызывает распределенных моментов и в данном случае будет иметь место равенство

$$m_z = 0. \quad (4.4.2)$$

2. *Аэrodинамические силы.* В данном случае поперечную распределенную силу будем считать пропорциональной местному углу атаки в соответствии с исходными предпосылками, сформулированными в § 4.1. Обозначая коэффициент пропорциональности через $c(x, t)$, получим равенство

$$q_y = c\alpha^*, \quad (4.4.3)$$

где α^* – местный угол атаки.

Как видно из рис. 4.1, угол φ , на который поворачивается поперечное сечение ракеты в процессе изгиба, при малых изгибных колебаниях можно считать равным производной $\partial v / \partial x$. В этом случае местный угол атаки α^* будет определяться равенством

$$\alpha^* = \alpha + \partial v / \partial x, \quad (4.4.4)$$

где α – угол атаки, соответствующий недеформированному состоянию корпуса ракеты, т.е. угол между направлением вектора скорости центра

масс ракеты и положительным направлением оси OX . Подставляя (4.4.4) в (4.4.3), получим соотношение

$$q_y = c(\alpha + \partial v / \partial x). \quad (4.4.5)$$

В рассматриваемом случае можно положить

$$m_z = 0, \quad (4.4.6)$$

так как при исследовании устойчивости движения распределенными аэrodинамическими моментами практически можно пренебречь.

3. Реактивные силы. Распределенную поперечную силу q_y , соответствующую действию на упругий стержень сосредоточенной силы Q_y , приложенной в сечении стержня с абсциссой $x = \xi$, в сопротивлении материалов рассматривают как предел, к которому стремится распределенная поперечная сила $q_y^*(x)$ при $\epsilon \rightarrow 0$:

$$q_y^*(x) = \frac{Q_y}{\epsilon} \quad \text{при } \xi - \frac{\epsilon}{2} < x < \xi + \frac{\epsilon}{2}; \quad (4.4.7)$$

$$q_y^*(x) = 0 \quad \text{при } a < x < \xi - \frac{\epsilon}{2} \text{ и при } \xi + \frac{\epsilon}{2} < x < b.$$

График функции $q_y^*(x)$ показан на рис. 4.3. Формулам (4.4.7) можно придать вид

$$q_y^*(x) = Q_y f(x, \xi), \quad (4.4.8)$$

где $f(x, \xi)$ – функция, определяемая в интервале $a < x < b$ соотношениями

$$f(x, \xi) = \frac{1}{\epsilon} \quad \text{при } \xi - \frac{\epsilon}{2} < x < \xi + \frac{\epsilon}{2}; \quad (4.4.9)$$

$$f(x, \xi) = 0 \quad \text{при } a < x < \xi - \frac{\epsilon}{2} \text{ и при } \xi + \frac{\epsilon}{2} < x < b.$$

Предел, к которому стремится функция $f(x, \xi)$ при $\epsilon \rightarrow 0$, называют дельта-функцией и обозначают через $\delta(x, \xi)$. Таким образом, согласно

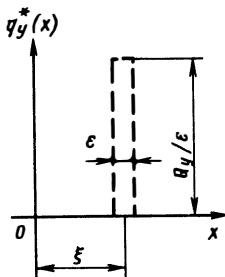


Рис. 4.3.

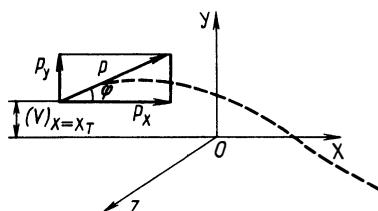


Рис. 4.4.

(4.4.8) в рассматриваемом случае поперечная распределенная сила $q_y(x)$ может быть выражена соотношением

$$q_y(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} q_y^*(x) = Q_y \delta(x, \xi). \quad (4.4.10)$$

В соответствии с формулами (4.4.9) при любом сколь угодно малом ϵ соблюдается равенство

$$\int_a^b f(x, \xi) dx = \frac{1}{\epsilon} \int_{\xi - \frac{\epsilon}{2}}^{\xi + \frac{\epsilon}{2}} dx = 1. \quad (4.4.11)$$

Согласно (4.4.9) и (4.4.11) дельта-функция $\delta(x, \xi)$ обладает свойствами

$$\delta(x, \xi) = 0 \text{ при } x \neq \xi; \quad \int_a^b \delta(x, \xi) dx = 1. \quad (4.4.12)$$

В случае действия на упругий стержень сосредоточенного момента M_z , приложенного в сечении стержня с абсциссой $x = \xi$, соответствующий распределенный момент $m_z(x)$ может быть выражен равенством

$$m_z(x) = M_z \delta(x, \xi), \quad (4.4.13)$$

аналогичным равенству (4.4.10).

Обозначим теперь через x_T абсциссу сечения ракеты, в котором к несущему корпусу крепится двигательная установка. Линия действия суммарной тяги P показана на рис. 4.4. Проекции вектора P на координатные оси OX и OY будут определяться равенствами

$$P_x = P \cos \varphi; \quad P_y = P \sin \varphi, \quad (4.4.14)$$

где φ — угол между направлением вектора P и положительным направлением оси OX . В соответствии с приближенными равенствами (4.2.7) формулам (4.4.14) можно придать вид

$$P_x = P; \quad P_y = P \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{x=x_T}. \quad (4.4.15)$$

Как видно из рис. 4.4, реактивные силы, действующие на корпус ракеты в сечении, имеющем абсциссу $x = x_T$, приводят к поперечной сосредоточенной силе Q_y и к сосредоточенному моменту M_z , которые согласно (4.4.15) могут быть найдены по формулам

$$Q_y = P_y = P \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{x=x_T}; \quad M_z = -P_x(v)_{x=x_T} = -P(v)_{x=x_T}. \quad (4.4.16)$$

В соответствии с равенствами (4.4.10) и (4.4.13) для распределенной поперечной силы q_y и распределенного момента m_z в рассматриваемом случае будут иметь место соотношения

$$\begin{aligned} q_y &= P \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{x=x_T} \delta(x, x_T); \\ m_z &= -P(v)_{x=x_T} \delta(x, x_T). \end{aligned} \quad (4.4.17)$$

При этом необходимо сделать следующее замечание. В процессе вывода формул (4.4.17) в качестве точки приведения реактивных сил была использована точка $x = x_T$ недеформированной оси ракеты в соответствии с тем смыслом, который обычно дается распределенным силе q_y и моменту m_z в исходных уравнениях равновесия (4.2.1). Учет влияния, которое оказывает на изгибные колебания корпуса ракеты изменение линии действия суммарной тяги P , посредством формул (4.4.17) является весьма приближенным. Однако в задаче об устойчивости изгибных колебаний данный эффект не существенен. В связи с этим приближенный учет его посредством формул (4.4.17) практически является вполне достаточным.

4. Управляющие силы и моменты. Обозначим через x_y абсциссу поперечного сечения ракеты, в котором на ее корпус действует управляющая сила или управляющий момент. Если для движения ракеты в плоскости тангажа система управления создает управляющую силу $F_{y\text{упр}}$, соответствующая распределенная поперечная сила q_y согласно (4.4.10) может быть определена выражением

$$q_y = F_{y\text{упр}} \delta(x, x_y). \quad (4.4.18)$$

Если система управления формирует сосредоточенный управляющий момент $M_{z\text{упр}}$ (случай управления рассогласованием тяг), соответствующий распределенный момент m_z согласно (4.4.13) может быть представлен соотношением

$$m_z = M_{z\text{упр}} \delta(x, x_y). \quad (4.4.19)$$

Для того чтобы в дальнейшем не расчленять всякий раз указанные выше два случая управления движением ракеты в плоскости тангажа, будем предполагать, что система управления порождает одновременно распределенную поперечную силу q_y и распределенный момент m_z ,

$$q_y = F_{y\text{упр}} \delta(x, x_y); \quad m_z = M_{z\text{упр}}^{(0)} \delta(x, x_y), \quad (4.4.20)$$

При этом $M_{z\text{упр}}^{(0)} = 0$ в том случае, когда система управления формирует управляющую силу, и $F_{y\text{упр}} = 0$, $M_{z\text{упр}}^{(0)} = M_{z\text{упр}}$, когда исполнительные органы системы управления создают сосредоточенный управляющий момент.

Объединяя распределенные поперечные силы, определяемые формула-

ми (4.4.1), (4.4.17) и (4.4.20), получим выражение для полной поперечной распределенной силы

$$q_y = \mu g_y + c(\alpha + \frac{\partial v}{\partial x}) + P(\frac{\partial v}{\partial x})_{x=x_T} \delta(x, x_T) + \\ + F_{y \text{упр}} \delta(x, x_y). \quad (4.4.21)$$

Согласно (4.4.2), (4.4.6), (4.4.17) и (4.4.20) полный распределенный момент m_z в общем случае может быть выражен соотношением

$$m_z = -P(v)_{x=x_T} \delta(x, x_T) + M_z^{(0)} \delta(x, x_y). \quad (4.4.22)$$

Подставляя (4.4.21) и (4.4.22) в уравнения сил и моментов (4.3.3), получим

$$mw_{0y} = g_y \int_a^b \mu dx + \int_a^b (\alpha + \frac{\partial v}{\partial x}) c dx + \\ + P(\frac{\partial v}{\partial x})_{x=x_T} \int_a^b \delta(x, x_T) dx + F_{y \text{упр}} \int_a^b \delta(x, x_y) dx; \\ J_z \frac{d\omega_z}{dt} = g_y \int_a^b \mu x dx + \int_a^b (\alpha + \frac{\partial v}{\partial x}) cx dx + \\ + P(\frac{\partial v}{\partial x})_{x=x_T} \int_a^b \delta(x, x_T) x dx - P(v)_{x=x_T} \int_a^b \delta(x, x_T) dx + \\ + F_{y \text{упр}} \int_a^b \delta(x, x_y) x dx + M_z^{(0)} \int_a^b \delta(x, x_y) dx,$$

или согласно (4.3.11) и (4.4.12)

$$m(w_{0y} - g_y) = \int_a^b (\alpha + \frac{\partial v}{\partial x}) c dx + P(\frac{\partial v}{\partial x})_{x=x_T} + F_{y \text{упр}}; \\ J_z \frac{d\omega_z}{dt} = \int_a^b (\alpha + \frac{\partial v}{\partial x}) cx dx + P(\frac{\partial v}{\partial x})_{x=x_T} \int_a^b \delta(x, x_T) x dx - \\ - P(v)_{x=x_T} + F_{y \text{упр}} \int_a^b \delta(x, x_y) x dx + M_z^{(0)} \quad (4.4.23)$$

(напомним, что координата центра масс ракеты x_C всегда остается равной нулю).

В соответствии с формулами (4.4.12) для любой функции $f(x)$, заданной в интервале $a \leq x \leq b$, при любом сколь угодно малом положительном ϵ должно соблюдаться равенство

$$\begin{aligned} \int_a^b \delta(x, \xi) f(x) dx &= f(\xi) \int_a^b \delta(x, \xi) dx + \int_a^b \delta(x, \xi) [f(x) - \\ &\quad - f(\xi)] dx = f(\xi) + \int_{\xi - \epsilon}^{\xi + \epsilon} \delta(x, \xi) [f(x) - f(\xi)] dx. \end{aligned} \quad (4.4.24)$$

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = \xi$, при любом сколь угодно малом η можно отыскать достаточно малое ϵ , такое, чтобы имело место неравенство

$$|f(x) - f(\xi)| < \eta \quad \text{при } \xi - \epsilon \leq x \leq \xi + \epsilon. \quad (4.4.25)$$

В этом случае получим оценку

$$|\int_{\xi - \epsilon}^{\xi + \epsilon} \delta(x, \xi) [f(x) - f(\xi)] dx| < \eta \int_{\xi - \epsilon}^{\xi + \epsilon} \delta(x, \xi) dx = \eta. \quad (4.4.26)$$

Неравенство (4.4.26) может иметь место при любом сколь угодно малом η лишь в том случае, если

$$\int_{\xi - \epsilon}^{\xi + \epsilon} \delta(x, \xi) [f(x) - f(\xi)] dx = 0. \quad (4.4.27)$$

Из соотношений (4.4.24) и (4.4.27) вытекает равенство

$$\int_a^b \delta(x, \xi) f(x) dx = f(\xi), \quad (4.4.28)$$

справедливо для любой функции $f(x)$, непрерывной в точке $x = \xi$.

Согласно (4.4.28) уравнениям (4.4.23) можно придать вид

$$\begin{aligned} m(w_{0y} - g_y) &= \int_a^b (\alpha + \frac{\partial v}{\partial x}) c dx + P(\frac{\partial v}{\partial x})_{x=x_T} + F_{y \text{ упр}}; \\ J_z \frac{d\omega_z}{dt} &= \int_a^b (\alpha + \frac{\partial v}{\partial x}) cx dx + P(x \frac{\partial v}{\partial x} - v)_{x=x_T} + \\ &+ x_y F_{y \text{ упр}} + M_{z \text{ упр}}^{(0)}. \end{aligned} \quad (4.4.29)$$

Введя обозначения

$$F_y = \alpha \int_a^b c dx + F_{y \text{ упр}}; \quad M_z = \alpha \int_a^b cx dx + x_y F_{y \text{ упр}} + M_{z \text{ упр}}^{(0)}, \quad (4.4.30)$$

можно привести уравнения (4.4.29) к виду

$$\begin{aligned} m(w_{0y} - g_y) &= F_y + \int_a^b \frac{\partial v}{\partial x} c dx + P\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x=x_T}; \\ J_z \frac{d\omega_z}{dt} &= M_z + \int_a^b \frac{\partial v}{\partial x} c dx + P\left(x \frac{\partial v}{\partial x} - v\right)_{x=x_T}. \end{aligned} \quad (4.4.31)$$

Уравнения (4.4.31) представляют собой уравнения сил и моментов, учитывающие упругость корпуса ракеты. В этих уравнениях согласно (4.4.30) сила F_y представляет собой проекцию на ось OY главного вектора аэродинамических и управляемых сил, действующих на ракету при отсутствии изгибных колебаний ее корпуса, а момент M_z — проекцию на ось OZ главного момента этих сил.

Непосредственная подстановка распределенной силы q_y и распределенного момента m_z , определяемых формулами (4.4.21) и (4.4.22), в уравнение изгибных колебаний (4.2.19) приводит к необходимости дифференцировать дельта-функцию. Чтобы избежать этой операции, заменим уравнение (4.2.19) системой двух дифференциальных уравнений в частных производных для прогиба $v(x, t)$ и перерезывающей силы $Q(x, t)$, которая определяется формулой (4.2.18):

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial Q}{\partial x} &= q_y - \mu w_{0y} - \mu x \frac{d\omega_z}{dt}; \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(B_y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - j_z \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2} - Q &= -m_z + j_z \frac{d\omega_z}{dt}. \end{aligned} \quad (4.4.32)$$

В соответствии с формулой (4.2.18) краевые условия (4.2.21) приведем к виду

$$B_y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad Q = 0 \quad \text{при } x = a \quad \text{и при } x = b. \quad (4.4.33)$$

Подставляя q_y и m_z из (4.4.21) и (4.4.22) в (4.4.32), получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial Q}{\partial x} &= -\mu (w_{0y} - g_y) - \mu x \frac{d\omega_z}{dt} + c\left(\alpha + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \\ &+ P\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x=x_T} \delta(x, x_T) + F_{y\text{упр}} \delta(x, x_y); \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(B_y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - j_z \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2} - Q &= j_z \frac{d\omega_z}{dt} + \\ &+ P(v)_x = x_T \delta(x, x_T) - M_z^{(0)} \text{упр} \delta(x, x_y). \end{aligned} \quad (4.4.34)$$

Объединяя уравнения сил и моментов (4.4.31), дифференциальные уравнения в частных производных (4.4.34) и краевые условия (4.4.33), получим уравнения

$$\begin{aligned}
 m(w_{0y} - g_y) &= F_y + \int_a^b \frac{\partial v}{\partial x} c dx + P\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x=x_T}; \\
 J_z \frac{d\omega_z}{dt} &= M_z + \int_a^b \frac{\partial v}{\partial x} cx dx + P\left(x \frac{\partial v}{\partial x} - v\right)_{x=x_T}; \\
 \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial Q}{\partial x} &= -\mu(w_{0y} - g_y) - \mu x \frac{d\omega_z}{dt} + c(\alpha + \frac{\partial v}{\partial x}) + \\
 &+ P\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x=x_T} \delta(x, x_T) + F_{y\text{упр}} \delta(x, x_y); \\
 \frac{\partial}{\partial x} \left(B_y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) - j_z \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2} - Q &= j_z \frac{d\omega_z}{dt} + \\
 &+ P(v)_{x=x_T} \delta(x, x_T) - M_{z\text{упр}}^{(0)} \delta(x, x_y); \\
 B_y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= 0, \quad Q = 0 \text{ при } x = a \text{ и при } x = b.
 \end{aligned} \tag{4.4.35}$$

Уравнения (4.4.35) представляют собой уравнения движения ракеты в плоскости тангажа, учитывающие упругость корпуса ракеты. Эти уравнения определяют движение, совершающееся в плоскости тангажа подвижной системой координат $OXYZ$, и функции $v(x, t)$, $Q(x, t)$, характеризующие изгибные колебания корпуса ракеты в плоскости тангажа.

В систему уравнений (4.4.35) входят дифференциальные уравнения в частных производных. Как будет показано ниже, уравнения движения ракеты в плоскости тангажа можно преобразовать в бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Это преобразование основывается на исследовании так называемых собственных изгибных колебаний корпуса ракеты.

§ 4.5. СОБСТВЕННЫЕ ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОРПУСА РАКЕТЫ В ПЛОСКОСТИ ТАНГАЖА

Изгибные колебания корпуса ракеты в плоскости тангажа, происходящие при отсутствии распределенных поперечных сил q_y и моментов m_z , называют собственными колебаниями корпуса в плоскости тангажа. Согласно (4.3.3) в рассматриваемом случае ускорения w_{0y} и $d\omega_z/dt$ отсутствуют и, таким образом, дифференциальное уравнение изгибных колебаний (4.2.19) принимает вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(B_y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(j_z \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2} \right) + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0. \quad (4.5.1)$$

Краевые условия (4.2.21) переходят при этом в следующие:

$$B_y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(B_y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - j_z \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2} = 0$$

при $x = a$ и при $x = b$.

(4.5.2)

При рассмотрении дифференциального уравнения (4.5.1) с краевыми условиями (4.5.2) будем предполагать, пренебрегая медленным изменением функций μ и j_z , возникающим в рассматриваемом интервале времени за счет опорожнения топливных баков, что эти функции зависят от одной переменной x .

Однородное дифференциальное уравнение (4.5.1) с однородными краевыми условиями (4.5.2) обладает очевидным решением $v(x, t) \equiv 0$, которое принято называть тривиальным решением этой краевой задачи. Нетривиальные решения дифференциального уравнения (4.5.1), удовлетворяющие краевым условиям (4.5.2), будем искать в виде произведения двух функций

$$v(x, t) = V(x)g(t), \quad (4.5.3)$$

применяя в рассматриваемом случае метод, называемый методом Фурье, или методом разделения переменных. Подставляя (4.5.3) в (4.5.1), получим равенство

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(B_y \frac{d^2 V}{dx^2} \right) g + \left[- \frac{d}{dx} \left(j_z \frac{dV}{dx} \right) + \mu V \right] \frac{d^2 g}{dt^2} = 0,$$

которое может быть приведено к виду

$$\frac{\frac{d^2}{dx^2} \left(B_y \frac{d^2 V}{dx^2} \right)}{- \frac{d}{dx} \left(j_z \frac{dV}{dx} \right) + \mu V} = - \frac{\frac{d^2 g}{dt^2}}{g}. \quad (4.5.4)$$

Левая часть равенства (4.5.4) не зависит от переменной t , а правая часть — от x . Таким образом, отношения, входящие в равенство (4.5.4), должны представлять собой некоторую константу, которую мы обозначим через λ . В соответствии с этим функция $V(x)$ должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(B_y \frac{d^2 V}{dx^2} \right) + \lambda \left[\frac{d}{dx} \left(j_z \frac{dV}{dx} \right) - \mu V \right] = 0, \quad (4.5.5)$$

а функция $g(t)$ — дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 g}{dt^2} + \lambda g = 0. \quad (4.5.6)$$

Согласно (4.5.2) и (4.5.3) должны выполняться краевые условия

$$B_y \frac{d^2 V}{dx^2} g = 0; \quad \frac{d}{dx} (B_y \frac{d^2 V}{dx^2}) g - j_z \frac{dV}{dx} \frac{d^2 g}{dt^2} = 0$$

при $x = a$ и при $x = b$,

которым можно придать вид

$$B_y \frac{d^2 V}{dx^2} g = 0; \quad [\frac{d}{dx} (B_y \frac{d^2 V}{dx^2}) + \lambda j_z \frac{dV}{dx}] g = 0 \quad (4.5.7)$$

при $x = a$ и при $x = b$

в соответствии с дифференциальным уравнением (4.5.6). Для того чтобы условия (4.5.7) выполнялись в любой момент времени t , функция $V(x)$ должна удовлетворять краевым условиям

$$B_y \frac{d^2 V}{dx^2} = 0; \quad \frac{d}{dx} (B_y \frac{d^2 V}{dx^2}) + \lambda j_z \frac{dV}{dx} = 0 \quad (4.5.8)$$

при $x = a$ и при $x = b$.

Дифференциальное уравнение (4.5.5) с краевыми условиями (4.5.8) при любом значении числового параметра λ имеет тривиальное решение $V(x) \equiv 0$. Те значения параметра λ , при которых краевая задача, образуемая дифференциальным уравнением (4.5.5) и краевыми условиями (4.5.8), имеет нетривиальные решения, называют собственными значениями этой краевой задачи. Нетривиальные решения дифференциального уравнения (4.5.5) с краевыми условиями (4.5.8), соответствующие собственным значениям данной краевой задачи, называют ее собственными функциями. Покажем, что собственные значения краевой задачи, образуемой дифференциальным уравнением (4.5.5) и краевыми условиями (4.5.8), вещественны и неотрицательны.

Рассмотрим две собственные функции рассматриваемой краевой задачи $V(x)$ и $V^*(x)$, соответствующие собственным значениям λ и λ^* . Функция $V(x)$ будет удовлетворять дифференциальному уравнению (4.5.5) и краевым условиям (4.5.8), а функция $V^*(x)$ – дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2}{dx^2} (B_y \frac{d^2 V^*}{dx^2}) + \lambda^* [\frac{d}{dx} (j_z \frac{dV^*}{dx}) - \mu V^*] = 0 \quad (4.5.9)$$

и краевым условиям

$$B_y \frac{d^2 V^*}{dx^2} = 0; \quad \frac{d}{dx} (B_y \frac{d^2 V^*}{dx^2}) + \lambda^* j_z \frac{dV^*}{dx} = 0$$

при $x = a$ и при $x = b$. (4.5.10)

Согласно (4.5.5) должно иметь место равенство

$$\int_a^b V^* \frac{d}{dx} \left[\frac{d}{dx} (B_y \frac{d^2 V}{dx^2}) + \lambda j_z \frac{dV}{dx} \right] dx - \lambda \int_a^b \mu VV^* dx = 0. \quad (4.5.11)$$

Выполняя в (4.5.11) интегрирование по частям, получим соотношение

$$-\int_a^b \frac{dV^*}{dx} \left[\frac{d}{dx} (B_y \frac{d^2 V}{dx^2}) + \lambda j_z \frac{dV}{dx} \right] dx + \\ + \left\{ V^* \left[\frac{d}{dx} (B_y \frac{d^2 V}{dx^2}) + \lambda j_z \frac{dV}{dx} \right] \right\}_{x=a}^{x=b} - \lambda \int_a^b \mu VV^* dx = 0,$$

или согласно (4.5.8)

$$-\int_a^b \frac{dV^*}{dx} \frac{d}{dx} (B_y \frac{d^2 V}{dx^2}) dx - \lambda \int_a^b (j_z \frac{dV}{dx} \frac{dV^*}{dx} + \mu VV^*) dx = 0. \quad (4.5.12)$$

Равенство (4.5.12) путем интегрирования по частям можно привести к виду

$$\int_a^b B_y \frac{d^2 V}{dx^2} \frac{d^2 V^*}{dx^2} dx - (B_y \frac{dV^*}{dx} \frac{d^2 V}{dx^2})_{x=a}^{x=b} - \\ - \lambda \int_a^b (j_z \frac{dV}{dx} \frac{dV^*}{dx} + \mu VV^*) dx = 0,$$

или в соответствии с краевыми условиями (4.5.8)

$$\int_a^b B_y \frac{d^2 V}{dx^2} \frac{d^2 V^*}{dx^2} dx = \lambda \int_a^b (j_z \frac{dV}{dx} \frac{dV^*}{dx} + \mu VV^*) dx. \quad (4.5.13)$$

Аналогично, умножив обе части уравнения (4.5.9) на V и проинтегрировав их по переменной x в пределах от a до b , получим равенство, которому путем интегрирования по частям можно придать вид

$$\int_a^b B_y \frac{d^2 V}{dx^2} \frac{d^2 V^*}{dx^2} dx = \lambda^* \int_a^b (j_z \frac{dV}{dx} \frac{dV^*}{dx} + \mu VV^*) dx. \quad (4.5.14)$$

Если при некотором комплексном значении параметра λ дифференциальное уравнение (4.5.5) имеет нетривиальное решение $V(x)$, удовлетворяющее краевым условиям (4.5.8), то при $\lambda^* = \lambda$ краевая задача, образуемая дифференциальным уравнением (4.5.9) и краевыми условиями

(4.5.10), будет иметь нетривиальное решение $V^*(x) = \bar{V}(x)$. В рассматриваемом случае равенство (4.5.13) примет вид

$$\int_a^b B_y \frac{d^2 V}{dx^2} - \frac{d^2 \bar{V}}{dx^2} dx = \lambda \int_a^b (j_z \frac{dV}{dx} - \frac{d\bar{V}}{dx} + \mu V \bar{V}) dx,$$

или $\int_a^b B_y \left| \frac{d^2 V}{dx^2} \right|^2 dx = \lambda \int_a^b (j_z \left| \frac{dV}{dx} \right|^2 + \mu |V|^2) dx.$ (4.5.15)

В соответствии с формулами (4.2.16) всегда должны соблюдаться неравенства

$$\mu > 0, \quad j_z > 0. \quad (4.5.16)$$

Согласно (4.5.16) равенство

$$\int_a^b (j_z \left| \frac{dV}{dx} \right|^2 + \mu |V|^2) dx = 0$$

может иметь место лишь для функции $V(x)$, тождественно равной нулю в интервале $a \leq x \leq b$. По предположению функция $V(x)$ представляет собой нетривиальное решение дифференциального уравнения (4.5.5), и, следовательно, интеграл, входящий в правую часть соотношения (4.5.15), не может быть равен нулю. Из (4.5.15) вытекает равенство

$$\lambda = \frac{\int_a^b B_y \left| \frac{d^2 V}{dx^2} \right|^2 dx}{\int_a^b (j_z \left| \frac{dV}{dx} \right|^2 + \mu |V|^2) dx}, \quad (4.5.17)$$

в соответствии с которым собственное значение λ должно быть вещественным. Предположив, что краевая задача, образуемая дифференциальным уравнением (4.5.5) и краевыми условиями (4.5.8), имеет комплексное собственное значение, мы пришли к противоречию. Таким образом, нами доказана вещественность собственных значений рассматриваемой краевой задачи; из равенства (4.5.17) вытекает также неотрицательность этих собственных значений, так как числитель и знаменатель дроби, входящей в правую часть соотношения (4.5.17), положительны.

Из формул (4.5.13) и (4.5.14) вытекает равенство

$$(\lambda - \lambda^*) \int_a^b (j_z \frac{dV}{dx} - \frac{dV^*}{dx} + \mu V V^*) dx = 0, \quad (4.5.18)$$

в соответствии с которым собственные функции рассматриваемой краевой задачи $V(x)$ и $V^*(x)$, соответствующие различным ее собственным значениям λ и λ^* , всегда должны удовлетворять условию

$$\int_a^b \left(j_z \frac{dV}{dx} - \frac{dV^*}{dx} + \mu VV^* \right) dx = 0. \quad (4.5.19)$$

Свойство собственных функций, выражаемое интегральным соотношением (4.5.19), принято называть свойством их ортогональности. Свойство ортогональности собственных функций имеет следующий физический смысл: работа, которая совершается силами инерции, соответствующими какому-либо тону собственных колебаний, на перемещениях, возникающих при колебаниях другого тона, равна нулю.

При $\lambda = 0$ дифференциальное уравнение (4.5.5) вырождается в уравнение

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(B_y \frac{d^2 V}{dx^2} \right) = 0, \quad (4.5.20)$$

краевые условия (4.5.8) при $\lambda = 0$ принимают вид

$$B_y \frac{d^2 V}{dx^2} = 0; \quad \frac{d}{dx} \left(B_y \frac{d^2 V}{dx^2} \right) = 0$$

при $x = a$ и при $x = b$. (4.5.21)

Согласно (4.5.20) должно иметь место равенство

$$B_y \frac{d^2 V}{dx^2} = C_1 + C_2 x, \quad (4.5.22)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. В соответствии с краевыми условиями (4.5.21) обе постоянные C_1 и C_2 должны быть равны нулю. Полагая в (4.5.22) $C_1 = C_2 = 0$, получим дифференциальное уравнение, имеющее два линейно независимых решения:

$$V = 1 \quad \text{и} \quad V = x. \quad (4.5.23)$$

Оба эти решения удовлетворяют краевым условиям (4.5.21), и, таким образом, краевая задача, образуемая дифференциальным уравнением (4.5.5) и краевыми условиями (4.5.8), имеет собственное значение λ , равное нулю. Этому собственному значению соответствуют две собственные функции краевой задачи, определяемые формулами (4.5.23). Все остальные собственные значения рассматриваемой краевой задачи должны быть положительными. Эти положительные собственные значения будем обозначать через λ_j , $j = 1, 2, \dots$ и нумеровать их в порядке возрастания, а соответствующие им собственные функции – через $V_j(x)$, $j = 1, 2, \dots$

Согласно (4.5.3) первой из собственных функций (4.5.23) соответствуют одинаковые перемещения поперечных сечений корпуса, второй – перемещения, пропорциональные абсциссе поперечного сечения x . В первом случае функция $v(x, t)$ определяет поступательные перемещения корпуса ракеты в плоскости тангажа, второму случаю соответствует вращение кор-

пуса вокруг оси OZ . Оба эти движения не сопровождаются деформациями корпуса, и, таким образом, собственное значение рассматриваемой нами краевой задачи, равное нулю, собственных изгибных колебаний корпуса ракеты не определяет.

Положительному собственному значению краевой задачи λ_j согласно (4.5.3) и (4.5.6) будет соответствовать функция $v(x, t)$, определяемая формулой

$$v(x, t) = V_j(x) g_j(t), \quad (4.5.24)$$

где $g_j(t)$ – решение дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 g_j}{dt^2} + \lambda_j g_j = 0. \quad (4.5.25)$$

Полагая $\omega_j = \sqrt{\lambda_j}$, (4.5.26)

можно привести уравнение (4.5.25) к виду

$$\frac{d^2 g_j}{dt^2} + \omega_j^2 g_j = 0. \quad (4.5.27)$$

Общее решение дифференциального уравнения (4.5.27) может быть представлено в виде

$$g_j(t) = C_j \cos(\omega_j t + \varphi_j), \quad (4.5.28)$$

где C_j и φ_j – произвольные постоянные.

Подставляя (4.5.28) в (4.5.24), получим выражение для прогиба корпуса ракеты:

$$v(x, t) = C_j V_j(x) \cos(\omega_j t + \varphi_j). \quad (4.5.29)$$

Согласно (4.5.29) в рассматриваемом случае в любой момент времени t перемещения поперечных сечений корпуса пропорциональны соответствующим значениям функции $V_j(x)$. Таким образом, функции $V_j(x)$, $j = 1, 2, \dots$ определяют формы собственных изгибных колебаний корпуса ракеты, числа ω_j , $j = 1, 2, \dots$ в соответствии с формулой (4.5.29) – частоты этих колебаний. Дифференциальное уравнение (4.5.27) принято называть дифференциальным уравнением собственных колебаний.

Мы показали выше, что дифференциальное уравнение (4.5.5) с краевыми условиями (4.5.8) имеет собственные функции $V = 1$ и $V = x$, соответствующие собственному значению $\lambda = 0$, и последовательность собственных функций $V_j(x)$, $j = 1, 2, \dots$, соответствующих положительным собственным значениям $\lambda_j = \omega_j^2$, $j = 1, 2, \dots$. Полагая в (4.5.19) $V = V_j$, $V^* = 1$, получим интегральные соотношения для функций $V_j(x)$, $j = 1, 2, \dots$

$$\int_a^b V_j \mu dx = 0, \quad j = 1, 2, \dots \quad (4.5.30)$$

При $V = V_j$, $V^* = x$ из равенства (4.5.19) будут вытекать интегральные зависимости

$$\int_a^b (x V_j \mu + j_z \frac{dV_j}{dx}) dx = 0, \quad j = 1, 2, \dots \quad (4.5.31)$$

Поясним физический смысл полученных соотношений. Ортогональность форм упругих колебаний V_j с формами колебаний $V^* = 1$ и $V^* = x$, характеризующими движение корпуса ракеты как твердого тела, означает, что сумма сил инерции, возникающих при колебаниях, и их моментов равна нулю. Другими словами, собственные упругие колебания корпуса не приводят к изменению положения его центра масс.

При $\omega_j \neq \omega_k$, полагая в (4.5.19) $V = V_j$, $V^* = V_k$, получим для форм собственных колебаний условия ортогональности

$$\int_a^b (j_z \frac{dV_j}{dx} \frac{dV_k}{dx} + \mu V_j V_k) dx = 0 \quad \text{при } \omega_j \neq \omega_k. \quad (4.5.32)$$

При выводе дифференциального уравнения изгибных колебаний корпуса ракеты мы не учитывали рассеяния энергии, неизбежно сопровождающего всякий реальный колебательный процесс. В соответствии с этим полученное нами дифференциальное уравнение собственных колебаний (4.5.27) предопределяет гармонический характер рассматриваемых собственных колебаний корпуса ракеты. Для того чтобы учесть затухание изгибных колебаний, надо заменить уравнение (4.5.27) дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2 g_j}{dt^2} + \epsilon_j \frac{dg_j}{dt} + \omega_j^2 g_j = 0. \quad (4.5.33)$$

Неоднократно проводившиеся натурные динамические испытания различных ракет, а также динамические испытания конструктивно подобных моделей [17, 18] свидетельствуют о том, что для упругих колебаний корпуса ракеты логарифмический декремент колебаний практически не зависит от номера их тона j . Логарифмический декремент колебаний пропорционален отношению коэффициента демпфирования ϵ_j к частоте колебаний ω_j . Таким образом, для уравнения (4.5.33) можно приближенно положить

$$\epsilon_j / \omega_j = \eta, \quad (4.5.34)$$

где η – безразмерный коэффициент, не зависящий от номера тона j . Обычно $\eta = 0,01 \dots 0,02$.

Согласно (4.5.34) дифференциальному уравнению (4.5.33) можно придать вид

$$\frac{d^2 g_j}{dt^2} + \eta \omega_j \frac{dg_j}{dt} + \omega_j^2 g_j = 0. \quad (4.5.35)$$

В заключение отметим, что дифференциальное уравнение (4.5.5) с краевыми условиями (4.5.8) определяет функции $V_j(x)$, $j = 1, 2, \dots$ с точностью до произвольных постоянных множителей. Для устранения этой неопределенности функции $V_j(x)$, $j = 1, 2, \dots$ подчиняют всегда некоторому дополнительному условию, в качестве которого обычно пользуются условием

$$V_j(x) = 1 \quad \text{при } x = a. \quad (4.5.36)$$

§ 4.6. РАСЧЕТ ФОРМ И ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Для расчета форм и частот собственных изгибных колебаний можно воспользоваться методом последовательных приближений.

Пусть $V_j^{(k-1)}(x)$ есть $(k-1)$ -е приближение для j -й формы собственных колебаний $V_j(x)$. Относительно функции $V_j^{(k-1)}(x)$ будем предполагать, что она удовлетворяет условиям

$$\int_a^b V_j^{(k-1)} \mu dx = 0; \quad \int_a^b (x V_j^{(k-1)} \mu + j_z \frac{d V_j^{(k-1)}}{dx}) dx = 0;$$

$$V_j^{(k-1)} = 1 \quad \text{при } x = a \quad (4.6.1)$$

в соответствии с интегральными соотношениями (4.5.30) и (4.5.31), и граничному условию (4.5.36), которого мы будем придерживаться везде при дальнейшем изложении. Следующее приближение $V_j^{(k)}(x)$ для функции $V_j(x)$ условимся определять из дифференциального уравнения

$$\frac{d^2}{dx^2} (B_y \frac{d^2 V_j^{(k)}}{dx^2}) + \lambda_j^{(k)} \left[\frac{d}{dx} (j_z \frac{d V_j^{(k-1)}}{dx}) - \mu V_j^{(k-1)} \right] = 0 \quad (4.6.2)$$

с краевыми условиями

$$B_y \frac{d^2 V_j^{(k)}}{dx^2} = 0; \quad \frac{d}{dx} (B_y \frac{d^2 V_j^{(k)}}{dx^2}) + \lambda_j^{(k)} j_z \frac{d V_j^{(k-1)}}{dx} = 0$$

$$\text{при } x = a \quad \text{и} \quad x = b \quad (4.6.3)$$

(см. (4.5.5) и (4.5.8)), потребовав при этом, чтобы искомая функция $V_j^{(k)}(x)$ удовлетворяла условиям

$$\int_a^b V_j^{(k)} \mu dx = 0; \quad \int_a^b (x V_j^{(k)} \mu + j_z \frac{dV_j^{(k)}}{dx}) dx = 0;$$

$$V_j^{(k)} = 1 \quad \text{при } x = a \quad (4.6.4)$$

(см. (4.6.1)). Как будет видно из дальнейшего, дифференциальное уравнение (4.6.2) с краевыми условиями (4.6.3) и дополнительными условиями (4.6.4) однозначно определяет функцию $V_j^{(k)}(x)$ и числовой параметр $\lambda_j^{(k)}$, входящий в дифференциальное уравнение (4.6.2) и в краевые условия (4.6.3).

Согласно (4.6.2) и (4.6.3) должно иметь место равенство

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left(B_y \frac{d^2 V_j^{(k)}}{dx^2} \right) + \lambda_j^{(k)} j_z \frac{dV_j^{(k-1)}}{dx} = \\ & = \lambda_j^{(k)} \int_a^x V_j^{(k-1)} \mu dx. \end{aligned} \quad (4.6.5)$$

В соответствии с первым соотношением (4.6.1) краевое условие

$$\frac{d}{dx} \left(B_y \frac{d^2 V_j^{(k)}}{dx^2} \right) + \lambda_j^{(k)} j_z \frac{dV_j^{(k-1)}}{dx} = 0$$

при $x = a$ и при $x = b$

будет выполняться.

Дифференциальное уравнение (4.6.5) можно привести к виду

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left(B_y \frac{d^2 V_j^{(k)}}{dx^2} \right) - \lambda_j^{(k)} \int_a^x V_j^{(k-1)} \mu dx - \lambda_j^{(k)} x V_j^{(k-1)} \mu = \\ & = -\lambda_j^{(k)} x V_j^{(k-1)} \mu - \lambda_j^{(k)} j_z \frac{dV_j^{(k-1)}}{dx}, \end{aligned}$$

или $\frac{d}{dx} \left(B_y \frac{d^2 V_j^{(k)}}{dx^2} - \lambda_j^{(k)} x \int_a^x V_j^{(k-1)} \mu dx \right) =$

$$= -\lambda_j^{(k)} \left(x V_j^{(k-1)} \mu + j_z \frac{dV_j^{(k-1)}}{dx} \right). \quad (4.6.6)$$

Согласно (4.6.6) и (4.6.3) должно иметь место равенство

$$B_y \frac{d^2 V_j^{(k)}}{dx^2} = \lambda_j^{(k)} x \int_a^x V_j^{(k-1)} \mu dx - \\ - \lambda_j^{(k)} \int_a^x (x V_j^{(k-1)} \mu + j_z \frac{dV_j^{(k-1)}}{dx}) dx. \quad (4.6.7)$$

Краевое условие

$$B_y \frac{d^2 V_j^{(k)}}{dx^2} = 0 \quad \text{при } x = a \quad \text{и при } x = b$$

будет выполняться в соответствии с зависимостями (4.6.1).

Уравнение (4.6.7) можно привести к виду

$$\frac{d^2 V_j^{(k)}}{dx^2} = \lambda_j^{(k)} \frac{M_j^{(k)}(x)}{B_y(x)}, \quad (4.6.8)$$

$$\text{где } M_j^{(k)}(x) = x \int_a^x V_j^{(k-1)} \mu dx - \int_a^x (x V_j^{(k-1)} \mu + j_z \frac{dV_j^{(k-1)}}{dx}) dx.$$

Полагая в (4.6.8)

$$V_j^{(k)}(x) = \lambda_j^{(k)} F_j^{(k)}(x), \quad (4.6.10)$$

получим для функции $F_j^{(k)}(x)$ дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 F_j^{(k)}}{dx^2} = \frac{M_j^{(k)}(x)}{B_y(x)}. \quad (4.6.11)$$

Согласно (4.6.4) и (4.6.10) функция $F_j^{(k)}(x)$ должна удовлетворять условиям

$$\int_a^b F_j^{(k)} \mu dx = 0; \quad \int_a^b (xF_j^{(k)} \mu + j_z \frac{dF_j^{(k)}}{dx}) dx = 0. \quad (4.6.12)$$

Дифференциальное уравнение (4.6.11) имеет частное решение

$$F_j^{(k)} = f_j^{(k)}(x),$$

$$\text{где } f_j^{(k)}(x) = x \int_a^x \frac{M_j^{(k)}}{B_y} dx - \int_a^x \frac{M_j^{(k)}}{B_y} x dx, \quad (4.6.13)$$

в чём можно убедиться, дважды дифференцируя по x обе части равенства (4.6.13). Таким образом, общее решение дифференциального уравнения (4.6.11) может быть представлено в виде

$$F_j^{(k)}(x) = f_j^{(k)}(x) + C_1 + C_2 x, \quad (4.6.14)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Подставляя (4.6.14) в (4.6.12), получим для постоянных C_1 и C_2 систему уравнений

$$\begin{aligned} C_1 \int_a^b \mu dx + C_2 \int_a^b \mu x dx &= - \int_a^b f_j^{(k)} \mu dx; \\ C_1 \int_a^b \mu x dx + C_2 \int_a^b (\mu x^2 + j_z) dx &= - \int_a^b (x f_j^{(k)} \mu + j_z \frac{df_j^{(k)}}{dx}) dx, \end{aligned}$$

или согласно (4.3.11)

$$\begin{aligned} mC_1 &= - \int_a^b f_j^{(k)} \mu dx; \\ J_z C_2 &= - \int_a^b (x f_j^{(k)} \mu + j_z \frac{df_j^{(k)}}{dx}) dx \end{aligned} \quad (4.6.15)$$

(напомним, что координата центра масс ракеты x_C всегда равна нулю).

Подставляя C_1 и C_2 из (4.6.15) в (4.6.14), получим выражение для функции $F_j^{(k)}(x)$:

$$\begin{aligned} F_j^{(k)}(x) &= f_j^{(k)}(x) - \frac{1}{m J_z} \left[J_z \int_a^b f_j^{(k)} \mu dx + \right. \\ &\quad \left. + mx \int_a^b (x f_j^{(k)} \mu + j_z \frac{df_j^{(k)}}{dx}) dx \right]. \end{aligned} \quad (4.6.16)$$

Согласно (4.6.4) и (4.6.10) должно иметь место равенство

$$\lambda_j^{(k)} F_j^{(k)}(a) = 1. \quad (4.6.17)$$

Из формул (4.6.13) и (4.6.16) найдем

$$F_j^{(k)}(a) = - \frac{1}{m J_z} \int_a^b [f_j^{(k)} \mu (J_z + max) + m a j_z \frac{df_j^{(k)}}{dx}] dx. \quad (4.6.18)$$

В соответствии с равенствами (4.6.17) и (4.6.18) числовой множитель $\lambda_j^{(k)}$ должен иметь следующее значение:

$$\lambda_j^{(k)} = \frac{mJ_z}{\int_a^b [f_j^{(k)} \mu (J_z + \max) + \text{maj}_z \frac{df_j^{(k)}}{dx}] dx}. \quad (4.6.19)$$

Подставляя (4.6.16) и (4.6.19) в (4.6.10), получим выражение для искомой функции $V_j^{(k)}(x)$

$$V_j^{(k)}(x) = \frac{J_z \int_a^b f_j^{(k)} \mu dx + mx \int_a^b (x f_j^{(k)} \mu + j_z \frac{df_j^{(k)}}{dx}) dx - mJ_z f_j^{(k)}(x)}{\int_a^b [f_j^{(k)} \mu (J_z + \max) + \text{maj}_z \frac{df_j^{(k)}}{dx}] dx}. \quad (4.6.20)$$

Таким образом, зная $(k-1)$ -е приближение $V_j^{(k-1)}(x)$ для функции $V_j(x)$, можно рассчитать следующее приближение $V_j^{(k)}(x)$ по формулам (4.6.9), (4.6.13) и (4.6.20). Для определения первой формы собственных колебаний в качестве исходного приближения $V_1^{(0)}(x)$ может быть взята произвольная функция, удовлетворяющая согласно (4.6.1) условиям

$$\int_a^b V_1^{(0)} \mu dx = 0; \quad \int_a^b (x V_1^{(0)} \mu + j_z \frac{dV_1^{(0)}}{dx}) dx = 0;$$

$$V_1^{(0)} = 1 \quad \text{при } x = a. \quad (4.6.21)$$

Можно положить, например,

$$V_1^{(0)}(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2, \quad (4.6.22)$$

определен в коэффициенты C_0 , C_1 и C_2 из условий (4.6.21). Последовательность функций $V_1^{(k)}(x)$, $k = 1, 2, \dots$ всегда будет сходиться к функции $V_1(x)$, определяющей первую форму собственных колебаний, а числовая последовательность $\lambda_1^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots$, построенная в соответствии с формулой (4.6.19), всегда будет иметь предел λ_1 , определяющий согласно (4.5.26) квадрат первой частоты собственных колебаний корпуса ракеты. Для нахождения второй формы собственных колебаний в качестве исходного приближения $V_2^{(0)}(x)$ должна быть взята функция, удовлетворяющая согласно (4.6.1) условиям

$$\int_a^b V_2^{(0)} \mu dx = 0; \quad \int_a^b (x V_2^{(0)} \mu + j_z \frac{dV_2^{(0)}}{dx}) dx = 0;$$

$$V_2^{(0)} = 1 \quad \text{при } x = a \quad (4.6.23)$$

и, кроме того, условию

$$\int_a^b (j_z \frac{dV_1}{dx} - \frac{dV_2^{(0)}}{dx} + \mu V_1 V_2^{(0)}) dx = 0 \quad (4.6.24)$$

в соответствии со свойствами ортогональности (4.5.32). Зная функцию $V_1(x)$, можно построить исходное приближение для функции $V_2(x)$, положив

$$V_2^{(0)}(x) = C_1 V_1^{(0)}(x) + C_2 V_1(x). \quad (4.6.25)$$

Согласно (4.5.30), (4.5.31), (4.5.36) и (4.6.21) первые два условия (4.6.23) будут выполняться при любых значениях коэффициентов C_1 и C_2 , третье условие будет выполняться, если константы C_1 и C_2 будут удовлетворять уравнению

$$C_1 + C_2 = 1. \quad (4.6.26)$$

Подставив (4.6.25) в (4.6.24), получим для коэффициентов C_1 и C_2 уравнение:

$$C_1 \int_a^b (j_z \frac{dV_1}{dx} - \frac{dV_1^{(0)}}{dx} + \mu V_1 V_1^{(0)}) dx +$$

$$+ C_2 \int_a^b [j_z (\frac{dV_1}{dx})^2 + \mu V_1^2] dx = 0. \quad (4.6.27)$$

Определив константы C_1 и C_2 из уравнений (4.6.26) и (4.6.27), по формуле (4.6.25) найдем функцию $V_2^{(0)}(x)$, удовлетворяющую всем необходимым условиям. Последовательность функций $V_2^{(k)}(x)$, $k = 1, 2, \dots$ будет сходиться к функции $V_2(x)$, определяющей вторую форму собственных колебаний, а числовая последовательность $\lambda_2^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots$ будет иметь предел λ_2 , определяющий вторую частоту собственных колебаний. В качестве исходного приближения $V_3^{(0)}(x)$ для функции $V_3(x)$ может быть взята функция

$$V_3^{(0)}(x) = C_1 V_2^{(0)}(x) + C_2 V_2(x), \quad (4.6.28)$$

где C_1 и C_2 – константы, определяемые уравнениями

$$C_1 + C_2 = 1;$$

$$\begin{aligned} & C_1 \int_a^b \left(j_z \frac{dV_2}{dx} - \frac{dV_2^{(0)}}{dx} + \mu V_2 V_2^{(0)} \right) dx + \\ & + C_2 \int_a^b \left[j_z \left(\frac{dV_2}{dx} \right)^2 + \mu V_2^2 \right] dx = 0 \end{aligned} \quad (4.6.29)$$

и т.д.

Отметим два особых случая, которые могут представиться в процессе проведения указанных выше расчетов.

Если точка $x = a$ окажется узловой для j -й формы собственных колебаний, условие (4.5.36) при этом значении j станет невыполнимым. Тогда определенный интеграл, входящий в знаменатель в формулах (4.6.19) и (4.6.20), при $k \rightarrow \infty$ будет стремиться к нулю и процесс последовательных приближений станет расходящимся. В рассматриваемом случае условие (4.5.36) следует заменить каким-либо другим дополнительным условием для функции $V_j(x)$.

Если функция $V_1^{(0)}(x)$ случайно окажется ортогональной к функции $V_j(x)$, т.е. если при некотором j возникает равенство

$$\int_a^b \left(j_z \frac{dV_j}{dx} - \frac{dV_1^{(0)}}{dx} + \mu V_j V_1^{(0)} \right) dx = 0, \quad (4.6.30)$$

j -я форма собственных колебаний в процессе указанных выше вычислений окажется пропущенной. В связи с этим при расчете форм и частот собственных колебаний рассмотренным методом последовательных приближений полезно проводить вычисления, дважды, отправляясь от двух различных исходных приближений $V_1^{(0)}(x)$.

§ 4.7. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ РАКЕТЫ В ПЛОСКОСТИ ТАНГАЖА В БЕСКОНЕЧНУЮ СИСТЕМУ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Зная формы и частоты собственных изгибных колебаний корпуса ракеты, можно преобразовать уравнения (4.4.35), содержащие дифференциальные уравнения в частных производных, в бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

Мы показали выше, что краевая задача, образуемая дифференциальным уравнением (4.5.5) и краевыми условиями (4.5.8), обладает двумя собственными функциями 1 и x , соответствующими собственному значению $\lambda = 0$, и последовательностью собственных функций $V_j(x)$, $j = 1, 2, \dots$, соответствующих положительным собственным значениям данной краевой задачи. Последовательность собственных функций

$$1, x, V_1(x), V_2(x), \dots \quad (4.7.1)$$

обладает так называемым свойством полноты, которое выражается в том, что любая функция $f(x)$, непрерывная в интервале $a \leq x \leq b$, может быть разложена в ряд по собственным функциям (4.7.1)

$$f(x) = C_1 + C_2 x + \sum_{k=1}^{\infty} g_k V_k(x), \quad (4.7.2)$$

сходящийся в любой точке интервала $a < x < b$ к соответствующему частному значению функции $f(x)$.

Вследствие опорожнения топливных баков функции μ и j_z , входящие в дифференциальное уравнение (4.5.5) и в краевые условия (4.5.8), меняют свой вид. В соответствии с этим различным моментам времени t будут соответствовать различные формы собственных изгибных колебаний корпуса ракеты, иными словами собственные функции V_j краевой задачи, образуемой дифференциальным уравнением (4.5.5) и краевыми условиями (4.5.8), будут зависеть от времени t . В любой момент времени t последовательность функций

$$1, x, V_1(x, t), V_2(x, t), \dots \quad (4.7.3)$$

будет обладать свойством полноты, и, следовательно, в каждый момент времени t прогиб корпуса ракеты $v(x, t)$ может быть представлен рядом

$$v(x, t) = C_1(t) + C_2(t)x + \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t) V_k(x, t), \quad (4.7.4)$$

сходящимся в любой точке интервала $a < x < b$ к соответствующему значению прогиба v .

Определим сначала коэффициенты разложения (4.7.4) $C_1(t)$, $C_2(t)$. В § 4.3 мы показали, что функция $v(x, t)$, найденная из дифференциального уравнения (4.2.19) с краевыми условиями (4.2.21), всегда будет удовлетворять интегральным условиям (4.3.4). Подставляя (4.7.4) в (4.3.4), получим равенства

$$\begin{aligned} C_1 \int_a^b \mu dx + C_2 \int_a^b \mu x dx + \sum_{k=1}^{\infty} g_k \int_a^b V_k \mu dx &= 0, \\ C_1 \int_a^b \mu x dx + C_2 \int_a^b (\mu x^2 + j_z) dx + \sum_{k=1}^{\infty} g_k \int_a^b (x \mu V_k + \\ + \frac{\partial V_k}{\partial x} j_z) dx &= 0, \end{aligned}$$

или согласно (4.3.11), (4.5.30) и (4.5.31)

$$mC_1 = 0; \quad J_z C_2 = 0 \quad (4.7.5)$$

$(x_C \equiv 0)$. Таким образом, в разложении (4.7.4) коэффициенты $C_1(t)$ и $C_2(t)$ всегда будут тождественно равны нулю и в соответствии с этим прогиб корпуса ракеты $v(x, t)$ будем искать в виде ряда

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t) V_k(x, t). \quad (4.7.6)$$

Подставляя ряд (4.7.6) в первые два уравнения (4.4.35), получим уравнения

$$\begin{aligned} m(w_{0y} - g_y) &= F_y + \sum_{k=1}^{\infty} g_k \left[\int_a^b \frac{\partial V_k}{\partial x} c dx + P \left(\frac{\partial V_k}{\partial x} \right)_{x=x_T} \right]; \\ J_z \frac{d\omega_z}{dt} &= M_z + \sum_{k=1}^{\infty} g_k \left[\int_a^b \frac{\partial V_k}{\partial x} cx dx + \right. \\ &\quad \left. + P(x \frac{\partial V_k}{\partial x} - V_k)_{x=x_T} \right], \end{aligned}$$

или $m(w_{0y} - g_y) + \sum_{k=1}^{\infty} c_{yk} g_k = F_y;$

$$J_z \frac{d\omega_z}{dt} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{\vartheta k} g_k = M_z, \quad (4.7.7)$$

где $c_{yk} = - \int_a^b \frac{\partial V_k}{\partial x} c dx - P \left(\frac{\partial V_k}{\partial x} \right)_{x=x_T};$

$$c_{\vartheta k} = - \int_a^b \frac{\partial V_k}{\partial x} cx dx + P(V_k - x \frac{\partial V_k}{\partial x})_{x=x_T}. \quad (4.7.8)$$

Подставим теперь ряд (4.7.6) в дифференциальные уравнения в частных производных, содержащиеся в уравнениях движения (4.4.35). В процессе движения ракеты формы собственных изгибных колебаний ее корпуса меняются медленно, поэтому при вычислении частных производных по времени t от прогиба $v(x, t)$ практически можно пренебречь зависимостью функций $V_k(x, t)$, $k = 1, 2, \dots$ от времени t . В этом случае, подставляя ряд (4.7.6) в дифференциальные уравнения в частных производных (4.4.35), получим соотношения

$$\mu \sum_{k=1}^{\infty} V_k \frac{d^2 g_k}{dt^2} + \frac{\partial Q}{\partial x} = -\mu(w_{0y} - g_y) - \mu x \frac{d\omega_z}{dt} +$$

$$\begin{aligned}
& + c(\alpha + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial V_k}{\partial x} g_k) + P \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\partial V_k}{\partial x} \right)_{x=x_T} g_k \delta(x, x_T) + \\
& + F_y \text{упр} \delta(x, x_y); \tag{4.7.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left(B_y \frac{\partial^2 V_k}{\partial x^2} \right) g_k - j_z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial V_k}{\partial x} \frac{d^2 g_k}{dt^2} - Q = \\
& = j_z \frac{d\omega_z}{dt} + P \sum_{k=1}^{\infty} (V_k)_{x=x_T} g_k \delta(x, x_T) - M_z^{(0)} \text{упр} \delta(x, x_y).
\end{aligned}$$

Умножив обе части первого уравнения (4.7.9) на $V_j(x, t)$ и проинтегрировав его по переменной x в пределах от a до b , получим равенство

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b V_j V_k \mu dx \frac{d^2 g_k}{dt^2} + \int_a^b V_j \frac{\partial Q}{\partial x} dx = \\
& = - \int_a^b V_j \mu dx (w_{0y} - g_y) - \int_a^b x V_j \mu dx \frac{d\omega_z}{dt} + \\
& + \alpha \int_a^b V_j c dx + \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b V_j \frac{\partial V_k}{\partial x} c dx g_k + \\
& + P \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\partial V_k}{\partial x} \right)_{x=x_T} g_k \int_a^b V_j \delta(x, x_T) dx + F_y \text{упр} \int_a^b V_j \delta(x, x_y) dx. \tag{4.7.10}
\end{aligned}$$

Умножив обе части второго уравнения (4.7.9) на $-\partial V_j / \partial x$ и проинтегрировав их по переменной x в пределах от a до b , получим соотношение:

$$\begin{aligned}
& - \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b \frac{\partial V_j}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(B_y \frac{\partial^2 V_k}{\partial x^2} \right) dx g_k + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b \frac{\partial V_j}{\partial x} \frac{\partial V_k}{\partial x} j_z dx \frac{d^2 g_k}{dt^2} + \int_a^b Q \frac{\partial V_j}{\partial x} dx = \\
& = - \int_a^b \frac{\partial V_j}{\partial x} j_z dx \frac{d\omega_z}{dt} - P \sum_{k=1}^{\infty} (V_k)_{x=x_T} \int_a^b \frac{\partial V_j}{\partial x} \times \\
& \times \delta(x, x_T) dx g_k + M_z^{(0)} \text{упр} \int_a^b \frac{\partial V_j}{\partial x} \delta(x, x_y) dx. \tag{4.7.11}
\end{aligned}$$

Согласно (4.7.10) и (4.7.11) должно иметь место равенство

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b (V_j V_k \mu + \frac{\partial V_j}{\partial x} \frac{\partial V_k}{\partial x} j_z) dx - \frac{d^2 g_k}{dt^2} - \\
 & - \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b \frac{\partial V_j}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (B_y \frac{\partial^2 V_k}{\partial x^2}) dx g_k + \int_a^b (V_j \frac{\partial Q}{\partial x} + \\
 & + Q \frac{\partial V_j}{\partial x}) dx = - \int_a^b V_j \mu dx (w_{0y} - g_y) - \int_a^b (x V_j \mu + \\
 & + \frac{\partial V_j}{\partial x} j_z) dx \frac{d \omega_z}{dt} + \alpha \int_a^b V_j c dx + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \int_a^b V_j \frac{\partial V_k}{\partial x} c dx + \right. \\
 & + P \left[\left(\frac{\partial V_k}{\partial x} \right)_{x=x_T} \int_a^b V_j \delta(x, x_T) dx - (V_k)_{x=x_T} \int_a^b \frac{\partial V_j}{\partial x} \times \right. \\
 & \times \delta(x, x_T) dx \left. \right\} g_k + F_{y \text{упр}} \int_a^b V_j \delta(x, x_y) dx + \\
 & + M_{z \text{упр}}^{(0)} \int_a^b \frac{\partial V_j}{\partial x} \delta(x, x_y) dx. \tag{4.7.12}
 \end{aligned}$$

Согласно (4.5.5) и (4.5.8) функция $V_k(x, t)$ должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (B_y \frac{\partial^2 V_k}{\partial x^2}) + \lambda_k \left[\frac{\partial}{\partial x} (j_z \frac{\partial V_k}{\partial x}) - \mu V_k \right] = 0 \tag{4.7.13}$$

и краевым условиям

$$B_y \frac{\partial^2 V_k}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial x} (B_y \frac{\partial^2 V_k}{\partial x^2}) + \lambda_k j_z \frac{\partial V_k}{\partial x} = 0$$

при $x = a$ и при $x = b$. (4.7.14)

Интегрируя (4.7.13) по переменной x в пределах от a до x и принимая во внимание при этом краевые условия (4.7.14), получим равенство

$$\frac{\partial}{\partial x} (B_y \frac{\partial^2 V_k}{\partial x^2}) + \lambda_k j_z \frac{\partial V_k}{\partial x} - \lambda_k \int_a^x V_k \mu dx = 0. \tag{4.7.15}$$

В соответствии с равенством (4.7.15) должно иметь место соотношение

$$\int_a^b \frac{\partial V_j}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(B_y \frac{\partial^2 V_k}{\partial x^2} \right) dx = -\lambda_k \int_a^b \frac{\partial V_j}{\partial x} \frac{\partial V_k}{\partial x} j_z dx + \\ + \lambda_k \int_a^b \frac{\partial V_j}{\partial x} \int_a^x V_k \mu dx dx. \quad (4.7.16)$$

Интегрируя обе части тождества

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(V_j \int_a^x V_k \mu dx \right) = \frac{\partial V_j}{\partial x} \int_a^x V_k \mu dx + V_j V_k \mu$$

по переменной x в пределах от a до b , получим равенство

$$(V_j)_x = b \int_a^b V_k \mu dx = \int_a^b \frac{\partial V_j}{\partial x} \int_a^x V_k \mu dx dx + \int_a^b V_j V_k \mu dx. \quad (4.7.17)$$

Согласно (4.5.30) и (4.7.17) должно иметь место соотношение

$$\int_a^b \frac{\partial V_j}{\partial x} \int_a^x V_k \mu dx dx = - \int_a^b V_j V_k \mu dx, \quad (4.7.18)$$

в соответствии с которым формула (4.7.16) может быть приведена к виду

$$\int_a^b \frac{\partial V_j}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(B_y \frac{\partial^2 V_k}{\partial x^2} \right) dx = -\lambda_k \int_a^b (V_j V_k \mu + \\ + \frac{\partial V_j}{\partial x} \frac{\partial V_k}{\partial x} j_z) dx. \quad (4.7.19)$$

Пользуясь краевым условием, указанным для функции Q в уравнениях движения (4.4.35), найдем

$$\int_a^b (V_j \frac{\partial Q}{\partial x} + Q \frac{\partial V_j}{\partial x}) dx = \int_a^b \frac{\partial (V_j Q)}{\partial x} dx = V_j Q \Big|_{x=a}^{x=b} = 0. \quad (4.7.20)$$

Согласно (4.7.19) и (4.7.20) уравнению (4.7.12) можно придать вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b (V_j V_k \mu + \frac{\partial V_j}{\partial x} \frac{\partial V_k}{\partial x} j_z) dx \left(\frac{d^2 g_k}{dt^2} + \lambda_k g_k \right) = \\ = - \int_a^b V_j \mu dx (w_{0y} - g_y) - \int_a^b (x V_j \mu + \frac{\partial V_j}{\partial x} j_z) dx \frac{d \omega_z}{dt} +$$

$$\begin{aligned}
& + \alpha \int_a^b V_j c dx + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \int_a^b V_j \frac{\partial V_k}{\partial x} c dx + \right. \\
& + P \left[\left(\frac{\partial V_k}{\partial x} \right)_{x=x_T} \int_a^b V_j \delta(x, x_T) dx - \right. \\
& \left. \left. - (V_k)_x = x_T \int_a^b \frac{\partial V_j}{\partial x} \delta(x, x_T) dx \right] \right\} g_k + \\
& + F_{y \text{упр}} \int_a^b V_j \delta(x, x_y) dx + M_{z \text{упр}}^{(0)} \int_a^b \frac{\partial V_j}{\partial x} \delta(x, x_y) dx,
\end{aligned}$$

или в соответствии с равенствами (4.5.30) – (4.5.32)

$$\begin{aligned}
& \int_a^b [V_j^2 \mu + (\frac{\partial V_j}{\partial x})^2 j_z] dx \left(\frac{d^2 g_j}{dt^2} + \lambda_j g_j \right) = \alpha \int_a^b V_j c dx + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \int_a^b V_j \frac{\partial V_k}{\partial x} c dx + P \left[\left(\frac{\partial V_k}{\partial x} \right)_{x=x_T} \int_a^b V_j \delta(x, x_T) dx - \right. \right. \\
& \left. \left. - (V_k)_x = x_T \int_a^b \frac{\partial V_j}{\partial x} \delta(x, x_T) dx \right] \right\} g_k + F_{y \text{упр}} \int_a^b V_j \delta(x, x_y) dx + \\
& + M_{z \text{упр}}^{(0)} \int_a^b \frac{\partial V_j}{\partial x} \delta(x, x_y) dx. \tag{4.7.21}
\end{aligned}$$

Пользуясь формулой (4.4.28) и равенством (4.5.26), можно привести уравнение (4.7.21) к виду

$$\begin{aligned}
& \int_a^b [V_j^2 \mu + (\frac{\partial V_j}{\partial x})^2 j_z] dx \left(\frac{d^2 g_j}{dt^2} + \omega_j^2 g_j \right) = \alpha \int_a^b V_j c dx + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\int_a^b V_j \frac{\partial V_k}{\partial x} c dx + P(V_j \frac{\partial V_k}{\partial x} - V_k \frac{\partial V_j}{\partial x})_{x=x_T} \right] g_k + \\
& + (V_j)_x = x_y F_{y \text{упр}} + \left(\frac{\partial V_j}{\partial x} \right)_{x=x_y} M_{z \text{упр}}^{(0)}, \\
& \text{или } m_j \left(\frac{d^2 g_j}{dt^2} + \omega_j^2 g_j \right) = \alpha \int_a^b V_j c dx - \sum_{k=1}^{\infty} c_{jk} g_k +
\end{aligned}$$

$$+ (V_j)_x = x_y F_{y \text{ упр}} + \left(\frac{\partial V_j}{\partial x} \right)_{x=x_y} M_{z \text{ упр}}^{(0)}, \quad (4.7.22)$$

где $m_j = \int_a^b [V_j^2 \mu + (\frac{\partial V_j}{\partial x})^2 j_z] dx;$

$$c_{jk} = P(V_k \frac{\partial V_j}{\partial x} - V_j \frac{\partial V_k}{\partial x})_{x=x_T} - \int_a^b V_j \frac{\partial V_k}{\partial x} c dx. \quad (4.7.23)$$

Уравнение (4.7.22) можно трактовать как дифференциальное уравнение вынужденных колебаний корпуса ракеты, вызываемых аэродинамическими силами, управляющими силами и нагрузками, возникающими вследствие влияния изгиба корпуса на аэродинамические и реактивные силы. Если не учитывать влияние изгиба корпуса ракеты на линию действия суммарной тяги двигателей, дифференциальное уравнение вынужденных колебаний (4.7.22) при отсутствии аэродинамических и управляющих сил будет вырождаться в дифференциальное уравнение собственных колебаний (4.5.27).

Уравнение вынужденных колебаний (4.7.22) получено нами без учета рассеяния энергии, возникающего в процессе колебаний. В § 4.5 было указано, что рассеяние энергии, сопровождающее колебания корпуса ракеты, можно учесть, заменяя уравнение собственных колебаний (4.5.27) дифференциальным уравнением (4.5.35). Аналогично можно учесть рассеяние энергии в уравнении вынужденных колебаний (4.7.22), заменяя его дифференциальным уравнением

$$m_j \left(\frac{d^2 g_j}{dt^2} + \eta \omega_j \frac{dg_j}{dt} + \omega_j^2 g_j \right) = \alpha \int_a^b V_j c dx - \sum_{k=1}^{\infty} c_{jk} g_k +$$

$$+ (V_j)_x = x_y F_{y \text{ упр}} + \left(\frac{\partial V_j}{\partial x} \right)_{x=x_y} M_{z \text{ упр}}^{(0)}. \quad (4.7.24)$$

Объединяя уравнения вынужденных колебаний корпуса ракеты, соответствующие различным тонам, и присоединяя к этой бесконечной системе дифференциальных уравнений уравнения сил и моментов (4.7.7), получим уравнения

$$m(w_{0y} - g_y) + \sum_{k=1}^{\infty} c_{yk} g_k = F_y;$$

$$J_z \frac{d\omega_z}{dt} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{\vartheta k} g_k = M_z; \quad (4.7.25)$$

$$m_j \left(\frac{d^2 g_j}{dt^2} + \eta \omega_j \frac{dg_j}{dt} + \omega_j^2 g_j \right) + \sum_{k=1}^{\infty} c_{jk} g_k = \quad (4.7.25)$$

$$= \alpha \int_a^b V_j c dx + (V_j)_x \Big|_{x=y} F_y \text{упр} + \left(\frac{\partial V_j}{\partial x} \right)_{x=x_y} M_z^{(0)} \text{упр},$$

$$j = 1, 2, \dots$$

Бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений (4.7.25) определяет движение, совершающее подвижной системой координат $OXYZ$, и бесконечную последовательность функций $g_1(t), g_2(t), \dots$. Прогиб корпуса ракеты $v(x, t)$, возникающий в процессе изгибных колебаний в плоскости тангажа, можно определить по функциям $g_j(t)$, $j = 1, 2, \dots$, суммируя ряд (4.7.6).

§ 4.8. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ В ПЛОСКОСТИ ТАНГАЖА, УЧИТЫВАЮЩИЕ УПРУГОСТЬ КОРПУСА РАКЕТЫ

Переходя к построению дифференциальных уравнений возмущенного движения, обозначим через g_1, g_2, \dots функции времени, определяющие изгибные колебания корпуса ракеты, соответствующие невозмущенному движению, и через g'_1, g'_2, \dots — функции времени, определяющие изгибные колебания корпуса, возникающие в процессе возмущенного движения ракеты. В гл. 1 исходя из уравнений сил и моментов

$$m(w_{0y} - g_y) = F_y; \quad J_z \frac{d\omega_z}{dt} = M_z \quad (4.8.1)$$

были получены уравнения возмущенного движения ракеты в плоскости тангажа (1.13.5).

Сравнивая два первых уравнения системы (4.7.25) с (4.8.1) и учитывая уравнения (1.13.5), нетрудно записать уравнения возмущенного движения в плоскости тангажа с учетом упругости корпуса ракеты:

$$m \frac{d\Delta V_y}{dt} + v_y \frac{d\Delta \vartheta}{dt} + c_{yy} \Delta V_y + c_{y\vartheta} \Delta \vartheta + \sum_{k=1}^{\infty} c_{yk} \Delta g_k = c_{y\delta} \Delta \delta_\vartheta + \Delta F_y, \quad (4.8.2)$$

$$J_z \frac{d^2 \Delta \vartheta}{dt^2} + \mu_z \frac{d\Delta \vartheta}{dt} + c_{\vartheta y} \Delta V_y + c_{\vartheta \vartheta} \Delta \vartheta +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} c_{\vartheta k} \Delta g_k = c_{\vartheta \delta} \Delta \delta_\vartheta + \Delta M_z, \quad (4.8.3)$$

$$\Delta g_k = g'_k - g_k \quad (4.8.4)$$

(малыми изменениями, которые могут претерпевать коэффициенты c_{yk} и $c_{\vartheta k}$ при переходе от невозмущенного движения к возмущенному, можно пренебречь, так как эти коэффициенты в уравнениях (4.7.25) умножаются на функции g_k , являющиеся малыми в соответствии с предполагаемой нами малостью изгибных колебаний корпуса ракеты).

Согласно (4.7.25) функции g'_j , $j = 1, 2, \dots$ будут определяться уравнениями

$$\begin{aligned} m_j \left(\frac{d^2 g'_j}{dt^2} + \eta \omega_j \frac{dg'_j}{dt} + \omega_j^2 g'_j \right) + \sum_{k=1}^{\infty} c_{jk} g'_k &= \\ = \alpha' \int_a^b V'_j c' dx + (V'_j)_x = x_y F'_{y' \text{упр}} &+ \left(\frac{\partial V'_j}{\partial x} \right)_x = x_y M_{z \text{упр}}^{(0)'}, \\ j = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (4.8.5)$$

где α' , c' , V'_j , $F'_{y' \text{упр}}$ и $M_{z \text{упр}}^{(0)'}$ – функции, определяющие угол атаки α , коэффициент c , форму изгибных колебаний V_j , управляющую силу $F_{y \text{упр}}$ и управляющий момент $M_{z \text{упр}}^{(0)}$ для случая возмущенного движения ракеты (ввиду предполагаемой малости функций g_j , dg_j/dt и $d^2 g_j/dt^2$, $j = 1, 2, \dots$ малыми изменениями, которым могут подвергаться коэффициенты при этих функциях в случае перехода от невозмущенного движения к возмущенному, можно пренебречь). Полагая в (4.8.5)

$$\begin{aligned} g'_j &= g_j + \Delta g_j, \quad j = 1, 2, \dots; \quad \alpha' = \alpha + \Delta \alpha; \quad c' = c + \Delta c; \\ V'_j &= V_j + \Delta V_j, \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.8.6)$$

и пренебрегая произведениями малых величин $\Delta \alpha$, ΔV_j ,

$$\partial \Delta V_j / \partial x, \quad j = 1, 2, \dots, \Delta c, \quad F'_{y' \text{упр}} - F_{y \text{упр}} \quad \text{и}$$

$M_{z \text{упр}}^{(0)'}$ – $M_{z \text{упр}}^{(0)}$, получим

$$\begin{aligned} m_j \left(\frac{d^2 g_j}{dt^2} + \eta \omega_j \frac{dg_j}{dt} + \omega_j^2 g_j \right) + \sum_{k=1}^{\infty} c_{jk} g_k + m_j \left(\frac{d^2 \Delta g_j}{dt^2} + \right. \\ \left. + \eta \omega_j \frac{d \Delta g_j}{dt} + \omega_j^2 \Delta g_j \right) + \sum_{k=1}^{\infty} c_{jk} \Delta g_k &= (\alpha + \Delta \alpha) \int_a^b V_j c dx + \\ + \alpha \int_a^b \Delta V_j c dx + \alpha \int_a^b V_j \Delta c dx + (V_j)_x = x_y F'_{y' \text{упр}} &+ \end{aligned}$$

$$+ (\Delta V_j)_x = x_y F_{y \text{упр}} + \left(\frac{\partial V_j}{\partial x} \right)_{x=x_y} M_{z \text{упр}}^{(0)'} + \left(\frac{\partial \Delta V_j}{\partial x} \right)_{x=x_y} \times \\ \times M_{z \text{упр}}^{(0)}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (4.8.7)$$

Согласно (4.7.25) уравнениям (4.8.7) можно придать вид

$$m_j \left(\frac{d^2 \Delta g_j}{dt^2} + \eta \omega_j \frac{d \Delta g_j}{dt} + \omega_j^2 \Delta g_j \right) + \sum_{k=1}^{\infty} c_{jk} \Delta g_k = \\ = \Delta \alpha \int_a^b V_j c dx + (V_j)_x = x_y F'_{y \text{упр}} + \left(\frac{\partial V_j}{\partial x} \right)_{x=x_y} M_{z \text{упр}}^{(0)'} + \\ + \alpha \int_a^b \Delta V_j c dx + \alpha \int_a^b V_j \Delta c dx + [(\Delta V_j)_x = x_y - \\ - (V_j)_x = x_y] F_{y \text{упр}} + \left[\left(\frac{\partial \Delta V_j}{\partial x} \right)_{x=x_y} - \left(\frac{\partial V_j}{\partial x} \right)_{x=x_y} \right] M_{z \text{упр}}^{(0)}, \\ j = 1, 2, \dots \quad (4.8.8)$$

Пользуясь матрицей перехода (1.12.5) и приближенными равенствами $\alpha = -v_{0y}/v_{0x}$, $\alpha' = -v'_{0y'}/v_{0x}$, $v'_{0y} - v_{0y} \cong \Delta V_y$, найдем

$$\Delta \alpha = \alpha' - \alpha = - \frac{v'_{0y'} - v_{0y}}{v_{0x}} = - \frac{v'_{0y} - v_{0x} \Delta \vartheta - v_{0y}}{v_{0x}} = \\ = \Delta \vartheta - \frac{\Delta V_y}{v_{0x}}. \quad (4.8.9)$$

В соответствии с равенством (4.8.9) уравнения (4.8.8) можно привести к виду

$$m_j \left(\frac{d^2 \Delta g_j}{dt^2} + \eta \omega_j \frac{d \Delta g_j}{dt} + \omega_j^2 \Delta g_j \right) + \sum_{k=1}^{\infty} c_{jk} \Delta g_k + \\ + c_{jy} \Delta V_y + c_{j\vartheta} \Delta \vartheta = (V_j)_x = x_y F'_{y \text{упр}} + \\ + \left(\frac{\partial V_j}{\partial x} \right)_{x=x_y} M_{z \text{упр}}^{(0)'} + \Delta F_j, \quad j = 1, 2, \dots \quad (4.8.10)$$

$$\text{где } c_{jy} = \frac{1}{v_{0x}} \int_a^b V_j c dx, \quad c_{j\vartheta} = - \int_a^b V_j c dx; \quad (4.8.11)$$

$$\begin{aligned}
\Delta F_j = & \alpha \int_a^b \Delta V_j c dx + \alpha \int_a^b V_j \Delta c dx + [(\Delta V_j)_x = x_y - \\
& - (V_j)_x = x_y] F_{y \text{ упр}} + \left[\left(\frac{\partial \Delta V_j}{\partial x} \right)_{x=x_y} - \right. \\
& \left. - \left(\frac{\partial V_j}{\partial x} \right)_{x=x_y} \right] M_{z \text{ упр}}^{(0)}. \tag{4.8.12}
\end{aligned}$$

В том случае, когда исполнительные органы системы управления формируют управляющую силу

$$F'_{y \text{ упр}} = c_{y\delta} \Delta \delta_\vartheta, \quad M_{z \text{ упр}}^{(0)'} = 0. \tag{4.8.13}$$

Если исполнительные органы создают сосредоточенный управляющий момент, то

$$F'_{y \text{ упр}} = 0, \quad M_{z \text{ упр}}^{(0)'} = M'_{z \text{ упр}} = c_{\vartheta\delta} \Delta \delta_\vartheta. \tag{4.8.14}$$

Таким образом, уравнениям (4.8.10) можно придать вид

$$m_j \left(\frac{d^2 \Delta g_j}{dt^2} + \eta \omega_j \frac{d \Delta g_j}{dt} + \omega_j^2 \Delta g_j \right) + \sum_{k=1}^{\infty} c_{jk} \Delta g_k +$$

$$+ c_{jy} \Delta V_y + c_{j\vartheta} \Delta \vartheta = c_{j\delta} \Delta \delta_\vartheta + \Delta F_j, \quad j = 1, 2, \dots, \tag{4.8.15}$$

$$\text{где } c_{j\delta} = c_{y\delta} (V_j)_{x=x_y} \tag{4.8.16}$$

в том случае, когда исполнительные органы системы управления создают управляющую силу, и

$$c_{j\delta} = c_{\vartheta\delta} \left(\frac{\partial V_j}{\partial x} \right)_{x=x_y} \tag{4.8.17}$$

в том случае, когда исполнительные органы системы управления создают сосредоточенный управляющий момент, т.е. в случае управления рассогласованием тяг.

Объединяя уравнения (4.8.3) и (4.8.15), получим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
m \frac{d \Delta V_y}{dt} + \nu_y \frac{d \Delta \vartheta}{dt} + c_{yy} \Delta V_y + c_{y\vartheta} \Delta \vartheta + \\
+ \sum_{k=1}^{\infty} c_{yk} \Delta g_k = c_{y\delta} \Delta \delta_\vartheta + \Delta F_y;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_z \frac{d^2 \Delta \vartheta}{dt^2} + \mu_z \frac{d \Delta \vartheta}{dt} + c_{\vartheta y} \Delta V_y + c_{\vartheta \vartheta} \Delta \vartheta + \\
+ \sum_{k=1}^{\infty} c_{\vartheta k} \Delta g_k = c_{\vartheta \delta} \Delta \delta_{\vartheta} + \Delta M_z; \\
m_j \left(\frac{d^2 \Delta g_j}{dt^2} + \eta \omega_j \frac{d \Delta g_j}{dt} + \omega_j^2 \Delta g_j \right) + c_{jy} \Delta V_y + \\
+ c_{j\vartheta} \Delta \vartheta + \sum_{k=1}^{\infty} c_{jk} \Delta g_k = c_{j\delta} \Delta \delta_{\vartheta} + \Delta F_j, \quad j = 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{4.8.18}$$

Дифференциальные уравнения возмущенного движения (4.8.18) определяют возмущения ΔV_y , $\Delta \vartheta$ и Δg_j , $j = 1, 2, \dots$ по заданной функции $\Delta \delta_{\vartheta}(t)$, описывающей работу исполнительных органов системы управления, и по заданным функциям $\Delta F_y(t)$, $\Delta M_z(t)$ и $\Delta F_j(t)$, $j = 1, 2, \dots$, определяющим возмущающую силу, возмущающий момент и последовательность так называемых приведенных возмущающих сил.

Зная формы собственных изгибных колебаний корпуса ракеты, можно определить так называемые приведенные массы m_j , $j = 1, 2, \dots$ и коэффициенты дифференциальных уравнений возмущенного движения c_{yj} , $c_{\vartheta j}$, c_{jy} , $c_{j\vartheta}$, $j = 1, 2, \dots$ и c_{jk} , $j = 1, 2, \dots$, $k = 1, 2, \dots$ по формулам (4.7.8), (4.7.23) и (4.7.11). Если исполнительные органы системы управления формируют управляющую силу, для расчета коэффициентов $c_{j\delta}$, $j = 1, 2, \dots$ следует пользоваться формулой (4.8.16), в случае управления рассогласованием тяг коэффициенты $c_{j\delta}$, $j = 1, 2, \dots$ следует рассчитывать по формуле (4.8.17).

§ 4.9. РАСЧЕТ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК РАКЕТЫ КАК ОБЪЕКТА АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ МЕТОДОМ СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ

При исследовании устойчивости движения ракеты с учетом упругости ее корпуса применяются обычно те же частотные методы, что и при анализе стабилизации жидких компонентов топлива.

Переходя к рассмотрению частотных характеристик ракеты, учитывающих упругость ее корпуса, определим сначала влияние, которое оказывают изгибные колебания ракеты на входной сигнал автомата стабилизации. Вследствие изгибных колебаний корпуса гироприбор, предназначенный для измерения возмущения угла тангажа $\Delta \vartheta$, в действительности регистрирует угол $\Delta \vartheta^*$, складывающийся из возмущения $\Delta \vartheta$, соответствующего недеформированному состоянию корпуса ракеты, и дополнительного угла поворота гироприбора, возникающего при изгибе корпуса.

Как видно из рис. 4.1, при малых изгибных колебаниях этот дополнитель-

тельный угол поворота можно считать равным частной производной $\partial v / \partial x$, вычисленной для поперечного сечения ракеты, в котором расположен гироприбор. Обозначая абсциссу этого сечения через x_Γ , получим для входного сигнала автомата стабилизации $\Delta\vartheta^*$ выражение

$$\Delta\vartheta^* = \Delta\vartheta + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{x=x_\Gamma}. \quad (4.9.1)$$

При рассмотрении возмущенного движения ракеты в разложении (4.7.6) функции $g_1(t), g_2(t), \dots$ надо заменить функциями $g'_1(t), g'_2(t), \dots$, соответствующими случаю возмущенного движения. Полагая в (4.9.1)

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} g'_k(t) V_k(x, t), \quad (4.9.2)$$

получим для входного сигнала автомата стабилизации $\Delta\vartheta^*$ разложение

$$\Delta\vartheta^* = \Delta\vartheta + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\partial V_k}{\partial x} \right)_{x=x_\Gamma} g'_k,$$

или согласно (4.8.4)

$$\Delta\vartheta^* = \Delta\vartheta + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\partial V_k}{\partial x} \right)_{x=x_\Gamma} \Delta g_k + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\partial V_k}{\partial x} \right)_{x=x_\Gamma} g_k \quad (4.9.3)$$

(ввиду предполагаемой нами малости функций g'_k , $k = 1, 2, \dots$ в разложении (4.9.2) можно пренебречь малыми изменениями функций V_k , $k = 1, 2, \dots$, которые могут возникать при переходе от невозмущенного движения ракеты к возмущенному).

В соответствии с формулой (4.9.3) входной сигнал автомата стабилизации, порождаемый возмущениями $\Delta\vartheta$, Δg_1 , Δg_2 , ..., может быть представлен в виде ряда

$$\Delta\vartheta^* = \Delta\vartheta + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\partial V_k}{\partial x} \right)_{x=x_\Gamma} \Delta g_k \quad (4.9.4)$$

(в формуле (4.9.3) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\partial V_k}{\partial x} \right)_{x=x_\Gamma} g_k$ определяет входной сигнал автомата стабилизации, порождаемый изгибом конструкции ракеты при невозмущенном ее движении).

При исследовании устойчивости движения ракеты в окрестности момента времени $t = \tau$ будем по-прежнему пользоваться методом "замороженных" коэффициентов, заменяя переменные коэффициенты дифференциальных уравнений возмущенного движения (4.8.18) их частными зна-

чениями, соответствующими моменту времени $t = \tau$. В формуле (4.9.4) переменные коэффициенты $(\partial V_k / \partial x)_x = x_\Gamma$, $k = 1, 2, \dots$ тоже заменим их значениями, рассчитанными для момента времени $t = \tau$. Для определения частотных характеристик ракеты как объекта автоматического регулирования надо положить в уравнениях возмущенного движения (4.8.18)

$$\Delta F_y = 0, \quad \Delta M_z = 0, \quad \Delta F_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots,$$

$$\Delta \delta_\vartheta = e^{i\omega t}, \quad (4.9.5)$$

отыскать из полученных уравнений возмущения ΔV_y , $\Delta \vartheta$, Δg_1 , $\Delta g_2, \dots$ и определить затем по формуле (4.9.4) входной сигнал автомата стабилизации $\Delta \vartheta^*$, соответствующий случаю (4.9.5). Подставляя (4.9.5) в (4.8.18) и отыскивая решение полученных уравнений в виде

$$\begin{aligned} \Delta V_y &= V_y e^{i\omega t}, \quad \Delta \vartheta = \theta e^{i\omega t}, \quad \Delta g_j = G_j e^{i\omega t}, \\ j &= 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (4.9.6)$$

получим для коэффициентов V_y , θ и G_j , $j = 1, 2, \dots$ бесконечную систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} (c_{yy} + i\omega m) V_y + (i\omega v_y + c_{y\vartheta}) \theta + \sum_{k=1}^{\infty} c_{yk} G_k &= c_{y\delta}; \\ c_{\vartheta y} V_y + (c_{\vartheta\vartheta} + i\omega \mu_z - \omega^2 J_z) \theta + \sum_{k=1}^{\infty} c_{\vartheta k} G_k &= c_{\vartheta\delta}; \\ m_j (\omega_j^2 + i\eta \omega \omega_j - \omega^2) G_j + c_{jy} V_y + c_{j\vartheta} \theta + \sum_{k=1}^{\infty} c_{jk} G_k &= \\ = c_{j\delta}, \quad j &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.9.7)$$

Согласно (4.9.4) и (4.9.6) в рассматриваемом случае будет иметь место равенство

$$\Delta \vartheta^* = \theta^*(\omega) e^{i\omega t}, \quad (4.9.8)$$

$$\text{где } \theta^*(\omega) = \theta(\omega) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\partial V_k}{\partial x} \right)_{x=x_\Gamma} G_k(\omega). \quad (4.9.9)$$

Обозначая через $\theta_1^*(\omega)$ и $\theta_2^*(\omega)$ действительную и мнимую части комплексно-значной функции $\theta^*(\omega)$ и полагая

$$\theta_1^*(\omega) = k_o(\omega) \cos \varphi_o(\omega), \quad \theta_2^*(\omega) = k_o(\omega) \sin \varphi_o(\omega), \quad (4.9.10)$$

можно привести равенство (4.9.8) к виду

$$\Delta \vartheta^* = k_o(\omega) e^{i[\omega t + \varphi_o(\omega)]}. \quad (4.9.11)$$

Функции $k_o(\omega)$ и $\varphi_o(\omega)$ определяют соответственно амплитудно-частотную и фазово-частотную характеристики ракеты как объекта автоматического регулирования. Согласно (4.9.10) функции $k_o(\omega)$ и $\varphi_o(\omega)$ могут быть найдены по формулам

$$k_o(\omega) = \sqrt{[\theta_1^*(\omega)]^2 + [\theta_2^*(\omega)]^2} ;$$

$$\varphi_o(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\theta_2^*(\omega)}{\theta_1^*(\omega)} . \quad (4.9.12)$$

Таким образом, расчет частотных характеристик ракеты как регулируемого объекта сводится к определению функций $\theta(\omega)$ и $G_j(\omega)$, $j = 1, 2, \dots$ из бесконечной системы алгебраических уравнений (4.9.7) и к суммированию ряда (4.9.9). Решение бесконечной системы уравнений (4.9.7) можно отыскать изложенным ниже методом последовательных приближений, обладающим быстрой сходимостью.

Введя обозначения

$$c_{y\delta}^* = c_{y\delta} - \sum_{k=1}^{\infty} c_{yk} G_k; \quad c_{\vartheta\delta}^* = c_{\vartheta\delta} - \sum_{k=1}^{\infty} c_{\vartheta k} G_k;$$

$$c_{j\delta}^* = c_{j\delta} - c_{jy} V_y - c_{j\vartheta} \theta - \sum_{k=1}^{\infty} c_{jk} G_k; \quad j = 1, 2, \dots, \quad (4.9.13)$$

можно привести уравнения (4.9.7) к виду

$$(c_{yy} + i\omega m) V_y + (c_{y\vartheta} + i\omega \nu_y) \theta = c_{y\delta}^*;$$

$$c_{\vartheta y} V_y + (c_{\vartheta\vartheta} + i\omega \mu_z - \omega^2 J_z) \theta = c_{\vartheta\delta}^*; \quad (4.9.14)$$

$$m_j (\omega_j^2 + i\eta \omega \omega_j - \omega^2) G_j = c_{j\delta}^*, \quad j = 1, 2, \dots$$

Согласно (4.9.14) должны иметь место равенства

$$V_y = \frac{-(c_{y\vartheta} + i\omega \nu_y) c_{\vartheta\delta}^* + (c_{\vartheta\vartheta} + i\omega \mu_z - \omega^2 J_z) c_{y\delta}^*}{(c_{yy} + i\omega m)(c_{\vartheta\vartheta} + i\omega \mu_z - \omega^2 J_z) - c_{\vartheta y} (c_{y\vartheta} + i\omega \nu_y)} ;$$

$$\theta = \frac{(c_{yy} + i\omega m) c_{\vartheta\delta}^* - c_{\vartheta y} c_{y\delta}^*}{(c_{yy} + i\omega m)(c_{\vartheta\vartheta} + i\omega \mu_z - \omega^2 J_z) - c_{\vartheta y} (c_{y\vartheta} + i\omega \nu_y)} ; \quad (4.9.15)$$

$$G_j = \frac{c_{j\delta}^*}{m_j (\omega_j^2 + i\eta \omega \omega_j - \omega^2)}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Подставляя (4.9.15) в (4.9.13), получим уравнения

$$\begin{aligned}
c_{y\delta}^* &= c_{y\delta} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{yk} c_{k\delta}^*}{m_k(\omega_k^2 + i\eta\omega\omega_k - \omega^2)} ; \\
c_{\vartheta\delta}^* &= c_{\vartheta\delta} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{\vartheta k} c_{k\delta}^*}{m_k(\omega_k^2 + i\eta\omega\omega_k - \omega^2)} ; \\
c_{j\delta}^* &= c_{j\delta} - \frac{[c_{j\vartheta}(c_{yy} + i\omega m) - c_{jy}(c_{y\vartheta} + i\omega\nu_y)]c_{\vartheta\delta}^*}{(c_{yy} + i\omega m)(c_{\vartheta\vartheta} + i\omega\mu_z - \omega^2 J_z) - c_{\vartheta y}(c_{y\vartheta} + i\omega\nu_y)} - \\
&- \frac{[c_{jy}(c_{\vartheta\vartheta} + i\omega\mu_z - \omega^2 J_z) - c_{j\vartheta} c_{\vartheta y}]c_{y\delta}^*}{(c_{yy} + i\omega m)(c_{\vartheta\vartheta} + i\omega\mu_z - \omega^2 J_z) - c_{\vartheta y}(c_{y\vartheta} + i\omega\nu_y)} - \\
&- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{jk} c_{k\delta}^*}{m_k(\omega_k^2 + i\eta\omega\omega_k - \omega^2)} , \quad j = 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{4.9.16}$$

Формулу (4.9.9) согласно (4.9.15) можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned}
\theta^*(\omega) &= \frac{(c_{yy} + i\omega m)c_{\vartheta\delta}^* - c_{\vartheta y}c_{y\delta}^*}{(c_{yy} + i\omega m)(c_{\vartheta\vartheta} + i\omega\mu_z - \omega^2 J_z) - c_{\vartheta y}(c_{y\vartheta} + i\omega\nu_y)} + \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{k\delta}^* \left(\frac{\partial V_k}{\partial x} \right)_{x=x_\Gamma}}{m_k(\omega_k^2 + i\eta\omega\omega_k - \omega^2)} .
\end{aligned} \tag{4.9.17}$$

Коэффициенты $c_{y\delta}^*$, $c_{\vartheta\delta}^*$, $c_{j\delta}^*$, $j = 1, 2, \dots$, определяемые бесконечной системой алгебраических уравнений (4.9.16), обычно мало отличаются от коэффициентов $c_{y\delta}$, $c_{\vartheta\delta}$, $c_{j\delta}$, $j = 1, 2, \dots$. Полагая в первом приближении

$$c_{y\delta}^* = c_{y\delta}, \quad c_{\vartheta\delta}^* = c_{\vartheta\delta}, \quad c_{j\delta}^* = c_{j\delta}, \quad j = 1, 2, \dots \tag{4.9.18}$$

и подставляя (4.9.18) в правые части уравнений (4.9.16), получим для коэффициентов $c_{y\delta}^*$, $c_{\vartheta\delta}^*$, $c_{j\delta}^*$, $j = 1, 2, \dots$ ряды, определяющие уточненные значения указанных коэффициентов. Эти уточненные значения коэффициентов будем рассматривать как вторые их приближения. Рассчитав для заданного значения частоты ω вторые приближения для коэффициентов $c_{y\delta}^*$, $c_{\vartheta\delta}^*$, $c_{j\delta}^*$, $j = 1, 2, \dots$ и подставив их в правые части уравнений (4.9.16), получим для искомых коэффициентов новые ряды, суммирование которых при исходном значении частоты ω дает третье приближение для этих коэффициентов и т.д. Определив указанным методом по-

следовательных приближений коэффициенты $c_{y\delta}^*, c_{\vartheta\delta}^*, c_{\delta\delta}^*$, $j = 1, 2, \dots$, согласно (4.9.17) можно построить разложение, определяющее для принятого в расчете значения частоты ω соответствующее частотное значение функции $\theta^*(\omega)$. Выделив у этого частного значения функции θ^* действительную θ_1^* и мнимую θ_2^* части, можно определить по формулам (4.9.12) коэффициент усиления k_o и фазовый сдвиг φ_o для исходного значения частоты ω . Осуществляя указанный расчет для ряда последовательных значений частоты, находят искомые частотные характеристики ракеты как объекта автоматического регулирования.

Описанный в этом параграфе метод расчета частотных характеристик требует суммирования числовых рядов, входящих в уравнения (4.6.19) и в формулу (4.9.17). В следующем параграфе приводится метод расчета частотных характеристик ракеты, не требующий определения форм и частот собственных изгибных колебаний ракеты и суммирования числовых рядов.

§ 4.10. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК РАКЕТЫ КАК РЕГУЛИРУЕМОГО ОБЪЕКТА ИЗ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Переходя к изложению второго метода расчета частотных характеристик ракеты как регулируемого объекта, заметим предварительно, что в выражениях $\omega_j^2 + i\eta\omega_j - \omega^2$, $j = 1, 2, \dots$, входящих в уравнения (4.9.7), каждое из слагаемых $i\eta\omega_j$ ввиду малости коэффициента η играет роль лишь при значениях частоты ω , близких к соответствующей частоте ω_j . В связи с этим практически без ущерба для точности определения искомых частотных характеристик в уравнениях (4.9.7) выражения

$$\omega_j^2 + i\eta\omega_j - \omega^2, \quad j = 1, 2, \dots \quad (4.10.1)$$

можно заменить выражениями

$$\omega_j^2 + i\eta\omega_j^2 - \omega^2, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (4.10.2)$$

или

$$\omega_j^{*2} - \omega^2, \quad j = 1, 2, \dots,$$

где

$$\omega_j^{*2} = (1 + i\eta)\omega_j^2, \quad j = 1, 2, \dots \quad (4.10.3)$$

уравнения (4.9.7) при этом примут вид

$$(c_{yy} + i\omega m) V_y + (c_{y\vartheta} + i\omega v_y) \theta + \sum_{k=1}^{\infty} c_{yk} G_k = c_{y\delta}; \quad (4.10.4)$$

$$c_{\vartheta y} V_y + (c_{\vartheta\vartheta} + i\omega \mu_z - \omega^2 J_z) \theta + \sum_{k=1}^{\infty} c_{\vartheta k} G_k = c_{\vartheta\delta};$$

$$m_j(\omega_j^{*2} - \omega^2)G_j + c_{jy}V_y + c_{j\vartheta}\theta + \sum_{k=1} \ c_{jk}G_k = c_{j\delta}, \\ j = 1, 2, \dots \quad (4.10.4)$$

Как будет показано ниже, частотные характеристики, определяемые уравнениями (4.10.4) и формулами (4.9.9) и (4.9.12), можно построить, не прибегая к решению бесконечной системы алгебраических уравнений (4.9.16) и к суммированию ряда, входящего в формулу (4.9.9).

При отсутствии демпфирования, т.е. при $\eta = 0$ фиктивные комплексные частоты ω_j^* , входящие в уравнения (4.10.4), согласно (4.10.3) переходят в реальные вещественные частоты собственных изгибных колебаний корпуса ракеты ω_j . Метод расчета частотных характеристик, излагаемый в этом параграфе, мы рассмотрим сначала для частного случая $\eta = 0$, после этого укажем прием, позволяющий учесть при определении искомых частотных характеристик демпфирование, характеризуемое заданным значением коэффициента η .

Дифференциальные уравнения возмущенного движения (4.8.18) были получены путем преобразования уравнений движения ракеты в плоскости тангажа (4.4.35) в бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, образуемую уравнениями (4.7.7) и (4.7.22), с учетом затем демпфирования путем перехода от уравнений (4.7.22) к уравнениям (4.7.24). Без учета демпфирования дифференциальные уравнения возмущенного движения ракеты в плоскости тангажа можно получить, непосредственно осуществляя переход от невозмущенного движения к возмущенному в исходных уравнениях движения (4.4.35).

Обозначим через $v'(x, t)$ прогиб корпуса ракеты, соответствующий возмущенному ее движению, и через $\Delta v(x, t)$ разность между прогибом $v'(x, t)$ и прогибом $v(x, t)$, соответствующим невозмущенному движению,

$$\Delta v = v' - v. \quad (4.10.5)$$

Согласно (4.4.35) при учете упругости корпуса ракеты уравнения сил и моментов (4.8.2), (4.8.3), построенные на основе уравнений движения (4.13.5), примут вид

$$m \frac{d\Delta V_y}{dt} + c_{yy}\Delta V_y + v_y \frac{d\Delta \vartheta}{dt} + c_{y\vartheta}\Delta \vartheta - \\ - \int_a^b \frac{\partial \Delta v}{\partial x} c dx - P\left(\frac{\partial \Delta v}{\partial x}\right)_{x=x_T} = c_{y\delta}\Delta \delta_\vartheta + \Delta F_y; \\ J_z \frac{d^2 \Delta \vartheta}{dt^2} + \mu_z \frac{d\Delta \vartheta}{dt} + c_{\vartheta y}\Delta V_y + c_{\vartheta \vartheta}\Delta \vartheta - \\ - \int_a^b \frac{\partial \Delta v}{\partial x} cx dx - P\left(x \frac{\partial \Delta v}{\partial x} - \Delta v\right)_{x=x_T} = c_{\vartheta \delta}\Delta \delta_\vartheta + \Delta M_z. \quad (4.10.6)$$

При переходе от невозмущенного движения ракеты к возмущенному краевая задача для функций v и Q (4.4.35) перейдет в краевую задачу, образуемую дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial^2 v'}{\partial t^2} + \frac{\partial Q'}{\partial x} &= -\mu'(w'_{0y} - g_y') - \mu'x \frac{d\omega_z'}{dt} + c'\alpha' + \\ &+ c \frac{\partial v'}{\partial x} + P\left(\frac{\partial v'}{\partial x}\right)_{x=x_T} \delta(x, x_T) + F'_{y' \text{упр}} \delta(x, x_y); \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(B_y \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2}\right) - j_z \frac{\partial^3 v'}{\partial x \partial t^2} - Q' &= j'_z \frac{d\omega_z'}{dt} + \\ &+ P(v')_{x=x_T} \delta(x, x_T) - M_z^{(0)\prime} \delta(x, x_y) \end{aligned} \quad (4.10.7)$$

и краевыми условиями

$$B_y \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} = 0; \quad Q' = 0 \quad \text{при } x = a \quad \text{и при } x = b. \quad (4.10.8)$$

Штрихами обозначены функции, относящиеся к возмущенному движению ракеты. Коэффициенты при функции v' и ее частных производных везде имеют значения, соответствующие невозмущенному движению, вследствие предположения о малости изгибных колебаний ракеты.

Полагая в (4.10.7) и (4.10.8)

$$\begin{aligned} v' &= v + \Delta v; \quad Q' = Q + \Delta Q; \quad \mu' = \mu + \Delta\mu; \\ c' &= c + \Delta c; \quad \alpha' = \alpha + \Delta\alpha, \end{aligned}$$

пользуясь формулами (3.22.5) и (4.8.9) и пренебрегая малыми величинами высших порядков малости, получим зависимости:

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial Q}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 \Delta v}{\partial t^2} + \frac{\partial \Delta Q}{\partial x} &= -\mu(w_{0y} - g_y) - \\ - \mu x \frac{d\omega_z}{dt} + c(\alpha + \frac{\partial v}{\partial x}) + P\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x=x_T} \delta(x, x_T) - & \\ - \mu \left[\frac{d\Delta V_y}{dt} - (w_{0x} - g_x) \Delta\vartheta \right] - \mu x \frac{d^2 \Delta\vartheta}{dt^2} + & \\ + c(\Delta\vartheta - \frac{\Delta V_y}{v_{0x}}) + c \frac{\partial \Delta v}{\partial x} + P\left(\frac{\partial \Delta v}{\partial x}\right)_{x=x_T} \delta(x, x_T) - & \\ - \Delta\mu(w_{0y} - g_y) - \Delta\mu x \frac{d\omega_z}{dt} + \Delta c\alpha + F'_{y' \text{упр}} \delta(x, x_y); & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(B_y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - j_z \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2} - Q + \frac{\partial}{\partial x} \left(B_y \frac{\partial^2 \Delta v}{\partial x^2} \right) - \\ & - j_z \frac{\partial^3 \Delta v}{\partial x \partial t^2} - \Delta Q = j_z \frac{d \omega_z}{dt} + P(v)_{x=x_T} \delta(x, x_T) + \\ & + j_z \frac{d^2 \Delta \vartheta}{dt^2} + P(\Delta v)_{x=x_T} \delta(x, x_T) + \Delta j_z \frac{d \omega_z}{dt} - M_{z \text{упр}}^{(0)'} \delta(x, x_y); \end{aligned}$$

$$B_y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + B_y \frac{\partial^2 \Delta v}{\partial x^2} = 0; \quad Q + \Delta Q = 0 \quad \text{при } x = a$$

и при $x = b$,

или согласно (4.4.35)

$$\begin{aligned} & \mu \frac{\partial^2 \Delta v}{\partial t^2} + \frac{\partial \Delta Q}{\partial x} = -\mu \left[\frac{d \Delta V_y}{dt} + x \frac{d^2 \Delta \vartheta}{dt^2} - \right. \\ & \left. - (w_{0x} - g_x) \Delta \vartheta \right] + c \left(\frac{\partial \Delta v}{\partial x} + \Delta \vartheta - \frac{\Delta V_y}{v_{0x}} \right) + \\ & + P \left(\frac{\partial \Delta v}{\partial x} \right)_{x=x_T} \delta(x, x_T) + F'_{y \text{упр}} \delta(x, x_y) + \Delta q_y; \\ & \frac{\partial}{\partial x} \left(B_y \frac{\partial^2 \Delta v}{\partial x^2} \right) - j_z \frac{\partial^3 \Delta v}{\partial x \partial t^2} - \Delta Q = j_z \frac{d^2 \Delta \vartheta}{dt^2} + \\ & + P(\Delta v)_{x=x_T} \delta(x, x_T) - M_{z \text{упр}}^{(0)'} \delta(x, x_y) - \Delta m_z; \end{aligned}$$

$$B_y \frac{\partial^2 \Delta v}{\partial x^2} = 0, \quad \Delta Q = 0 \quad \text{при } x = a \text{ и при } x = b, \quad (4.10.9)$$

$$\text{где } \Delta q_y = -\Delta \mu (w_{0y} - g_y + x \frac{d \omega_z}{dt}) + \Delta c \alpha + F_{y \text{упр}} \delta(x, x_y); \quad (4.10.10)$$

$$\Delta m_z = -\Delta j_z \frac{d \omega_z}{dt} - M_{z \text{упр}}^{(0)} \delta(x, x_y).$$

Объединяя уравнения (4.10.6) и (4.10.9), получим уравнения возмущенного движения:

$$\begin{aligned} & m \frac{d \Delta V_y}{dt} + c_{yy} \Delta V_y + \nu_y \frac{d \Delta \vartheta}{dt} + c_{y \vartheta} \Delta \vartheta - \int_a^b \frac{\partial \Delta v}{\partial x} c dx - \\ & - P \left(\frac{\partial \Delta v}{\partial x} \right)_{x=x_T} = c_{y \vartheta} \Delta \delta_\vartheta + \Delta F_y; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_z \frac{d^2 \Delta \vartheta}{dt^2} + \mu_z \frac{d \Delta \vartheta}{dt} + c_{\vartheta y} \Delta V_y + c_{\vartheta \vartheta} \Delta \vartheta - \int_a^b \frac{\partial \Delta v}{\partial x} cx dx - \\
- P(x \frac{\partial \Delta v}{\partial x} - \Delta v)_x = x_T = c_{\vartheta \delta} \Delta \delta_\vartheta + \Delta M_z; \\
\mu \frac{\partial^2 \Delta v}{\partial t^2} + \frac{\partial \Delta Q}{\partial x} + \mu \left[\frac{d \Delta V_y}{dt} + x \frac{d^2 \Delta \vartheta}{dt^2} - (w_{0x} - \right. \\
\left. - g_x) \Delta \vartheta \right] - c \left(\frac{\partial \Delta v}{\partial x} + \Delta \vartheta - \frac{\Delta V_y}{v_{0x}} \right) - P \left(\frac{\partial \Delta v}{\partial x} \right)_x = x_T \times \\
\times \delta(x, x_T) = F'_{y' \text{упр}} \delta(x, x_y) + \Delta q_y; \\
\frac{\partial}{\partial x} \left(B_y \frac{\partial^2 \Delta v}{\partial x^2} \right) - j_z \frac{\partial^3 \Delta v}{\partial x \partial t^2} - \Delta Q - j_z \frac{d^2 \Delta \vartheta}{dt^2} - \\
- P(\Delta v)_x = x_T \delta(x, x_T) = -M_z^{(0)'} \delta(x, x_y) - \Delta m_z; \\
B_y \frac{\partial^2 \Delta v}{\partial x^2} = 0, \quad \Delta Q = 0 \quad \text{при } x = a \quad \text{и при } x = b,
\end{aligned} \tag{4.10.11}$$

определяющие возмущения $\Delta \vartheta(t)$, $\Delta V_y(t)$, $\Delta v(x, t)$ по заданным управляющим воздействиям и возмущающим силам и моментам.

Согласно (4.9.1) возмущения $\Delta V_y(t)$, $\Delta v(x, t)$ будут порождать входной сигнал автомата стабилизации

$$\Delta \vartheta^* = \Delta \vartheta + \left(\frac{\partial \Delta v}{\partial x} \right)_x = x_T. \tag{4.10.12}$$

Таким образом, заменив зависящие от времени коэффициенты уравнений (4.10.11) их значениями, соответствующими моменту времени $t = \tau$, можно рассчитать для этого момента времени искомые частотные характеристики ракеты, положив в (4.10.11)

$$\Delta F_y = 0, \quad \Delta M_z = 0, \quad \Delta q_y = 0, \quad \Delta m_z = 0,$$

$$\Delta \delta_\vartheta = e^{i\omega t}, \tag{4.10.13}$$

определен из полученных уравнений возмущения $\Delta \vartheta$ и Δv и подставив их в (4.10.12).

В соответствии с формулами (4.8.13) и (4.8.14) функции $\Delta \delta_\vartheta$ будут соответствовать равенства

$$F'_{y' \text{упр}} = c_{y\delta} e^{i\omega t}, \quad M_z^{(0)'} = 0 \tag{4.10.14}$$

в том случае, если исполнительные органы системы управления формируют управляющую силу, и равенства

$$F'_{y' \text{ упр}} = 0, \quad M'_{z' \text{ упр}} = c_{\vartheta\delta} e^{i\omega t} \quad (4.10.15)$$

в том случае, если исполнительные органы создают сосредоточенный управляющий момент. Объединяя эти два случая, положим в уравнениях (4.10.11)

$$F'_{y' \text{ упр}} = c_{y\delta} e^{i\omega t}, \quad M'_{z' \text{ упр}} = c_{\vartheta\delta}^{(0)} e^{i\omega t}, \quad (4.10.16)$$

условившись, что в первом случае

$$c_{\vartheta\delta}^{(0)} = 0, \quad (4.10.17)$$

а во втором —

$$c_{y\delta} = 0, \quad c_{\vartheta\delta}^{(0)} = c_{\vartheta\delta}. \quad (4.10.18)$$

Решение уравнений (4.10.11) будем искать в виде

$$\Delta v(x, t) = V(x)e^{i\omega t}; \quad \Delta Q(x, t) = Q(x)e^{i\omega t}; \\ \Delta \vartheta(t) = \theta e^{i\omega t}; \quad \Delta V_y = V_y e^{i\omega t}. \quad (4.10.19)$$

Подставляя (4.10.13), (4.10.16) и (4.10.19) в (4.10.11), получим для функции $V(x)$, $Q(x)$ и для констант θ и V_y следующие уравнения:

$$(c_{yy} + i\omega m) V_y + (c_{y\vartheta} + i\omega v_y) \theta - \int_a^b \frac{dV}{dx} c dx - \\ - P \left(\frac{dV}{dx} \right)_{x=x_T} = c_{y\delta}; \\ c_{\vartheta y} V_y + (c_{\vartheta\vartheta} + i\omega \mu_z - \omega^2 J_z) \theta - \int_a^b \frac{dV}{dx} cx dx - \\ - P \left(x \frac{dV}{dx} - V \right)_{x=x_T} = c_{\vartheta\delta}; \\ - \omega^2 \mu V + \frac{dQ}{dx} + \mu [i\omega V_y - (w_{0x} - g_x + \omega^2 x) \theta] - \\ - c \left(\frac{dV}{dx} + \theta - \frac{V_y}{v_{0x}} \right) - P \left(\frac{dV}{dx} \right)_{x=x_T} \delta(x, x_T) = \\ = c_{y\delta} \delta(x, x_y);$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(B_y \frac{d^2 V}{dx^2} \right) + \omega^2 j_z \frac{dV}{dx} - Q + \omega^2 j_z \theta - \\ - P(V)_{x=x_T} = - c_{\vartheta \delta}^{(0)} \delta(x, x_y); \\ B_y \frac{d^2 V}{dx^2} = 0, \quad Q = 0 \quad \text{при } x = a, \quad \text{при } x = b. \end{aligned} \quad (4.10.20)$$

Согласно (4.10.12) и (4.10.19) в рассматриваемом случае входной сигнал автомата стабилизации будет определяться равенством

$$\Delta \vartheta^* = \theta^* e^{i\omega t}, \quad (4.10.21)$$

$$\text{где } \theta^* = \theta + \left(\frac{dV}{dx} \right)_{x=x_T}. \quad (4.10.22)$$

Таким образом, без учета демпфирования, свойственного изгибным колебаниям корпуса ракеты, т.е. при $\eta = 0$, функцию $\theta^*(\omega)$, определяющую искомые частотные характеристики ракеты, можно построить по формуле (4.10.22), отыскав функцию $V(x)$ и константу θ из уравнений (4.10.20).

Покажем теперь, что наличие демпфирования, определяемого заданным значением коэффициента η , можно учесть, заменив в уравнениях (4.10.20) реальную изгибную жесткость корпуса ракеты $B_y(x)$ фиктивной комплексной жесткостью $B_y^*(x)$:

$$B_y^*(x) = (1 + i\eta) B_y(x). \quad (4.10.23)$$

Для этого нам достаточно доказать, что функция $\theta^*(\omega)$, найденная из соотношений (4.10.20) и (4.10.22), при замене B_y на B_y^* становится тождественной функции $\theta^*(\omega)$, найденной из бесконечной системы алгебраических уравнений (4.10.4) путем суммирования ряда (4.9.9).

Мы показали выше, что функция $v(x, t)$, найденная из исходных уравнений движения (4.4.35), всегда может быть представлена рядом (4.7.6). В соответствии с этим функция $V(x)$, найденная из уравнений (4.10.20), может быть представлена в виде ряда

$$V(x) = \sum_{k=1}^{\infty} G_k V_k(x, \tau) \quad (4.10.24)$$

(уравнения (4.10.20) получены из уравнений возмущенного движения (4.10.11) после замены зависящих от времени коэффициентов системы (4.10.11) их значениями, соответствующими моменту времени $t = \tau$).

Подставляя ряд (4.10.24) в первые два уравнения (4.10.20), согласно (4.7.8) получим

$$(c_{yy} + i\omega m) V_y + (c_{y\delta} + i\omega v_y) \theta + \sum_{k=1}^{\infty} c_{yk} G_k = c_{y\delta};$$

$$c_{\vartheta y} V_y + (c_{\vartheta\vartheta} + i\omega \mu_z - \omega^2 J_z) \theta + \sum_{k=1}^{\infty} c_{\vartheta k} G_k = c_{\vartheta\delta}, \quad (4.10.25)$$

где под c_{yk} и $c_{\vartheta k}$, $k = 1, 2, \dots$ следует понимать значения этих коэффициентов, соответствующие моменту времени $t = \tau$.

Подставляя ряд (4.10.24) в дифференциальные уравнения (4.10.20) и заменяя жесткость B_y жесткостью B_y^* , получим соотношения

$$\begin{aligned} & -\omega^2 \mu \sum_{k=1}^{\infty} G_k V_k + \frac{dQ}{dx} + \mu [i\omega V_y - (w_{0x} - g_x + \omega^2 x) \theta] - \\ & - c \left(\sum_{k=1}^{\infty} G_k \frac{\partial V_k}{\partial x} + \theta - \frac{V_y}{v_{0x}} \right) - P \sum_{k=1}^{\infty} G_k \left(\frac{\partial V_k}{\partial x} \right)_{x=x_T} \times \\ & \times \delta(x, x_T) = c_{y\delta} \delta(x, x_y); \quad (4.10.26) \\ & \sum_{k=1}^{\infty} G_k \left[\frac{\partial}{\partial x} (B_y^* \frac{\partial^2 V_k}{\partial x^2}) + \omega^2 j_z \frac{\partial V_k}{\partial x} \right] - Q + \omega^2 j_z \theta - \\ & - P \sum_{k=1}^{\infty} G_k (V_k)_{x=x_T} \delta(x, x_T) = -c_{\vartheta\delta}^{(0)}(x, x_y), \end{aligned}$$

в которых все функции, зависящие от времени t , заменены их значениями, соответствующими моменту времени $t = \tau$.

Умножив обе части первого уравнения (4.10.26) на V_j и проинтегрировав их по x в пределах от a до b , получим соотношение

$$\begin{aligned} & -\omega^2 \sum_{k=1}^{\infty} G_k \int_a^b V_j V_k \mu dx + \int_a^b V_j \frac{dQ}{dx} dx + [i\omega V_y - (w_{0x} - \\ & - g_x) \theta] \int_a^b V_j \mu dx - \omega^2 \theta \int_a^b V_j \mu x dx - \sum_{k=1}^{\infty} G_k \int_a^b V_j \frac{\partial V_k}{\partial x} c dx - \\ & - (\theta - \frac{V_y}{v_{0x}}) \int_a^b V_j c dx - P \sum_{k=1}^{\infty} G_k \left(\frac{\partial V_k}{\partial x} \right)_{x=x_T} \int_a^b V_j \delta(x, x_T) \times \\ & \times dx = c_{y\delta} \int_a^b V_j \delta(x, x_y) dx. \quad (4.10.27) \end{aligned}$$

Умножив обе части второго уравнения из (4.10.26) на $-\partial V_j / \partial x$ и проинтегрировав их по x в пределах от a до b , получим соотношение

$$\begin{aligned}
& - \sum_{k=1}^{\infty} G_k \int_a^b \frac{\partial V_j}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (B_y^* \frac{\partial^2 V_k}{\partial x^2}) dx = \omega^2 \sum_{k=1}^{\infty} G_k \times \\
& \times \int_a^b \frac{\partial V_j}{\partial x} \frac{\partial V_k}{\partial x} j_z dx + \int_a^b Q \frac{\partial V_j}{\partial x} dx - \omega^2 \theta \int_a^b \frac{\partial V_j}{\partial x} j_z dx + \\
& + P \sum_{k=1}^{\infty} G_k (V_k)_x = x_T \int_a^b \frac{\partial V_j}{\partial x} \delta(x, x_T) dx = \\
& = c_{\vartheta \delta}^{(0)} \int_a^b \frac{\partial V_j}{\partial x} \delta(x, x_y) dx. \tag{4.10.28}
\end{aligned}$$

В соответствии с формулами (4.10.23), (4.10.27) и (4.10.28) должно иметь место равенство

$$\begin{aligned}
& - \omega^2 \sum_{k=1}^{\infty} G_k \int_a^b (V_j V_k \mu + \frac{\partial V_j}{\partial x} \frac{\partial V_k}{\partial x} j_z) dx - \\
& - (1 + i\eta) \sum_{k=1}^{\infty} G_k \int_a^b \frac{\partial V_j}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (B_y \frac{\partial^2 V_k}{\partial x^2}) dx + \\
& + \int_a^b (V_j \frac{dQ}{dx} + Q \frac{\partial V_j}{\partial x}) dx + [i\omega V_y - (w_{0x} - \\
& - g_x) \theta] \int_a^b V_j \mu dx - \omega^2 \theta \int_a^b (V_j \mu x + \frac{\partial V_j}{\partial x} j_z) dx - \\
& - (\theta - \frac{V_y}{v_{0x}}) \int_a^b V_j c dx - \sum_{k=1}^{\infty} G_k \left\{ \int_a^b V_j \frac{\partial V_k}{\partial x} c dx + \right. \\
& + P \left[\left(\frac{dV_k}{dx} \right)_x = x_T \int_a^b V_j \delta(x, x_T) dx - (V_k)_x = x_T \times \right. \\
& \left. \left. \times \int_a^b \frac{\partial V_j}{\partial x} \delta(x, x_T) dx \right] \right\} = c_{y\delta} \int_a^b V_j \delta(x, x_y) dx + \\
& + c_{\vartheta \delta}^{(0)} \int_a^b \frac{\partial V_j}{\partial x} \delta(x, x_y) dx,
\end{aligned}$$

или согласно (4.4.28), (4.5.30), (4.5.31) и (4.7.19)

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^{\infty} G_k [(1 + i\eta)\lambda_k - \omega^2] \int_a^b (V_j V_k \mu - \frac{\partial V_j}{\partial x} \frac{\partial V_k}{\partial x} j_z) dx + \\
 & + \int_a^b (V_j \frac{dQ}{dx} + Q \frac{\partial V_j}{\partial x}) dx - (\theta - \frac{V_y}{v_{0x}}) \int_a^b V_j c dx - \\
 & - \sum_{k=1}^{\infty} G_k [\int_a^b V_j \frac{\partial V_k}{\partial x} c dx + P(V_j \frac{\partial V_k}{\partial x} - V_k \frac{\partial V_j}{\partial x})|_{x=x_T}] = \\
 & = c_{y\delta}(V_j)|_{x=x_Y} + c_{\vartheta\delta}^{(0)}(\frac{\partial V_j}{\partial x})|_{x=x_Y}. \tag{4.10.29}
 \end{aligned}$$

Пользуясь соотношениями (4.5.26) и (4.5.32) и обозначениями (4.7.23) и (4.8.11), равенство (4.10.29) можно привести к виду

$$\begin{aligned}
 & [(1 + i\eta)\omega_j^2 - \omega^2] m_j G_j + \int_a^b (V_j \frac{dQ}{dx} + Q \frac{\partial V_j}{\partial x}) dx + \\
 & + c_{jy} V_y + c_{j\vartheta} \theta + \sum_{k=1}^{\infty} c_{jk} G_k = c_{y\delta}(V_j)|_{x=x_Y} + \\
 & + c_{\vartheta\delta}^{(0)}(\frac{\partial V_j}{\partial x})|_{x=x_Y}. \tag{4.10.30}
 \end{aligned}$$

В соответствии с краевыми условиями для функции Q (4.10.20) должно иметь место равенство

$$\int_a^b (V_j \frac{dQ}{dx} + Q \frac{\partial V_j}{\partial x}) dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} (Q V_j) dx = Q V_j|_{x=a}^{x=b} = 0. \tag{4.10.31}$$

Согласно (4.8.16) и (4.10.17) в том случае, когда исполнительные органы системы управления создают управляющую силу

$$c_{y\delta}(V_j)|_{x=x_Y} + c_{\vartheta\delta}^{(0)}(\frac{\partial V_j}{\partial x})|_{x=x_T} = c_{j\delta}. \tag{4.10.32}$$

Равенство (4.10.32) будет иметь место и в том случае, когда исполнительные органы системы управления создают сосредоточенный управляющий момент, так как в этом случае справедливы (4.8.17) и (4.10.18). Согласно (4.10.3), (4.10.30), (4.10.31) и (4.10.32) коэффициенты ряда (4.10.24) должны удовлетворять уравнениям

$$m_j(\omega_j^{*2} - \omega^2)G_j + c_{jy}V_y + c_{j\delta}\theta + \sum_{k=1}^{\infty} c_{jk}G_k = c_{j\delta}, \\ j = 1, 2, \dots \quad (4.10.33)$$

Бесконечная система алгебраических уравнений, образуемая уравнениями (4.10.25) и (4.10.33), совпадает с бесконечной системой уравнений (4.10.4). Подставляя ряд (4.10.24) в формулу (4.10.22), получим для функции $\theta^*(\omega)$ разложение (4.9.9). Таким образом, заменяя в (4.10.20) жесткость B_y жесткостью B_y^* , решая уравнение (4.10.20) и определяя далее функцию $\theta^*(\omega)$ по формуле (4.10.22), мы получим тот же результат, что и в случае построения этой функции путем решения бесконечной системы уравнений (4.10.4) и суммирования ряда (4.9.9), что и требовалось доказать.

Для определения функции $V(x)$ и константы θ из уравнений (4.10.20) можно воспользоваться следующей расчетной схемой. Дифференциальным уравнениям, входящим в систему (4.10.20), после замены жесткости B_y на B_y^* можно придать вид

$$\begin{aligned} & c \frac{dV}{dx} + \omega^2 \mu V - \frac{dQ}{dx} = f_0(x) + V_y f_1(x) + \theta f_2(x) + \\ & + (V)_x = x_T f_3(x) + \left(\frac{dV}{dx} \right)_{x=x_T} f_4(x); \\ & \frac{d}{dx} (B_y^* \frac{d^2V}{dx^2}) + \omega^2 j_z \frac{dV}{dx} - Q = g_0(x) + V_y g_1(x) + \\ & + \theta g_2(x) + (V)_x = x_T g_3(x) + \left(\frac{dV}{dx} \right)_{x=x_T} g_4(x), \end{aligned} \quad (4.10.34)$$

$$\begin{aligned} \text{где } f_0 &= -c_{y\delta} \delta(x, x_y); \quad f_1 = i\omega\mu + \frac{c}{v_{0x}}; \\ f_2 &= -(w_{0x} - g_x + \omega^2 x)\mu - c; \\ f_3 &= 0; \quad f_4 = -P\delta(x, x_T); \\ g_0 &= -c_{\vartheta\delta}^{(0)} \delta(x, x_y); \quad g_1 = 0; \quad g_2 = -\omega^2 j_z; \\ g_3 &= P\delta(x, x_T); \quad g_4 = 0. \end{aligned} \quad (4.10.35)$$

Краевые условия для функций V и Q , указанные в (4.10.20), при замене жесткости B_y жесткостью B_y^* принимают вид

$$B_y^* \frac{d^2V}{dx^2} = 0; \quad Q = 0 \quad \text{при } x = a \quad \text{и при } x = b. \quad (4.10.36)$$

Введем в рассмотрение функции $V_j(x)$ и $Q_j(x)$, $j = 0, 1, \dots, 4$, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям

$$c \frac{dV_j}{dx} + \omega^2 \mu V_j - \frac{dQ_j}{dx} = f_j(x);$$

$$\frac{d}{dx} (B_y^* \frac{d^2 V_j}{dx^2}) + \omega^2 j_z \frac{dV_j}{dx} - Q_j = g_j(x), \quad (4.10.37)$$

$$j = 0, 1, \dots, 4$$

и краевым условиям

$$B_y^* \frac{d^2 V_j}{dx^2} = 0; \quad Q = 0, \quad j = 0, 1, \dots, 4, \quad \text{при } x = a$$

$$\text{и при } x = b. \quad (4.10.38)$$

Согласно (4.10.37) и (4.10.38) функции

$$V(x) = V_0(x) + V_y V_1(x) + \theta V_2(x) + (V)_x \Big|_{x_T} V_3(x) +$$

$$+ \left(\frac{dV}{dx} \right)_{x=x_T} V_4(x); \quad (4.10.39)$$

$$Q(x) = Q_0(x) + V_y Q_1(x) + \theta Q_2(x) + (V)_x \Big|_{x_T} Q_3(x) +$$

$$+ \left(\frac{dV}{dx} \right)_{x=x_T} Q_4(x)$$

будут образовывать решение системы дифференциальных уравнений (4.10.34), удовлетворяющее краевым условиям (4.10.36). Подставляя функцию $V(x)$ из (4.10.39) в первые два уравнения системы (4.10.20), получим уравнения

$$[c_{yy} + i\omega m - \int_a^b \frac{dV_1}{dx} c dx - P \left(\frac{dV_1}{dx} \right)_{x=x_T}] V_y +$$

$$+ [c_{y\theta} + i\omega v_y - \int_a^b \frac{dV_2}{dx} c dx - P \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} \right)_{x=x_T}] \theta -$$

$$- [\int_a^b \frac{dV_3}{dx} c dx + P \left(\frac{dV_3}{dx} \right)_{x=x_T}] (V)_x \Big|_{x_T} -$$

$$- [\int_a^b \frac{dV_4}{dx} c dx + P \left(\frac{dV_4}{dx} \right)_{x=x_T}] \left(\frac{dV}{dx} \right)_{x=x_T} =$$

$$\begin{aligned}
&= c_{y\delta} + \int_a^b \frac{dV_0}{dx} cx dx + P\left(\frac{dV_0}{dx}\right)_{x=x_T}; \\
&\left[c_{\vartheta y} - \int_a^b \frac{dV_1}{dx} cx dx - P(x \frac{dV_1}{dx} - V_1)_{x=x_T} \right] V_y + \\
&+ \left[c_{\vartheta\vartheta} + i\omega\mu_z - \omega^2 J_z - \int_a^b \frac{dV_2}{dx} cx dx - P(x \frac{dV_2}{dx} - \right. \\
&\left. - V_2)_{x=x_T} \right] \theta - \left[\int_a^b \frac{dV_3}{dx} cx dx + P(x \frac{dV_3}{dx} - \right. \\
&\left. - V_3)_{x=x_T} \right] (V)_{x=x_T} - \left[\int_a^b \frac{dV_4}{dx} cx dx + P(x \frac{dV_4}{dx} - \right. \\
&\left. - V_4)_{x=x_T} \right] \left(\frac{dV}{dx} \right)_{x=x_T} = c_{\vartheta\delta} + \int_a^b \frac{dV_0}{dx} cx dx + \\
&+ P(x \frac{dV_0}{dx} - V_0)_{x=x_T}.
\end{aligned} \tag{4.10.40}$$

Согласно (4.10.39) должны иметь место равенства

$$\begin{aligned}
&(V_1)_{x=x_T} V_y + (V_2)_{x=x_T} \theta + [(V_3)_{x=x_T} - 1] (V)_{x=x_T} + \\
&+ (V_4)_{x=x_T} \left(\frac{dV}{dx} \right)_{x=x_T} = -(V_0)_{x=x_T}; \\
&\left(\frac{dV_1}{dx} \right)_{x=x_T} V_y + \left(\frac{dV_2}{dx} \right)_{x=x_T} \theta + \left(\frac{dV_3}{dx} \right)_{x=x_T} (V)_{x=x_T} + \\
&+ \left[\left(\frac{dV_4}{dx} \right)_{x=x_T} - 1 \right] \left(\frac{dV}{dx} \right)_{x=x_T} = - \left(\frac{dV_0}{dx} \right)_{x=x_T}.
\end{aligned} \tag{4.10.41}$$

Уравнения (4.10.40) и (4.10.41) образуют систему четырех линейных алгебраических уравнений для четырех неизвестных констант

$$V_y, \theta, (V)_{x=x_T} \text{ и } \left(\frac{dV}{dx} \right)_{x=x_T}.$$

Таким образом, расчет искомых частотных характеристик сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$c \frac{dV}{dx} + \omega^2 \mu V - \frac{dQ}{dx} = f(x); \quad (4.10.42)$$

$$\frac{d}{dx} (B_y^* \frac{d^2 V}{dx^2}) + \omega^2 j_z \frac{dV}{dx} - Q = g(x)$$

с краевыми условиями

$$B_y^* \frac{d^2 V}{dx^2} = 0, \quad Q = 0 \quad \text{при } x = a \text{ и при } x = b. \quad (4.10.43)$$

При заданном значении частоты ω , последовательно полагая в (4.10.42) $f(x) = f_j(x)$, $g(x) = g_j(x)$, $j = 0, 1, \dots, 4$, найдем функции $V_j(x)$ и $Q_j(x)$, $j = 0, 1, \dots, 4$, удовлетворяющие уравнениям (4.10.37) и краевым условиям (4.10.38). Определив далее константы V_y , θ , $(V)_x = x_T$ и $dV/dx|_x = x_T$ из уравнений (4.10.40) и (4.10.41) и подставив их значения в первую формулу (4.10.39), найдем функцию $V(x)$. Отыскав затем действительную часть θ_1^* и мнимую часть θ_2^* комплексного числа θ^* , определяемого соотношением (4.10.22), можно вычислить далее по формулам (4.9.12) коэффициент усиления k_o и фазовый сдвиг φ_o для исходного расчетного значения частоты ω . Осуществляя указанный расчет для ряда последовательных значений частоты ω , можно построить, таким образом, амплитудно-частотную и фазово-частотную характеристики ракеты как объекта автоматического регулирования.

Решение неоднородной системы дифференциальных уравнений (4.10.42), удовлетворяющее краевым условиям (4.10.43), можно отыскать, построив четыре линейно независимых частных решения однородной системы дифференциальных уравнений

$$c \frac{dV}{dx} + \omega^2 \mu V - \frac{dQ}{dx} = 0; \quad (4.10.44)$$

$$\frac{d}{dx} (B_y^* \frac{d^2 V}{dx^2}) + \omega^2 j_z \frac{dV}{dx} - Q = 0.$$

Пользуясь методом вариации произвольных постоянных, можно построить по этим частным решениям системы (4.10.44) общее решение системы дифференциальных уравнений (4.10.42); произвольные постоянные будут определяться краевыми условиями (4.10.43).

Метод расчета частотных характеристик ракеты как регулируемого объекта, изложенный в этом параграфе, является менее трудоемким, чем метод, описанный в § 4.9, и обеспечивает более высокую точность расчетов. К методу, приведенному в § 4.9, приходится прибегать при "укорочении" бесконечной системы дифференциальных уравнений возмущенного движения (4.8.18) для исследования устойчивости движения путем электромоделирования с реальной аппаратурой системы управления. "Укорочение"

системы уравнений возмущенного движения (4.8.18) можно считать допустимым, если частотные характеристики, найденные из соответствующим образом "укороченных" уравнений (4.9.7) и из соответствующей частотной суммы ряда (4.9.9), для исследуемого диапазона частот дают погрешности, которые можно считать допустимыми.

§ 4.11. СТАБИЛИЗАЦИЯ ДВИЖЕНИЯ РАКЕТЫ С УЧЕТОМ УПРУГОСТИ ЕЕ КОНСТРУКЦИИ

При рассмотрении вопроса о стабилизации изгибных колебаний корпуса ракеты будем исходить из приближенного построения частотных характеристик ракеты как регулируемого объекта для частот ω , близких к частотам собственных изгибных колебаний корпуса ω_k , $k = 1, 2, \dots$. При частотах ω , близких к частоте ω_j , в разложении (4.9.9) основную роль играет слагаемое

$$(\partial V_j / \partial x)_x = x_\Gamma G_j(\omega),$$

остальными членами этого ряда в рассматриваемом случае практически можно пренебречь. В связи с этим для частот ω , близких к частоте ω_j , приближенно можно положить

$$\theta^*(\omega) = \left(\frac{\partial V_j}{\partial x} \right)_{x=x_\Gamma} G_j(\omega). \quad (4.11.1)$$

Как уже указывалось в § 4.9, коэффициенты $c_{j\delta}^*$, $j = 1, 2, \dots$, входящие в формулы (4.9.15), близки к соответствующим коэффициентам $c_{j\delta}$, $j = 1, 2, \dots$, и приближенно можно положить $c_{j\delta}^* = c_{j\delta}$. В этом случае согласно (4.9.15) будет иметь место равенство

$$G_j(\omega) = \frac{c_{j\delta}}{m_j(\omega_j^2 + i\eta\omega\omega_j - \omega^2)}. \quad (4.11.2)$$

Подставляя (4.11.2) в (4.11.1), получим приближенную формулу для функции $\theta^*(\omega)$

$$\theta^*(\omega) = \frac{c_{j\delta} \left(\frac{\partial V_j}{\partial x} \right)_{x=x_\Gamma}}{m_j(\omega_j^2 + i\eta\omega\omega_j - \omega^2)}. \quad (4.11.3)$$

Разделяя в (4.11.3) действительные и мнимые части комплексных выражений, получим соотношения

$$\theta_1^*(\omega) = \frac{c_{j\delta} \left(\frac{\partial V_j}{\partial x} \right)_{x=x_\Gamma} (\omega_j^2 - \omega^2)}{m_j[(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \eta^2 \omega^2 \omega_j^2]}; \quad (4.11.4)$$

$$\theta_2^*(\omega) = - \frac{c_{j\delta} \left(\frac{\partial V_j}{\partial x} \right)_{x=x_\Gamma} \eta \omega \omega_j}{m_j [(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \eta^2 \omega^2 \omega_j^2]} , \quad (4.11.4)$$

где в соответствии с принятыми ранее обозначениями $\theta_1^*(\omega)$ – действительная и $\theta_2^*(\omega)$ – мнимая части комплексной функции $\theta^*(\omega)$. Согласно (4.9.10) и (4.11.4) в рассматриваемом случае будут иметь место равенства

$$k_o(\omega) \cos \varphi_o(\omega) = \frac{c_{j\delta} \left(\frac{\partial V_j}{\partial x} \right)_{x=x_\Gamma} (\omega_j^2 - \omega^2)}{m_j [(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \eta^2 \omega^2 \omega_j^2]} ; \quad (4.11.5)$$

$$k_o(\omega) \sin \varphi_o(\omega) = - \frac{c_{j\delta} \left(\frac{\partial V_j}{\partial x} \right)_{x=x_\Gamma} \eta \omega \omega_j}{m_j [(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \eta^2 \omega^2 \omega_j^2]} .$$

В соответствии с формулами (3.24.25) и (4.11.5) уравнение годографа разомкнутой системы автоматического регулирования в данном случае будет иметь вид

$$X = \frac{c_{j\delta} \left(\frac{\partial V_j}{\partial x} \right)_{x=x_\Gamma} k_a(\omega) [(\omega_j^2 - \omega^2) \cos \varphi_a(\omega) + \eta \omega \omega_j \sin \varphi_a(\omega)]}{m_j [(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \eta^2 \omega^2 \omega_j^2]} ; \quad (4.11.6)$$

$$Y = \frac{c_{j\delta} \left(\frac{\partial V_j}{\partial x} \right)_{x=x_\Gamma} k_a(\omega) [(\omega_j^2 - \omega^2) \sin \varphi_a(\omega) - \eta \omega \omega_j \cos \varphi_a(\omega)]}{m_j [(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \eta^2 \omega^2 \omega_j^2]} ,$$

где $k_a(\omega)$ и $\varphi_a(\omega)$ – функции, определяющие амплитудно-частотную и фазово-частотную характеристики автомата стабилизации.

Полагая в (4.11.6)

$$\omega = \omega_j + \delta \quad (4.11.7)$$

и пренебрегая в чисителях полученных дробей величинами второго порядка малости, а в знаменателях – третьего порядка малости по сравнению с величинами δ и η , получим для частот ω , близких к частоте ω_j , приближенное уравнение годографа

$$X = - \frac{c_{j\delta} \left(\frac{\partial V_j}{\partial x} \right)_{x=x_\Gamma} k_a(\omega_j) [2\delta \cos \varphi_a(\omega_j) - \eta \omega_j \sin \varphi_a(\omega_j)]}{m_j \omega_j (4\delta^2 + \eta^2 \omega_j^2)} ; \quad (4.11.8)$$

$$Y = - \frac{c_{j\delta} \left(\frac{\partial V_j}{\partial x} \right)_{x=x_\Gamma} k_a(\omega_j) [2\delta \sin \varphi_a(\omega_j) + \eta \omega_j \cos \varphi_a(\omega_j)]}{m_j \omega_j (4\delta^2 + \eta^2 \omega_j^2)} . \quad (4.11.8)$$

Согласно (4.11.8) должны иметь место равенства

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 &= \frac{c_{j\delta} \left(\frac{\partial V_j}{\partial x} \right)^2_{x=x_\Gamma} k_a(\omega_j)}{m_j^2 \omega_j^2 (4\delta^2 + \eta^2 \omega_j^2)} ; \\ X \sin \varphi_a(\omega_j) - Y \cos \varphi_a(\omega_j) &= \frac{\eta c_{j\delta} \left(\frac{\partial V_j}{\partial x} \right)_{x=x_\Gamma} k_a(\omega_j)}{m_j (4\delta^2 + \eta^2 \omega_j^2)} ; \end{aligned} \quad (4.11.9)$$

соответствии с которыми уравнение годографа может быть представлено виде

$$X^2 + Y^2 = \frac{c_{j\delta} \left(\frac{\partial V_j}{\partial x} \right)_{x=x_\Gamma} k_a(\omega_j) [X \sin \varphi_a(\omega_j) - Y \cos \varphi_a(\omega_j)]}{\eta m_j \omega_j^2} . \quad (4.11.10)$$

Введя обозначения

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{c_{j\delta} \left(\frac{\partial V_j}{\partial x} \right)_{x=x_\Gamma} k_a(\omega_j) \sin \varphi_a(\omega_j)}{2\eta m_j \omega_j^2} ; \\ Y_0 &= - \frac{c_{j\delta} \left(\frac{\partial V_j}{\partial x} \right)_{x=x_\Gamma} k_a(\omega_j) \cos \varphi_a(\omega_j)}{2\eta m_j \omega_j^2} , \end{aligned} \quad (4.11.11)$$

можно привести уравнение (4.11.10) к виду

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 &= 2(XX_0 + YY_0), \\ \text{или } (X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 &= R^2 , \end{aligned} \quad (4.11.12)$$

$$\text{где } R = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2} = \frac{k_a(\omega_j) \left| c_{j\delta} \left(\frac{\partial V_j}{\partial x} \right)_{x=x_\Gamma} \right|}{2\eta m_j \omega_j^2} . \quad (4.11.13)$$

Уравнение (4.11.12) представляет собой уравнение окружности радиуса R с центром в точке с координатами $X = X_0$, $Y = Y_0$. Эта окружность

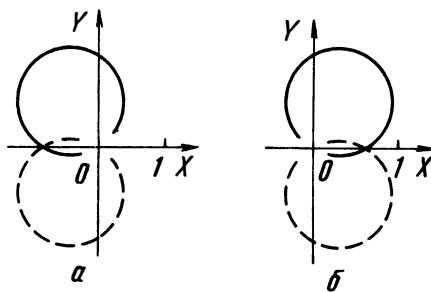


Рис. 4.5.

проходит через начало координат, так как $X_0^2 + Y_0^2 = R^2$. Согласно (4.11.11) при

$$c_{j\delta} \left(\frac{\partial V_j}{\partial x} \right)_{x=x_g} \sin \varphi_a(\omega_j) \leq 0 \quad (4.11.14)$$

центр этой окружности не выходит за пределы левой полуплоскости, и в данном случае на частотах, близких к частоте ω_j , годограф разомкнутой системы автоматического регулирования имеет вид, показанный на рис. 4.5, а сплошной линией для случая $Y_0 > 0$ и пунктирной линией для случая $Y_0 < 0$. В рассматриваемом случае окружность, описываемая уравнением (4.11.12), не может охватывать точку $X = 1, Y = 0$, каким бы большим ни был ее радиус R . Таким образом, условия (4.11.14) являются достаточными условиями устойчивости изгибных колебаний корпуса ракеты¹. Неравенство (4.11.14) не содержит коэффициента усиления автомата стабилизации, поэтому его принято называть условием фазовой стабилизации j -го тона изгибных колебаний.

Согласно (4.11.11) при

$$c_{j\delta} \left(\frac{\partial V_j}{\partial x} \right)_{x=x_g} \sin \varphi_a(\omega_j) > 0 \quad (4.11.15)$$

центр окружности, определяемой уравнением (4.11.12), лежит в правой полуплоскости, и в данном случае на частотах, близких к частоте ω_j , годограф разомкнутой системы автоматического регулирования имеет вид, показанный на рис. 4.5, б сплошной линией для случая $Y_0 > 0$ и пунктирной линией для случая $Y_0 < 0$. Согласно (4.11.12) точка пересечения годографом положительной полуси x имеет координату x , равную $2X_0$. Для того чтобы на частотах, близких к частоте ω_j , годограф не охватывал точку $X = 1, Y = 0$, должно выполняться неравенство $2X_0 \leq 1$. Согласно (4.11.11) этому неравенству можно придать вид

¹ При сделанных нами упрощениях передаточная функция не имеет полюсов в правой полуплоскости.

$$k_a(\omega_j) \leq \frac{\eta m_j \omega_j^2}{c_{j\delta} \left(\frac{\partial V_j}{\partial x} \right)_{x=x_r} \sin \varphi_a(\omega_j)} . \quad (4.11.16)$$

Условие (4.11.16) в рассматриваемом случае является необходимым условием устойчивости для j -го тона изгибных колебаний корпуса ракеты; это условие называют обычно условием амплитудной стабилизации.

Таким образом, для j -го тона изгибных колебаний корпуса ракеты устойчивость может быть обеспечена выполнением условия либо фазовой стабилизацией (4.11.14), либо амплитудной стабилизацией (4.11.16). Коэффициенты m_j и $c_{j\delta}$, производные $\partial V_j / \partial x|_{x=x_r}$ и частоты собственных изгибных колебаний корпуса ω_j , входящие в условия устойчивости (4.11.14) и (4.11.16), в процессе полета ракеты существенно изменяются. В связи с этим для всех активных участков полета ракеты фазовую стабилизацию обычно удается реализовать лишь для первого тона изгибных колебаний. Обеспечение амплитудной стабилизации изгибных колебаний тоже часто оказывается трудновыполнимым. В таких случаях на ракете приходится устанавливать дополнительные чувствительные элементы системы управления, в качестве которых обычно применяются датчики угловых скоростей. Удачно комбинируя сигналы этих датчиков с основным входным сигналом автомата стабилизации, можно существенным образом облегчить стабилизацию изгибных колебаний корпуса ракеты.

После предварительного выбора частотных характеристик автомата стабилизации устойчивость изгибных колебаний корпуса ракеты контролируется расчетным путем посредством точного построения годографа разомкнутой системы автоматического регулирования и экспериментальным путем с помощью электромоделирования.

ГЛАВА 5. СТАБИЛИЗАЦИЯ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ РАКЕТЫ С ЖИДКОСТНЫМ РАКЕТНЫМ ДВИГАТЕЛЕМ

§ 5.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ

На активном участке полета ракеты с жидкостным ракетным двигателем (ЖРД) могут возникать неустойчивые продольные колебания, при которых динамические нагрузки на конструкцию ракеты резко возрастают.

Наиболее неблагоприятны низкочастотные (до 50 Гц) упругие продольные колебания ракеты, которые сопровождаются продольными колебаниями жидкого топлива в баках и топливоподающих магистролях. Пульсации давления в баках и магистролях подачи вызывают изменение расходов компонентов топлива, колебания давления в камере сгорания и возмущения тяги ЖРД. Эти возмущения в свою очередь передаются на корпус ракеты, так что образуется замкнутая колебательная система, в которой первоначальные малые возмущения в некоторый момент времени могут превратиться в нарастающие по амплитуде колебания в системе в целом и каждом элементе.

На рис. 5.1 показана укрупненная структурная схема простейшей замкнутой системы – ракеты с однокомпонентным ЖРД, в которой возникают продольные колебания. На практике замкнутую систему принято составлять с большей детализацией, с учетом физического взаимодействия многих звеньев реальной ракеты (рис. 5.2). Упругий корпус, например, представляют состоящим из "сухих" отсеков (приборный, хвостовой, головной и др.), упругих баков с жидким топливом и системой наддува, упругой подвески ЖРД. В топливную магистраль включают, как правило, низконапорные трубопроводы подачи жидкого компонента в турбонасосный агрегат. Основными динамическими звеньями ЖРД являются камера сгорания, газогенератор, турбина, топливные насосы, высоконапорные магистрали подачи компонентов в камеру сгорания, магистрали питания газогенератора, регуляторы.

На рис. 5.2 обозначены: $P_h(t)$ – возмущение силы, действующей на корпус насоса и передаваемой на корпус ракеты; $P_k(t)$ – возмущение силы, действующей на корпус из-за возмущения тяги двигателя; $P(t)$ – возмущение тяги двигателя; $q_n(t)$ – возмущение обобщенной координаты, описывающей вынужденные колебания корпуса; $p_b(t)$ – возмущение давления жидкости на входе в расходную магистраль, обусловленное продольными колебаниями емкости с топливом; $v_{1M}(t)$ – возмущения скорости жидкого топлива в расходной магистрали; $v_{pg}(t)$ – возмущение скорости жидкости в расходной магистрали, вызванное изменением объема парогазовой смеси; $p_{1H}(t)$, $p_{2H}(t)$ – возмущения давления на входе и выходе турбонасосного агрегата соответственно; $v_H(t)$ – возмущение скорости жидкости, проходящей через насос; $v_K(t)$ – возмущение скорости топлива на входе в камеру сгорания с учетом сопротив-

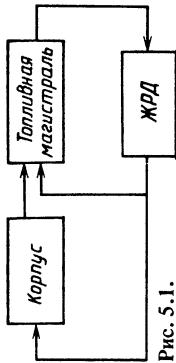


Рис. 5.1.

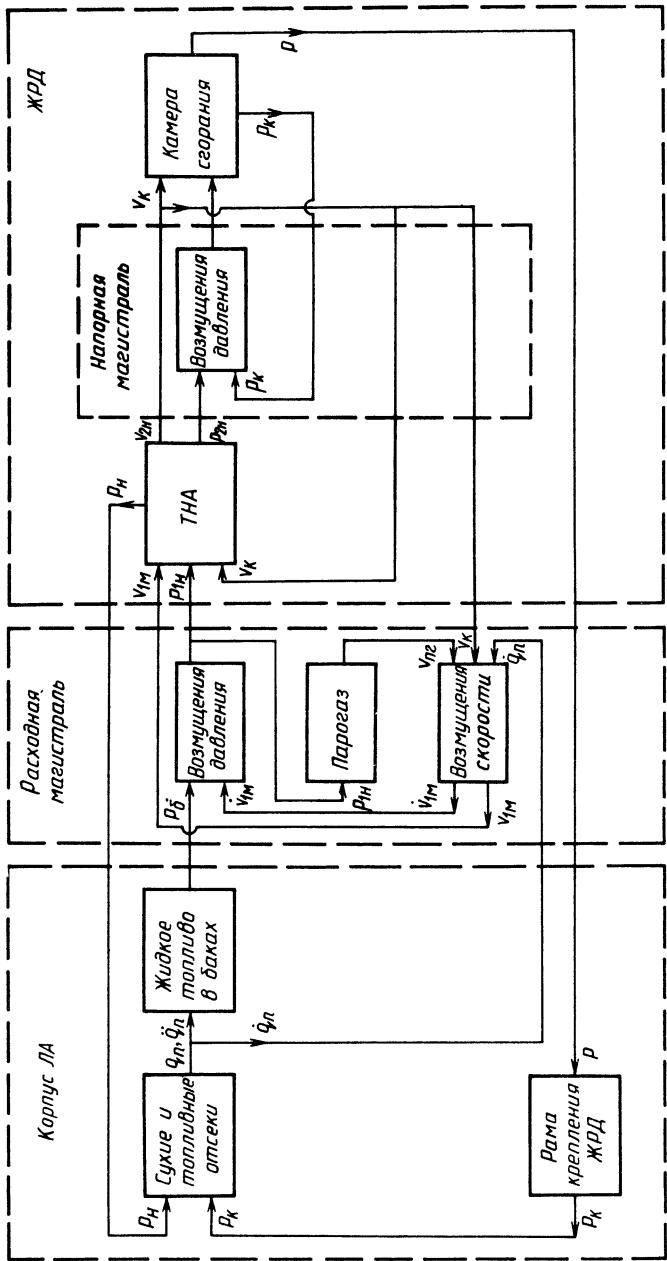


Рис. 5.2.

ления форсуночной головки; $p_k(t)$ – возмущение давления в камере сгорания.

Динамические процессы, происходящие в том или ином звене системы, описываются дифференциальными уравнениями, отражающими связь входных и выходных параметров. Обычно эти уравнения разрешают относительно возмущений параметров, характеризующих отклонения их действительных значений от номинальных.

В уравнениях, связывающих входные и выходные параметры топливной магистрали (возмущения давления и скорости жидкого топлива в зарборном устройстве бака и перед топливным насосом), учитываются возмущения, обусловленные не только нестационарностью расхода и упругой подвеской трубопровода и насоса, но и образованием парогазовой смеси.

Уравнения связи входных и выходных параметров двигателя в целом (возмущений давления и скорости на входе в насос и отклонений давления в камере сгорания) учитывают изменение расходных и напорных характеристик насосов, сопротивление в насосах, напорной магистрали, рубашке охлаждения и форсуночной головке, влияние расхода компонента топлива на отклонение давления в камере сгорания.

Упрощенные математические модели отдельных звеньев замкнутой системы приведены в учебнике К.С. Колесникова [10]. Анализ моделей показывает, что динамические процессы в элементах и системе в целом при совпадении собственных частот колебаний (резонансе) становятся существенно нелинейными. При этом резко возрастают амплитуды колебаний, возникает автоколебательный процесс.

Низкочастотные автоколебания в замкнутой системе, состоящей из упругого корпуса с жидким топливом в баках, топливоподающих магистралей и ЖРД, в инженерной практике называют продольными автоколебаниями.

Вызвать автоколебания могут разнообразные внутренние и внешние причины, в том числе пульсации давления в камере сгорания, пульсации донного давления и т.д. В режиме автоколебаний во всех элементах происходят колебания с одинаковой частотой – частотой автоколебаний.

О возможности возникновения продольных автоколебаний ракеты можно судить, решая полную систему дифференциальных уравнений, описывающих колебания в элементах, с учетом граничных условий. Сначала решают задачи о собственных и вынужденных колебаниях звеньев; определяют частоты и формы продольных колебаний упругих баков с жидким топливом и упругих продольных колебаний корпуса в целом, рассчитывают динамические характеристики магистралей подачи топлива с учетом кавитации в насосах. Динамические свойства ЖРД при этом считают заданными. Используя методы математической физики, теории колебаний и автоматического регулирования, можно определить частотные характеристики звеньев. Объединяя звенья в общую замкнутую систему, исследуют ее колебания и устанавливают влияние параметров на ее поведение.

Так как автоколебания ракеты возникают главным образом на резо-

нансных режимах при определенном соотношении динамических параметров отдельных звеньев, "настройкой" этих параметров, которая достигается путем конструктивных изменений или введением специальных демпферов и динамических гасителей колебаний, можно обеспечить устойчивость продольных колебаний ракеты с ЖРД.

Учитывая, что вопросы продольной устойчивости подробно изложены в книге [10], в данной главе остановимся на описании методов определения возмущений параметров основных элементов замкнутой автоколебательной системы и выборе средств обеспечения продольной устойчивости ракеты.

§ 5.2. ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ БАКОВ, ЗАПОЛНЕННЫХ ЖИДКИМ ТОПЛИВОМ

Топливные отсеки, конструктивно представляющие собой тонкостенные оболочки с силовым набором, являются составной частью корпуса большинства ракет. Оболочки баков и частично заполняющее их жидкое топливо образуют единую систему, в которой могут происходить совместные колебания.

Динамические характеристики баков с жидким топливом в значительной степени влияют на продольную устойчивость ракет.

Определяя формы и частоты продольных колебаний жидкости в упругой оболочке, возмущение давления в районе заборного устройства топливной емкости и другие характеристики, будем считать жидкость идеальной и несжимаемой, а ее движение безвихревым. Предположим, что ракета и ее топливные баки осесимметричны с одинаковыми распределениями масс и жесткостей в любом радиальном направлении. Будем рассматривать прямолинейный полет с постоянным продольным ускорением, при котором невозмущенные свободные поверхности топлива в баках перпендикулярны продольной оси ракеты.

В возмущенном движении, вызванном каким-либо осесимметричным по отношению к ракете фактором, будем учитывать только осесимметричные колебания жидкости и упругой оболочки. При этом давление в жидкости будет также обладать свойством осевой симметрии. Деформацию свободной поверхности жидкости в баках при колебаниях учитывать не будем. Предположим, что колебания топлива вызваны изменением радиуса бака из-за изменения давления, а не вследствие деформации растяжения или сжатия оболочки. Стенки баков будем считать тонкостенными безмоментными оболочками. Колебания корпуса и баков с жидким топливом будем предполагать малыми, что позволит применять линеаризованные уравнения деформации оболочки и движения жидкости.

При оговоренных допущениях можно записать дифференциальные уравнения колебаний оболочки

$$L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w + \rho_0 \delta \frac{d^2u}{dt^2} = X; \quad (5.2.1)$$

$$\begin{aligned} L_{21} u + L_{22} v + L_{23} w + \rho_0 \delta \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= Y; \\ L_{31} u + L_{32} v + L_{33} w + \rho_0 \delta \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= Z, \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

где $L_{11}, L_{12}, \dots, L_{33}$ – дифференциальные операторы; u, v, w – проекции вектора перемещения оболочки на оси координат $OXYZ$; ρ_0 и δ – плотность материала оболочки и ее толщина; X, Y, Z – проекции вектора внешних распределенных сил, действующих на оболочку, на оси $OXYZ$.

В число внешних по отношению к оболочке бака сил необходимо включить не только продольные силы, действующие со стороны смежных отсеков, но и давление жидкости на смачиваемую поверхность бака S и давления газов наддува на несмоченную поверхность бака S_1 .

Движение жидкости в баке должно удовлетворять уравнению Лапласа

$$\Delta \Phi = 0. \quad (5.2.2)$$

Уравнения (5.2.1) и (5.2.2) дополняют граничными и начальными условиями. Для оболочки граничными условиями могут быть соотношения между перемещениями u, v, w , заданные на некотором контуре l в виде

$$F(u, v, w) = 0 \quad \text{на } l. \quad (5.2.3)$$

Граничными условиями для потенциала скоростей Φ жидкости являются условия непротекания на смоченной поверхности бака

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial w_n}{\partial t} \quad \text{на } S, \quad (5.2.4)$$

где w_n – перемещение оболочки по нормали к поверхности, и линеаризованные динамические условия на смоченной и свободной поверхностях (индекс номера бака j для простоты опускаем)

$$p - p_0 = -\rho [(\mathbf{w}_0 - \mathbf{g}) \mathbf{r} + \frac{\partial \Phi}{\partial t}] \quad \text{на } S; \quad (5.2.5)$$

$$(\mathbf{w}_0 - \mathbf{g}) \mathbf{r} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad \text{на } \sigma. \quad (5.2.6)$$

Так как оценивать устойчивость продольного движения ракеты удобно с помощью частотных методов, позволяющих анализировать поведение объекта при разнообразных возмущениях, в дальнейшем будем исследовать собственные продольные колебания и определять динамические характеристики упругой оболочки с жидким топливом без учета движений, которые вызваны начальными условиями.

Решим задачу, описываемую уравнениями (5.2.1) ... (5.2.6), на примере цилиндрического топливного бака. При этом для определения характеристик собственных колебаний емкости с топливом сначала рассмотрим колебания упругой цилиндрической оболочки бака с жестким дном, затем

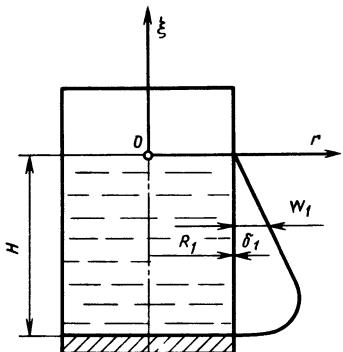


Рис. 5.3.

решим задачу о колебаниях жидкости в баке с жесткой обечайкой и упругим плоским дном. Представим потенциал скоростей жидкости в цилиндрическом баке в виде

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2,$$

где Φ_1 – потенциал скоростей жидкости в баке с упругой цилиндрической оболочкой и жестким дном; Φ_2 – потенциал скоростей жидкости в баке с жесткой цилиндрической обечайкой и упругим дном.

Сформулируем и решим обе частные задачи.

Рассмотрим круговой цилиндрический бак радиуса R_1 с упругой обечайкой и жестким дном (рис. 5.3). Определим потенциал скоростей Φ_1 и радиальную деформацию обечайки бака w_1 .

Запишем уравнение Лапласа в цилиндрических координатах для осесимметричных колебаний

$$\Delta\Phi_1 = \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi_1}{\partial r} + \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial\xi^2} = 0 \quad (5.2.7)$$

и граничные условия на смоченных поверхностях

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial r} = \frac{\partial w_1}{\partial t} \quad \text{при } r = R_1, \quad -H < \xi < 0; \quad (5.2.8)$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial\xi} = 0 \quad \text{при } \xi = -H, \quad 0 < r < R_1. \quad (5.2.9)$$

Предполагая, что деформация свободной поверхности отсутствует, а уровень жидкости в баке и кажущееся ускорение не меняются, динамическое условие (5.2.6) с точностью до постоянной величины представим в виде

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial t} = 0 \quad \text{при } \xi = 0. \quad (5.2.10)$$

Предполагая, что боковые стенки и жидкость совершают гармонические колебания, и используя метод Фурье, будем искать решение уравнения (5.2.7) в виде ряда

$$\Phi_1(\xi, r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k X_k(\xi) Y_k(r) i \omega_k e^{i \omega_k t}. \quad (5.2.11)$$

Функция $w_1(\xi, t)$, характеризующая радиальную деформацию стенок бака, строится так, чтобы удовлетворялось условие (5.2.8):

$$w_1(\xi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} E_k X_k(\xi) e^{i\omega_k t}. \quad (5.2.12)$$

Подставляя частное решение вида (5.2.11) в (5.2.7), получим равенство

$$-\frac{1}{X_k} \frac{d^2 X_k}{d\xi^2} = \frac{1}{Y_k} \left(\frac{d^2 Y_k}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d Y_k}{dr} \right). \quad (5.2.13)$$

Левая часть равенства (5.2.13) не зависит от переменной r , а правая часть — от переменной ξ . Поэтому обе части равенства (5.2.13) представляют собой некоторую константу. Обозначим ее через λ_k^2 и из (5.2.13) получим для функций $X_k(\xi)$ и $Y_k(r)$ два линейных дифференциальных Уравнения второго порядка

$$\frac{d^2 X_k}{d\xi^2} + \lambda_k^2 X_k = 0; \quad (5.2.14)$$

$$\frac{d^2 Y_k}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d Y_k}{dr} - \lambda_k^2 Y_k = 0. \quad (5.2.15)$$

Последнее уравнение называют уравнением Бесселя. Так как потенциал скоростей Φ_1 при $r = 0$ является ограниченной функцией, обладающей свойством симметрии, в качестве решения уравнения (5.2.15) может рассматриваться функция Бесселя первого рода нулевого порядка $Y_k(r) = J_0(\lambda_k r)$, если λ_k — мнимое число, или модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка $Y_k(r) = I_0(\lambda_k r)$, если λ_k — вещественное число.

Чтобы найти решение уравнения (5.2.14), необходимо записать граничные условия для функции $X_k(\xi)$. Подставив (5.2.11) в (5.2.9), найдем

$$\frac{d X_k}{d \xi} = 0 \text{ при } \xi = -H. \quad (5.2.16)$$

Кроме того,

$$X_k = 0 \text{ при } \xi = 0, \quad (5.2.17)$$

так как деформация свободной поверхности отсутствует по предположению.

Равенства (5.2.16) и (5.2.17) одновременно могут выполняться только при условии, что λ_k — вещественное число. Поэтому решением уравнения (5.2.14) будут функции

$$X_k(\xi) = \cos \lambda_k (\xi + H). \quad (5.2.18)$$

Здесь $\lambda_k = \frac{(2k - 1)\pi}{2H}$, $k = 1, 2, 3, \dots$, поскольку длище бака абсолютно жесткое и при $\xi = -H$ должно выполняться условие

$$X_k(\xi) \Big|_{\xi = -H} = \cos \lambda_k H = 0.$$

Решениями уравнения (5.2.15) при вещественных λ_k являются модифицированные функции Бесселя

$$Y_k(r) = I_0(\nu_k \frac{r}{R_1}), \quad (5.2.19)$$

$$\text{где } \nu_k = \lambda_k R_1 = \frac{(2k - 1)\pi R_1}{2H}.$$

Подставляя (5.2.18), (5.2.19) в (5.2.11), (5.2.12), получим

$$\Phi_1 = \sum_{k=1}^{\infty} D_k I_0(\nu_k \frac{r}{R_1}) \cos(\nu_k \frac{\xi + H}{R_1}) i\omega_k e^{i\omega_k t}; \quad (5.2.20)$$

$$w_1 = \sum_{k=1}^{\infty} E_k \cos(\nu_k \frac{\xi}{R_1}) e^{i\omega_k t}. \quad (5.2.21)$$

Определим частоту собственных упругих колебаний бака с жидкостью ω_k . Составим уравнение колебаний цилиндрической оболочки в радиальном направлении. На рис. 5.4 показана часть цилиндрической стенки бака единичной длины в двух состояниях: исходном и деформированном. Изменение радиуса оболочки на величину w_1 вызвано возмущением давления в жидкости

$$p = -\rho \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \right) \text{ при } r = R_1.$$

При упругой деформации цилиндрической стенки, плотность материала которой ρ_0 , а толщина — δ , возникает растягивающая сила $E\delta w_1/R_1$.

Учитывая предположения об идеальности жидкости и отсутствии демпфирования колебаний конструкции при деформации, запишем уравнение колебаний элемента оболочки в радиальном направлении

$$\begin{aligned} \rho_0 \delta R_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} &= -\rho \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \right)_{r=R_1} - E\delta \frac{w_1}{R_1}, \\ \text{или } \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + \Omega^2 w_1 &= -\rho \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \right)_{r=R_1}, \end{aligned} \quad (5.2.22)$$

где $\Omega = \frac{1}{R_1} \sqrt{\frac{E}{\rho_0}} -$ частота собственных радиальных колебаний контура кольца единичной длины.

С учетом формул (5.2.20), (5.2.21) вместо (5.2.22) запишем

$$E_k (\Omega^2 - \omega_k^2) = D_k \frac{\rho I_0(\nu_k) \omega_k^2}{\delta \rho_0}, \quad (5.2.23)$$

а из соотношения (5.2.8) получим

$$D_k \left[\frac{d}{dr} I_0 \left(\nu_k \frac{r}{R_1} \right) \right]_{r=R_1} = E_k,$$

$$\text{или } D_k = \frac{R_1 E_k}{\nu_k I_1(\nu_k)}, \quad (5.2.24)$$

$$\text{так как } \frac{d}{dr} I_0(\nu_k) = \nu_k I_1(\nu_k).$$

Подставляя (5.2.24) в (5.2.23), найдем частоту собственных колебаний бака с жидкостью

$$\omega_k^2 = \frac{\Omega^2 \rho_0 \delta \nu_k I_1(\nu_k)}{[\rho_0 \delta \nu_k I_1(\nu_k) + \rho R_1 I_0(\nu_k)]}. \quad (5.2.25)$$

Сформулируем и решим задачу определения потенциала скоростей жидкости Φ_2 в цилиндрическом баке с жесткой обечайкой и упругим дном. В большинстве случаев днище баков является пологой оболочкой, образующая которой – окружность или эллипс.

На рис. 5.5 показан цилиндрический бак радиуса R_1 с днищем в виде сферы радиуса R_2 толщиной δ_2 .

Сформулируем краевые задачи для определения функций $\Phi_2(\xi, r, t)$ и $w_2(r, t)$. Потенциал скоростей жидкости должен удовлетворять уравнению Лапласа

$$\Delta \Phi_2 = 0 \quad (5.2.26)$$

и граничным условиям

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r = R_1; \quad (5.2.27)$$

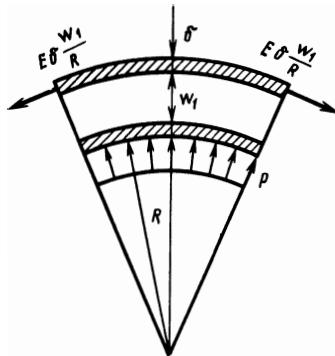


Рис. 5.4.

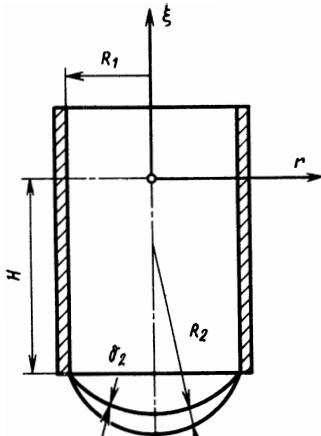


Рис. 5.5.

где $\Delta = \text{divgrad}$; $\Delta\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)$; $D = \frac{E \delta_2^3}{12(1 - \mu^2)}$ — жесткость единицы длины оболочки на изгиб; E — модуль Юнга; μ — коэффициент Пуассона.

Предполагая, что радиус кривизны сферического днища достаточно большой, заменим сферу плоской круглой пластиной, имеющей прогиб $w_2(r, t)$. Пренебрегая величинами порядка $1/R_2$, запишем краевую задачу о собственных колебаниях пластины с жестко закрепленными краями:

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + a^4 \Delta\Delta w_2 = 0, \quad 0 \leq r \leq R_1; \quad (5.2.30)$$

$$W_2 = 0 \quad \text{при } r = R_1; \quad (5.2.31)$$

$$\frac{\partial W_2}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r = R_1, \quad (5.2.32)$$

$$\text{где } a^4 = \frac{D}{\delta_2 \rho_0} = \frac{E \delta_2^2}{12(1 - \mu^2) \rho_0}.$$

Для решения задачи (5.2.30) ... (5.2.32) применим метод разделения переменных. Будем искать решение в виде

$$w_2(r, t) = Y(r) \beta(t).$$

¹ Условие (5.2.28) записано в предположении, что в дальнейшем сферическое днище заменяется плоским.

Из уравнения (5.2.30) получим

$$\frac{d^2 \beta}{dt^2} + \omega^2 \beta = 0; \quad (5.2.33)$$

$$(\Delta \Delta - \lambda^4) Y = \left(\frac{d^2 Y}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d Y}{dr} + \lambda^2 Y \right) \times \\ \times \left(\frac{d^2 Y}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d Y}{dr} - \lambda^2 Y \right) = 0, \quad (5.2.34)$$

где $\lambda^4 = \omega^2/a^4$.

Вместо (5.2.31), (5.2.32) запишем граничные условия

$$Y|_{r=R_1} = 0; \quad \frac{d Y}{dr}|_{r=R_1} = 0. \quad (5.2.35)$$

Функции $Y(r)$ при $r = 0$ должны быть ограниченными. Поэтому решением уравнения (5.2.34) будет

$$Y(r) = D_1 J_0(\lambda r) + D_2 I_0(\lambda r).$$

Подставляя данное решение в (5.2.35), получим

$$D_1 J_0(\lambda r) + D_2 I_0(\lambda r) = 0 \quad \text{при } r = R_1; \quad (5.2.36)$$

$$D_1 \frac{d J_0(\lambda r)}{dr} + D_2 \frac{d I_0(\lambda r)}{dr} = 0 \quad \text{при } r = R_1.$$

Константы D_1 и D_2 не должны одновременно обращаться в нуль, так как мы ищем нетривиальное решение $Y(r)$. Следовательно, определитель системы (5.2.36) нужно приравнять нулю и записать трансцендентное уравнение

$$J_0(\nu) I_1(\nu) + I_0(\nu) J_1(\nu) = 0. \quad (5.2.37)$$

Его корни $\nu_0 = 0; \nu_1 = 3, 2 \dots; \nu_2 = 6, 3 \dots; \nu_3 = 9, 4 \dots$ – собственные числа краевой задачи о колебаниях пластины ($\lambda_j R_1 = \nu_j$).

Из (5.2.36) получим соотношение между коэффициентами D_1 и D_2 ,

$$D_2 = -D_1 \frac{J_0(\nu_j)}{I_0(\nu_j)} = -D_1 \xi_j. \quad (5.2.38)$$

Полагая $D_1 = 1$, запишем окончательное выражение для собственных функций

$$Y_j(r) = J_0(\nu_j \frac{r}{R_1}) - \xi_j I_0(\nu_j \frac{r}{R_1}). \quad (5.2.39)$$

Собственные функции ортогональны с весом r

$$\int_0^{R_1} r Y_j Y_l dr = \begin{cases} 0 & \text{при } j \neq l, \\ N_j^2 & \text{при } j = l. \end{cases}$$

Нормирующий множитель $N_j^2 = R_1^2 J_0^2(\nu_j) I_0^2(\nu_j)$.

Решение уравнения (5.2.33) представим в виде

$$\beta_j(t) = e^{i\omega_j t}, \quad (5.2.40)$$

где $\omega_j^2 = a^4 \nu_j^4$ – собственная частота колебаний.

Если заданы начальные значения $w_2(r, 0) = f(r)$; $\frac{dw_2(r, 0)}{dt} = F(r)$,

деформацию днища бака можно описать функцией

$$w_2(r, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ A_j \cos \omega_j t + B_j \sin \omega_j t \right\} [J_0\left(\frac{\nu_j r}{R_1}\right) + \xi_j I_0\left(\frac{\nu_j r}{R_1}\right)], \quad (5.2.41)$$

$$\text{где } A_j = \frac{\int_0^{R_1} r f(r) Y_j(r) dr}{N_j^2}; \quad B_j = \frac{\int_0^{R_1} r F(r) Y_j(r) dr}{\omega_j N_j^2}; \quad \xi_j = \frac{J_0(\nu_j)}{I_0(\nu_j)}.$$

Нетрудно показать, что поперечные колебания круглой пластины, вызываемые равномерно распределенным давлением $p = p_0 \sin \omega t$, описываются функцией

$$w_2(r, t) = Y(r) \beta(t) = \frac{2 p_0 a^2 R_1}{\omega D} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin \omega_j t - \frac{a^2}{\omega} \sin \omega t}{1 - (\frac{a^2}{\omega})^2} \times$$

$$\times \frac{J_1(\nu_j) Y_j(r)}{\nu_j^2 R_1^2 J_0^2(\nu_j) I_0^2(\nu_j)}.$$

Потенциал скоростей $\Phi_2(\xi, r, t)$ построим так, чтобы удовлетворялись равенства (5.2.26) и (5.2.29):

$$\begin{aligned} \Phi_2(\xi, r, t) = & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d\beta_k}{dt} J_0(\lambda_k \frac{r}{R_1}) \times \\ & \times \frac{\operatorname{sh}(\lambda_k \frac{\xi}{R_1})}{\operatorname{ch}(\lambda_k \frac{H}{R_1})} + \frac{d\alpha_k}{dt} \frac{\xi}{R_1}. \end{aligned} \quad (5.2.42)$$

Подставив (5.2.42) в (5.2.27), запишем трансцендентное уравнение

$$\frac{d}{dr} J_0(\lambda_k \frac{r}{R_1}) \Big|_{r=R_1} = - \frac{\lambda_k}{R_1} J_1(\lambda_k) = 0. \quad (5.2.43)$$

Корни этого уравнения

$$\lambda_0 = 0; \lambda_1 = 3,83 \dots; \lambda_2 = 7,01 \dots; \lambda_3 = 10,17 \dots; \dots$$

являются собственными числами краевой задачи (5.2.26) ... (5.2.28). Чтобы выразить функции времени $d\beta_k/dt, d\alpha_k/dt$ через $d\beta_j/dt$, подставим (5.2.41) и (5.2.42) в условие (5.2.28):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{R_1} \frac{d\beta_k}{dt} J_0\left(\frac{\lambda_k r}{R_1}\right) + \frac{d\alpha_k}{dt} \frac{1}{R_1} = \\ = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d\beta_j}{dt} [J_0\left(\frac{\nu_j r}{R_1}\right) - \xi_j I_0\left(\frac{\nu_j r}{R_1}\right)]. \end{aligned}$$

Умножив обе части данного равенства сначала на $r dr$, затем на $r J_0(\lambda_k r / R_1)$ и проинтегрировав по r в пределах от 0 до R_1 , получим

$$\Phi_2(\xi, r, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d\beta_j}{dt} \left[\sum_{k=1}^{\infty} b_{jk} J_0\left(\frac{\lambda_k r}{R_1}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\lambda_k \xi}{R_1}\right) + a_j \xi \right]. \quad (5.2.44)$$

Здесь коэффициенты b_{jk}, a_j определяются через значения функций Бесселя при $r=R_1$:

$$b_{jk} = \frac{4R_1 v_j J_1(\nu_j)}{\lambda_k J_0(\lambda_k) (\nu_j^2 - \lambda_k^2) \operatorname{ch}\left(-\frac{\lambda_k H}{R_1}\right)};$$

$$a_j = \frac{4J_1(\nu_j)}{\nu_j}.$$

Таким образом, потенциал скоростей жидкости в упругом цилиндрическом баке определяется в виде суммы

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2.$$

Возмущение давления жидкости на дно бака

$$p|_{\xi = -H} = -\rho \frac{\partial(\Phi_1 + \Phi_2)}{\partial t}|_{\xi = -H}. \quad (5.2.45)$$

В дальнейшем согласно механической модели колебаний корпуса каждый тон колебаний жидкости заменяется осциллятором, закрепленным на силовом кольце. Сосредоточенные массы m_k на невесомых пружинах, имеющих жесткость K_k , подвешены к жестким днищам баков так, что их продольные колебания вместе с силовым кольцом для жидкости в емкости представляют переносное движение. Приведенные массы и жесткости физических маятников подсчитываются по формулам

$$m_k = \frac{\pi R_1^4 \rho I_1(\nu_k) (\nu_k + 1)^2}{\nu_k^3 H I_0(\nu_k)};$$

$$K_k = \omega_k^2 m_k.$$

При этом масса всей жидкости в баке $m = \pi R_1^2 H \rho$.

Если при решении ограничиться учетом $k^{(0)}$ тонов колебаний, при подсчете параметров механической модели для всех $k > k^{(0)}$ нужно считать $K_k = \infty$. Массы всех осцилляторов, колебания которых не учитываются, следует отнести к распределенной массе шпангоута бака. Скалярные функции $\beta_j(t)$ и $\beta_k(t)$, характеризующие зависимость решений краевых задач от времени в вынужденном и свободном движениях, связаны между собой коэффициентом формы c :

$$\beta_j(t) = c \beta_k(t) = \frac{\omega^2 X_k(\xi)}{\omega_j^2 - \omega^2} \beta_k(t).$$

§ 5.3. ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОГО КОРПУСА РАКЕТЫ

При исследовании продольной устойчивости ракеты ее заменяют моделью: представляют в виде прямого неоднородного стержня с сосредоточенными массами, характеризующими упругие продольные колебания баков с жидкостью и двигателя¹.

За точку расположения сосредоточенных масс жидкого топлива принимают центры упругих днищ баков, точки подвески пружин масс m_k совпадают с силовыми шпангоутами.

Так как турбонасосный агрегат (ТНА) закреплен на двигателе, оба заменяются сосредоточенной массой на пружине, причем к массе двигательной установки (ДУ) добавляется масса ТНА и масса столба жидкости, заключенной в трубопроводах от насоса до свободной поверхности в баке. В инженерной практике достаточно учитывать три первых тона колебаний баков с жидкостью. Остальные осцилляторы считаются жесткими, их масса присоединяется к массе силового шпангоута. Схема механической модели ракеты приведена на рис. 5.6.

Для определения динамических характеристик упругого корпуса решают дифференциальное уравнение упругих продольных колебаний стержня

$$m(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} [EF(x) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}] + q(x, t) \quad (5.3.1)$$

с граничными условиями, физически означающими равенство нулю осевой силы на свободных концах стержня.

Предположим сначала, что отсутствуют все указанные сосредоточенные присоединенные массы ($m_k \equiv 0$).

В случае, когда внешняя распределенная нагрузка отсутствует ($q(x, t) = 0$), продольную деформацию стержня ищут в виде функции

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \beta_n(t).$$

¹ Введение такого механического аналога обосновано в учебнике К.С. Колесникова [10].

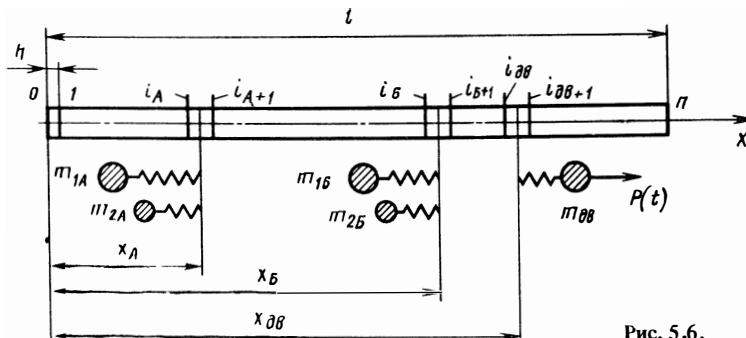


Рис. 5.6.

Если стержень однородный, собственные значения и функции краевой задачи определяются равенствами

$$\alpha_n = \pi n / l; X_n(x) = \cos \alpha_n x, n = 1, 2, 3, \dots$$

Частота собственных колебаний при этом

$$\omega_n = \alpha_n \sqrt{EF_0/m_0} = \alpha_n a,$$

где $a = \sqrt{E/\rho}$ – скорость звука.

Если стержень неоднородный, собственные формы и частоты колебаний нужно рассчитывать численно с помощью ЭВМ.

Воспользуемся, например, конечно-разностным методом. Длину ракеты l разбивают на j равных отрезков длиной $h = l/j$.

Обозначив абсциссы точек деления $x_i (i = 0, 1, 2, \dots, j)$, конечно-разностный аналог уравнения (5.3.1) интегрируем в пределах от $x_{i-0,5}$ до $x_{i+0,5}$. Выбирая масштаб собственной функции на левом конце стержня так, что $X_n(x_0) = 1$, и учитывая граничное условие $dX_n(x_0)/dx = 0$, запишем форму собственных колебаний на первых участках в виде

$$X_n(x_0) = 1; X_n(x_1) = 1.$$

На всех последующих участках имеем

$$X_n(x_{i+1}) = X_n(x_i) \left[1 + \frac{EF(x_{i-0,5})}{EF(x_{i+0,5})} - \frac{\omega_n^2 h^2 m(x_i)}{EF(x_{i+0,5})} \right] - \\ - \frac{EF(x_{i-0,5}) X_n(x_{i-1})}{EF(x_{i+0,5})}, \quad i = 1, 2, \dots, j-1, \quad (5.3.2)$$

где ω_n – произвольно задаваемый параметр (в качестве первого приближения удобно выбрать $\omega_n = n\pi/l$).

Решение сводится к вариации параметра ω_n , чтобы удовлетворилось граничное условие в сечении x_j

$$(X_{nj} - X_{n(j-1)})/h = 0. \quad (5.3.3)$$

Значение ω_n , при котором удовлетворяется последнее равенство, соответствует собственным частотам n -го тона колебаний.

В тех сечениях корпуса x_i , где жесткость или распределенная масса меняется ступенчато, в расчетах по методу конечных разностей нужно принимать эти величины равными полусуммам, определенным при $x_{i-0,5}$ и $x_{i+0,5}$.

Когда в расчетной схеме необходимо учитывать присоединенные массы баков с топливом или двигателя, формулы для численного определения форм колебаний в точках их крепления несколько изменяются. Пусть, например, сосредоточенные массы m_k подвешены между i -й и $(i+1)$ -й точками деления стержня. Тогда имеем

$$X_{n,i+1} = \frac{a}{b} X_{n,i} + c X_{n,i-1} + d \sum_k N_k, \quad (5.3.4)$$

$$\text{где } a = 1 + \frac{EF_{i+0,5}}{EF_{i+1,5}} - \frac{2\omega_n^2 h^2 m_i}{EF_{i+1}}; \quad b = 1 - \frac{EF_{i+0,5}}{EF_{i+1,5}} -$$

$$-\frac{\omega_n^2 h^2 m_{i+1}}{EF_{i+1,5}}; \quad c = -\frac{1}{b} \frac{EF_i}{EF_{i+1}}; \quad d = \frac{1}{b} \frac{2h}{EF_{i+1}}; \quad N_k = -\frac{\omega_n^2 m_k X_{ni}}{1 - (\frac{\omega_n}{\omega_k})^2},$$

$$\omega_n \neq \omega_k.$$

Так же как и раньше, расчет должен производиться в следующей последовательности.

Задаемся частотой колебаний системы ω_n , выбираем значения формы колебаний на левом конце стержня $X_{n0} = 1$ и $X_{n1} = 1$. По формулам (5.3.2) определяем X_{ni} для всех точек, предшествующих первому сечению с упруго подвешенными массами. Переход к $(i+1)$ -му сечению осуществим по формулам (5.3.4). Таким образом, доходим до правого конца стержня и проверяем выполняется ли равенство (5.3.3). Перебором частоты добиваемся его тождественного соблюдения. В этом случае ω_n являются собственными частотами и им соответствуют найденные собственные формы колебаний корпуса $X_n(x)$.

Формы колебаний присоединенных масс m_k или $m_{\text{дв}}$ определяют с помощью выражений [10]

$$X_{nk} = X_n(x_i) \frac{1}{1 - (\frac{\omega_n}{\omega_k})^2};$$

$$X_{n\text{дв}} = X_n(x_{\text{дв}}) \frac{1}{1 - (\frac{\omega_n}{\omega_{\text{дв}}})^2}.$$

Когда характеристики собственных колебаний известны, можно приступить к исследованию вынужденных колебаний корпуса.

Вынужденные колебания корпуса будем определять в виде произведения $\Psi(x, \omega) e^{i\omega t}$, где форма колебаний $\Psi(x, \omega)$ зависит не только от координаты сечения x , но и частоты вынужденных колебаний ω . Предположим, что на ракету действует сосредоточенная сила $P(t) = P_0 e^{i\omega t}$, вызванная пульсацией тяги двигателя. Рассмотрим случай, когда ракету представляют неоднородным стержнем без присоединенных масс жидкого топлива и двигателя ($m_k = 0, m_{dv} = 0, K_k = \infty$). Используем метод конечных разностей для численного интегрирования уравнения продольных колебаний корпуса и определения формы $\Psi(x, \omega)$. Разбивая весь корпус на участки длиной h и обозначая их индексом i ($i = 0, 1, 2, \dots, j$), определяем формулу связи значений функции Ψ на последующем ($i + 1$)-м и предыдущих i -м и ($i - 1$)-м участках

$$\Psi_{i+1} = (a_i^* + i d_i^*) \Psi_i - (a_i + i d_i) \Psi_{i-1}, \quad (5.3.5)$$

$$\text{где } a_i^* = \frac{E^2 F_{i+0,5}^2 - E F_{i+0,5} \omega^2 h^2 m_i + E^2 F_{i+0,5} F_{i-0,5} +}{E^2 F_{i+0,5}^2 + \omega^2 b_{i+0,5}^2} \dots \rightarrow \\ \leftarrow \dots \frac{+ \omega^2 b_{i+0,5}^2 + \omega^2 b_{i+0,5} b_{i-0,5}}{+ \omega^2 b_{i+0,5}^2 + \omega^2 b_{i+0,5} b_{i-0,5}};$$

$$d_i^* = \frac{\omega^3 h^2 m_i b_{i+0,5} - E F_{i-0,5} \omega b_{i+0,5} + E F_{i+0,5} \omega b_{i-0,5}}{E^2 F_{i+0,5}^2 + \omega^2 b_{i+0,5}^2}; \quad (5.3.6)$$

$$a_i = \frac{E F_{i+0,5} F_{i-0,5} + \omega^2 b_{i+0,5} b_{i-0,5}}{E^2 F_{i+0,5}^2 + \omega^2 b_{i+0,5}^2};$$

$$d_i = \frac{E F_{i+0,5} \omega b_{i-0,5} - E F_{i-0,5} \omega b_{i+0,5}}{E^2 F_{i+0,5}^2 + \omega^2 b_{i+0,5}^2}.$$

Функции формы вынужденных колебаний будем считать комплексными числами, так что $\Psi_i = U_i + i V_i$, $\Psi_{i+1} = U_{i+1} + i V_{i+1}$ и т.д.

Соотношения между действительными и мнимыми частями на ($i + 1$)-м и i -м шагах интегрирования имеют вид

$$U_{i+1} = a_i^* U_i - d_i^* V_i - a_i U_{i-1} + d_i V_{i-1}; \quad (5.3.7)$$

$$V_{i+1} = a_i^* V_i + d_i^* U_i + a_i V_{i-1} - d_i U_{i-1}.$$

Учитывая, что носовая часть ракеты свободна от нагрузок, а к концевой части приложена возмущающая сила $P = P_0 e^{i\omega t}$, на левом конце стержня получаем $U_0 = 1$, $V_0 = 1$, $V_1 = 0$, $U_1 = 1$. Из условия на правом конце стержня определим комплексные масштабы форм Ψ_i :

$$U_M = \frac{1}{D} \frac{P_0 h}{m_j} U_{\Psi_j}; \quad V_M = -\frac{1}{D} \frac{P_0 h}{m_j} V_{\Psi_j}; \quad D = U_{\Psi_j}^2 + V_{\Psi_j}^2; \\ A_M = \sqrt{U_M^2 + V_M^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi_M = \frac{V_M}{U_M}. \quad (5.3.8)$$

Здесь $U_{\Psi_j} = (U_j - U_{j-1}) c_j^2 - 2\omega \epsilon_j (V_j - V_{j-1})$;

$$V_{\Psi_j} = 2\omega \epsilon_j (U_j - U_{j-1}) + c_j^2 (V_j - V_{j-1}); \quad c_j^2 = \frac{EF_j}{m_j}; \quad \epsilon_j = \frac{b_j}{2m_j}.$$

Таким образом, форму вынужденных колебаний неоднородного корпуса представляют комплексными коэффициентами формы, которые для произвольного i -го сечения имеют вид

$$\Psi_i = A(x_i, \omega) e^{i\varphi(x_i, \omega)};$$

$$A(x_i, \omega) = A_{\Psi_i} A_M;$$

$$\varphi(x_i, \omega) = \varphi_{\Psi_i} + \varphi_M.$$

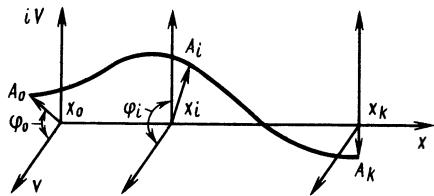


Рис. 5.7.

Форму вынужденных колебаний изображают пространственной кривой (рис. 5.7), параметрически зависящей от вынуждающей частоты ω .

В случае однородного стержня при отсутствии демпфирования ($b = 0$) форма вынужденных колебаний определяется функцией

$$\Psi(x, \omega) = -\frac{P_0 \cos \alpha x}{\alpha E F_0 \sin \alpha l},$$

где $\alpha = \omega \sqrt{m_0/E F_0}$ ($\alpha \neq n\pi/l$, $n = 1, 2, \dots$).

Приведенная методика расчета форм вынужденных колебаний несколько усложняется, когда в некоторых сечениях корпуса следует учитывать упруго подвешенные приведенные массы баков с жидкостью и двигателя. Их перемещения нужно определять в подвижной системе координат, так

как упругий корпус совершает колебания. В этом случае вводится комплексный коэффициент формы вынужденных колебаний присоединенных масс

$$\Psi_k = U_k + iV_k,$$

$$\text{где } \Psi_k = \Psi_i - \frac{\omega_k^2 + i2\epsilon_k\omega}{\omega_k^2 - \omega^2 + i2\epsilon_k\omega}; \quad \omega_k^2 = \frac{K_k}{m_k}; \quad \epsilon_k = \frac{b_k}{2m_k}$$

(номер тона колебаний в каждом баке обозначен k).

Пусть силовое кольцо бака, где приложена сосредоточенная сила, обусловленная колебаниями бака с жидкостью, расположено между i -й и $(i+1)$ -й точками деления стержня. Комплексную форму колебаний следует вычислять по формулам

$$\Psi_{i+1} = U_{i+1} + iV_{i+1};$$

$$\begin{aligned} U_{i+1} &= \frac{1}{\alpha^{*2} + \beta^{*2}} [(\alpha^* EF_i + \beta^* \omega b_i) U_{i-1} + (\beta^* EF_i - \alpha^* \omega b_i) V_{i-1} + \\ &\quad + (\alpha\alpha^* + \beta\beta^*) U_i + (\alpha\beta^* - \beta\alpha^*) V_i + 2h\omega^2 \alpha^* \sum_{k=1}^{(0)} m_k \Psi_k]; \\ V_{i+1} &= \frac{1}{\alpha^{*2} + \beta^{*2}} [(\alpha^* EF_i + \beta^* \omega b_i) V_{i-1} - (\beta^* EF_i - \alpha^* \omega b_i) U_{i-1} + \\ &\quad + (\alpha\alpha^* + \beta\beta^*) V_i - (\alpha\beta^* - \beta\alpha^*) U_i - 2h\omega^2 \beta^* \sum_{k=1}^{(0)} m_k \Psi_k]; \end{aligned} \quad (5.3.9)$$

$$\alpha^* = EF_i - EF_{i+1} a_{i+1}^* + \omega b_{i+1} d_{i+1}^*;$$

$$\beta^* = \omega b_i - \omega b_{i+1} a_{i+1}^* - EF_{i+1} d_{i+1}^*;$$

$$\alpha = 2m_i h^2 \omega^2 - EF_{i+1} - EF_{i+1} a_{i+1} + \omega b_{i+1} d_{i+1};$$

$$\beta = -\omega b_{i+1} - \omega b_{i+1} a_{i+1} - EF_{i+1} d_{i+1}.$$

Здесь $a_{i+1}^*, d_{i+1}^*, a_{i+1}, d_{i+1}$ определяются по формулам (5.3.6), в которых нужно изменить символы i , $(i+0,5)$ и $(i-0,5)$ на $(i+1)$, i , $(i-1)$ соответственно.

Определим правило перехода через сечение $x_i = x_{\text{дв}}$, в котором упруго подвешен двигатель. Предполагая, что внешняя сила — отклонение тяги двигателя — изменяется по гармоническому закону $P(t) = P_0 e^{i\omega t}$, будем

определять комплексную форму колебаний двигателя, зависящую от формы колебаний Ψ_i корпуса в данном сечении, по формуле

$$\Psi_{\text{дв}} = \frac{P_0}{m_{\text{дв}}(\omega_{\text{дв}}^2 - \omega^2 + i2\epsilon_{\text{дв}}\omega)} + \frac{\Psi_i(\omega_{\text{дв}} + i2\epsilon_{\text{дв}}\omega)}{\omega_{\text{дв}}^2 - \omega^2 + i2\epsilon_{\text{дв}}\omega}.$$

Сила, передаваемая от двигателя на корпус,

$$N_{\text{дв}} = (P_0 + m_{\text{дв}}\omega^2\Psi_i) \frac{\omega_{\text{дв}}^2 + i2\epsilon_{\text{дв}}\omega}{\omega_{\text{дв}}^2 - \omega^2 + i2\epsilon_{\text{дв}}\omega} = \\ = (P_0 + m_{\text{дв}}\omega^2\Psi_i) (U'_{\text{дв}} + iV'_{\text{дв}}).$$

Комплексные формы колебаний в сечениях ракеты после двигателя определяют, начиная с правого свободного конца стержня, причем $\Psi_j = 1$ и $\Psi_{j-1} = 1$. Соотношение между формами колебаний для всех сечений, расположенных справа от $x_{\text{дв}}$, имеет вид

$$\Psi_{i-1} = (r_i^* + ip_i^*)\Psi_i - (r_i' + ip_i')\Psi_{i+1}, \quad i = j-1, \dots, i_{\text{дв}} + 1, i_{\text{дв}}. \quad (5.3.10)$$

Масштабы форм колебаний в сечениях до и после места подвески двигателя $A_M e^{i\varphi_M}$ и $A_{M,\text{дв}} e^{i\varphi_{M,\text{дв}}}$ определяются из условий сопряжения участков в сечении $x_{i_{\text{дв}}}$:

$$N_{i_{\text{дв}}+1} = N_{i_{\text{дв}}} - N_{\text{дв}} - m_{i_{\text{дв}}} h \omega^2 \Psi_{i_{\text{дв}}}.$$

Причем

$$N_{i_{\text{дв}}+1} = h \omega^2 A_M e^{i\varphi_M} (U'_M + iV'_M) \sum_{i=i_{\text{дв}}+1}^{i=j-1} m_i \Psi_i; \quad (5.3.11)$$

$$N_{i_{\text{дв}}} = -\omega^2 A_M e^{i\varphi_M} (h \sum_{i=0}^{i_{\text{дв}}-1} m_i \Psi_i + \sum_{k=1}^{k(0)} m_k \Psi_k);$$

$$A_{M,\text{дв}} e^{i\varphi_{M,\text{дв}}} = A_M e^{i\varphi_M} (U'_M + iV'_M);$$

$$U'_M = \frac{1}{D'} [U_{i_{\text{дв}}+1}(2U_{i_{\text{дв}}} - U_{i_{\text{дв}}-1}) + V_{i_{\text{дв}}+1}(2V_{i_{\text{дв}}} - V_{i_{\text{дв}}-1})];$$

$$\begin{aligned}
V_M' &= \frac{1}{D'} \left[-V_{i_{\text{ДВ}}+1} (2U_{i_{\text{ДВ}}} - U_{i_{\text{ДВ}}-1}) - U_{i_{\text{ДВ}}+1} (2V_{i_{\text{ДВ}}} - V_{i_{\text{ДВ}}-1}) \right]; \\
D' &= U_{i_{\text{ДВ}}+1}^2 + V_{i_{\text{ДВ}}+1}^2; \quad A_M e^{i\varphi_M} = (U_M + iV_M) P_0; \\
U_M &= -\frac{a_M U_{\text{ДВ}}' + b_M V_{\text{ДВ}}'}{a_M^2 + b_M^2}; \quad V_M = -\frac{a_M V_{\text{ДВ}}' - b_M U_{\text{ДВ}}'}{a_M^2 + b_M^2}; \\
a_M &= h \left(\sum_{i=0}^{i=i_{\text{ДВ}}} m_i U_i + U_M' \sum_{i=i_{\text{ДВ}}+1}^{i=j-1} m_i U_i - V_M' \sum_{i=i_{\text{ДВ}}+1}^{i=j-1} m_i V_i \right) + \quad (5.3.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k &= k(0) \\
&+ \sum_{k=1}^{i=i_{\text{ДВ}}} m_k U_k + m_{\text{ДВ}} (U_{i_{\text{ДВ}}} U_{\text{ДВ}}' - V_{i_{\text{ДВ}}} V_{\text{ДВ}}'); \\
b_M &= h \left(\sum_{i=0}^{i=i_{\text{ДВ}}} m_i V_i + V_M' \sum_{i=i_{\text{ДВ}}+1}^{i=j-1} m_i U_i + U_M' \sum_{i=i_{\text{ДВ}}}^{i=j-1} m_i V_i \right) + \\
k &= k(0) \\
&+ \sum_{k=1}^{i=i_{\text{ДВ}}} m_k V_k + m_{\text{ДВ}} (U_{i_{\text{ДВ}}} U_{\text{ДВ}}' - V_{i_{\text{ДВ}}} V_{\text{ДВ}}').
\end{aligned}$$

С учетом подсчитанных масштабов комплексные формы вынужденных колебаний корпуса для сечений до точки подвески двигателя имеют вид

$$\Psi(x, \omega) A_M e^{i\varphi_M} = P_0 [(U_i U_M - V_i V_M) + i(U_i U_M + V_i V_M)].$$

Величины U_i , V_i определяются по формулам (5.3.7), (5.3.9), а масштабы – по формулам (5.3.8).

Для участков после точки подвески двигателя

$$\begin{aligned}
\Psi(x, \omega) A_{M,\text{ДВ}} e^{i\varphi_{M,\text{ДВ}}} &= P_0 \left\{ [(U_i U_M - V_i V_M) U_M' - \right. \\
&- (U_i V_M + V_i U_M) V_M'] + i[V_M'' (U_i U_M - V_i V_M) + \right. \\
&\left. \left. + U_M' (U_i V_M + V_i U_M)] \right\},
\end{aligned}$$

где величины U_i и V_i , U_M' и V_M' , U_M и V_M подсчитываются соответственно по формулам (5.3.10), (5.3.11).

В заключение отметим, что ошибки в расчетах получаются незначительными, если сосредоточенные массы закреплять жестко, начиная с такого номера тона колебаний $k^{(0)}$, при котором $\omega_k^{(0)} \gg \omega$.

§ 5.4. КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОГО ТОПЛИВА В РАСХОДНЫХ МАГИСТРАЛЯХ

Низконапорные части магистралей подачи жидкого топлива в ЖРД современных ракет, как правило, бывают значительной длины, включают в себя повороты, разветвления, местные гидравлические сопротивления, сильфоны, гидравлические демпферы и в целом являются конструкциями малой жесткости. Из-за кавитации в преднасосах в них может возникать смесь жидкого и парообразного топлива, что еще более увеличивает податливость столба жидкости. Колебания частей корпуса, к которым крепятся топливные магистрали, а также нестационарные режимы работы насосных агрегатов вызывают продольные колебания в трубопроводах. Возмущения давления и скорости жидкости перед ТНА будут зависеть от колебаний конструкции и гидродинамических возмущений на входе трубопровода.

Рассмотрим гидродинамические процессы в длинной прямой трубе, сначала предполагая, что она не деформируется и жестко закреплена на корпусе ракеты.

Будем считать топливо идеальной (внутреннее трение отсутствует) и сжимаемой жидкостью, а поток в трубопроводе одномерным. Предположим, что скорость невозмущенного потока жидкости v^* мала по сравнению со скоростью звука в невозмущенной жидкости

$$a_0 = \sqrt{E_0/\rho^*}.$$

Возмущения скорости жидкости $v(x, t)$ и давления $p(x, t)$ будем считать малыми. Запишем линеаризованные уравнения возмущенного движения и неразрывности жидкости в трубопроводе:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + v^* \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + v^* \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} + \rho^* \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (5.4.1)$$

Здесь v^*, ρ^* – невозмущенные скорость и плотность жидкости.

С помощью соотношений $M = v^*/a_0$, $\tau = a_0 t/l$, $\xi = x/l$, $\tilde{v}(\xi, \tau) = v/a_0$, $\tilde{p}(\xi, \tau) = p/(a_0^2 \rho^*)$, где l – длина трубы, перепишем систему уравнений (5.4.1) в безразмерной форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tau} + M \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \xi} &= 0; \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tau} + M \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi} &= 0. \end{aligned} \quad (5.4.2)$$

Уравнения (5.4.2) эквивалентны дифференциальному уравнению второго порядка

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \xi^2} - 2M \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \xi \partial \tau} - \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tau^2} = 0. \quad (5.4.3)$$

Определив из (5.4.3) $\tilde{v}(\xi, \tau)$, с помощью первого уравнения системы (5.4.2) можно найти

$$\tilde{p}(\xi, \tau) = -M\tilde{v}(\xi, \tau) - \int \frac{\partial \tilde{v}(\xi, \tau)}{\partial \tau} d\xi. \quad (5.4.4)$$

Решения уравнений (5.4.3) и (5.4.4) должны удовлетворять граничным условиям, в которых устанавливаются соотношения между параметрами $\tilde{v}(\xi, \tau)$ и $\tilde{p}(\xi, \tau)$ на концах трубопровода ($\xi_k = 0$ или $\xi_k = 1$). Например, для открытого в акустическом смысле конца трубы граничное условие имеет вид $\tilde{p}(\xi_k, \tau) = 0$, для закрытого конца трубы $\tilde{v}(\xi_k, \tau) = 0$.

Соотношение между возмущениями давления и скорости при колебаниях, которые устанавливаются в произвольном сечении трубопровода с жидкостью, принято выражать комплексным числом, обычно называемым акустическим сопротивлением – импедансом,

$$Z = \frac{\tilde{p}(\xi, \tau)}{\tilde{v}(\xi, \tau)} = M\tilde{\psi} + i\alpha.$$

Действительная часть $M\tilde{\psi}$ комплексного числа характеризует активное сопротивление, обусловленное трением в потоке, коэффициент α мнимой части – реактивное сопротивление, вызванное наличием сосредоточенных упругостей, сильфонов, объемов парогазовой смеси. Значениям комплексного акустического сопротивления на концах трубопровода соответствуют граничные импедансы.

Определим характеристики собственных колебаний жидкости в жесткой прямой трубе. Будем искать решения уравнений (5.4.3) и (5.4.4) методом Фурье. Обозначив через $\tilde{\omega}$ безразмерную собственную частоту колебаний, запишем:

$$\tilde{v}(\xi, \tau) = \tilde{V}(\xi) e^{i\tilde{\omega}\tau}, \quad \tilde{p}(\xi, \tau) = \tilde{p}(\xi) e^{i\tilde{\omega}\tau}.$$

Подставляя данные решения в (5.4.3) и (5.4.4), получим уравнения

$$(1 - M^2) \frac{d^2 V}{d \xi^2} - i2M\tilde{\omega} \frac{d \tilde{V}}{d \xi} + \tilde{\omega}^2 \tilde{V}(\xi) = 0; \quad (5.4.5)$$

$$\tilde{P}(\xi) = -M \tilde{V}(\xi) - i\tilde{\omega} \int \tilde{V}(\xi) d\xi. \quad (5.4.6)$$

Частное решение уравнения (5.4.5) будем искать в виде

$$\tilde{V}(\xi) = C e^{\lambda \xi}. \quad (5.4.7)$$

В общем случае частоты колебаний $\tilde{\Omega}$ могут быть переменными величинами и их можно представить в виде комплексных чисел:

$$\tilde{\Omega} = i\tilde{\nu} + \tilde{\omega},$$

где коэффициент $\tilde{\nu}$ характеризует затухание частоты колебаний.

Для собственных колебаний полагаем $\tilde{\nu} = 0$, $\tilde{\omega} = \tilde{\Omega}$. Используя (5.4.7), из (5.4.5) получим алгебраическое уравнение

$$(1 - M^2)\lambda^2 - i2M\tilde{\omega}\lambda + \tilde{\omega}^2 = 0,$$

корни которого $\lambda_1 = i\tilde{\omega}/(1 - M)$, $\lambda_2 = -i\tilde{\omega}/(1 + M)$. (5.4.8)

Общие решения уравнений (5.4.5) и (5.4.6)

$$\begin{aligned} \tilde{V}(\xi) &= C_1 e^{\lambda_1 \xi} + C_2 e^{\lambda_2 \xi}; \\ \tilde{P}(\xi) &= -C_1 e^{\lambda_1 \xi} + C_2 e^{\lambda_2 \xi} \end{aligned} \quad (5.4.9)$$

описывают формы колебаний возмущений скорости и давления в жидкости. Постоянные коэффициенты C_1 и C_2 нетрудно определить из граничных условий на концах трубопровода. Подставляя координаты $\xi = 0$ и $\xi = 1$ в формулы (5.4.9), установим:

$$\tilde{V}(0) = C_1 + C_2; \quad \tilde{V}(1) = C_1 e^{\lambda_1} + C_2 e^{\lambda_2}; \quad \tilde{P}(0) = -C_1 + C_2;$$

$$\tilde{P}(1) = -C_1 e^{\lambda_1} + C_2 e^{\lambda_2},$$

$$\text{откуда } C_1 = \frac{\tilde{V}(0) - \tilde{P}(0)}{2}; \quad C_2 = \frac{\tilde{V}(0) + \tilde{P}(0)}{2}, \quad (5.4.10)$$

$$\text{или } C_1 = \frac{\tilde{V}(1) - \tilde{P}(1)}{2 e^{\lambda_1}}; \quad C_2 = \frac{\tilde{V}(1) + \tilde{P}(1)}{2 e^{\lambda_2}}$$

$$\text{и далее } \tilde{V}(1) = \frac{e^{\lambda_2} + e^{\lambda_1}}{2} \tilde{V}(0) + \frac{e^{\lambda_2} - e^{\lambda_1}}{2} \tilde{P}(0);$$

$$\tilde{P}(1) = \frac{e^{\lambda_2} - e^{\lambda_1}}{2} \tilde{V}(0) + \frac{e^{\lambda_2} + e^{\lambda_1}}{2} \tilde{P}(0). \quad (5.4.11)$$

Полученные соотношения часто применяются в расчетах электрических цепей и называются уравнениями четырехполюсника.

Определим собственные частоты колебаний жидкости для частных случаев граничных условий. Сначала рассмотрим трубу, акустически открытую с одного конца ($\xi = 0$) и закрытую с другого ($\xi = 1$). Граничные условия в данном случае можно записать в виде $\tilde{P}(0) = 0$, $\tilde{V}(1) = 0$. Из первой формулы (5.4.11) получим $e^{\lambda_2} + e^{\lambda_1} = 0$, или $e^{\lambda_2} \left(1 + \frac{e^{\lambda_1}}{e^{\lambda_2}}\right) = 0$.

Так как $e^{\lambda_2} \neq 0$, справедливо равенство $e^{\lambda_1} = -1$. Прологарифмировав это выражение, получим $\lambda_2 - \lambda_1 = 0$. В соответствии с формулами (5.4.8) запишем

$$-\frac{2\tilde{\omega}_i}{1 - M^2} = 0, \text{ или } i \sin \frac{2\tilde{\omega}}{1 - M^2} = 0. \quad (5.4.12)$$

Последнее равенство выполняется, если $2\tilde{\omega}_n / (1 - M^2) = (2n - 1)\pi$, $n = 1, 2, 3 \dots$ Поэтому безразмерную частоту собственных колебаний подсчитывают по формуле

$$\tilde{\omega}_n = \frac{(2n - 1)\pi(1 - M^2)}{2}, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (5.4.13)$$

Переходя к размерным величинам, запишем

$$\omega_n = \frac{\tilde{\omega}_n a_0}{l} = \frac{(2n - 1)\pi(1 - M^2)a_0}{2l}, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (5.4.14)$$

Если рассматривается труба, акустически открытая с обоих концов, $\tilde{P}(0) = 0$, $\tilde{P}(1) = 0$. Применив ранее приведенную методику, вместо равенства (5.4.12) получим соотношение

$$\frac{2\tilde{\omega}_n}{1 - M^2} = 2n\pi, \quad n = 1, 2, \dots,$$

и формулы для определения собственных частот колебаний

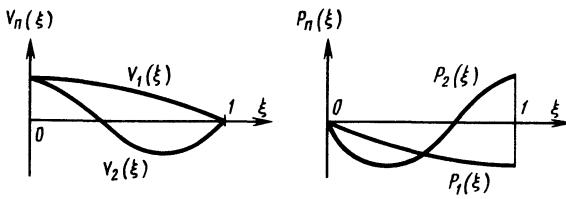


Рис. 5.8.

$$\tilde{\omega}_n = n(1 - M^2)\pi; \quad \omega_n = [n\pi a_0(1 - M^2)]/l, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.4.15)$$

Формы собственных колебаний скорости $\tilde{V}(\xi)$ и давления $\tilde{P}(\xi)$ в трубе, закрытой с одного конца, легко получить из формул (5.4.9), полагая в них $C_1 = C_2$:

$$\tilde{V}_n(\xi) = C_1 [e^{\lambda_1 n \xi} + e^{\lambda_2 n \xi}];$$

$$\tilde{P}_n(\xi) = C_1 [e^{\lambda_2 n \xi} - e^{\lambda_1 n \xi}].$$

При $M = 0$ эти функции характеризуют стоячие волны в трубопроводе. В данном случае распределения возмущений скорости и давления по длине трубы описываются одними и теми же координатными функциями. На рис. 5.8 приведены графики собственных форм колебаний для первых двух тонов $n = 1$ и $n = 2$. Амплитуды колебаний каждого тона на концах трубы условно приведены к единице. Изменения по времени τ функций $V(\xi)$ и $P(\xi)$ для стоячих волн показаны на рис. 5.9.

Если требуется определить параметры распределения акустических импульсов по длине трубы, формулируют и решают задачу о бегущей волне. В бегущей волне акустические импульсы распространяются по потоку со скоростью, равной сумме скоростей звука и потока, против потока — со скоростью, равной разности скоростей звука и потока. При движении вдоль оси трубы ξ амплитуда бегущих волн остается неизменной. На рис. 5.10 показаны бегущие волны акустических импульсов

$$\tilde{u}_1(\xi, \tau) = \frac{\tilde{v}(\xi, \tau) + \tilde{p}(\xi, \tau)}{2} \quad \text{и} \quad \tilde{u}_2(\xi, \tau) = \frac{\tilde{v}(\xi, \tau) - \tilde{p}(\xi, \tau)}{2}$$

в различные моменты времени τ .

При исследовании вынужденных колебаний жидкости в однородной трубе будем предполагать, что возмущенное движение в трубопроводе возникает вследствие возмущений на границах трубы $\xi = 0$ или $\xi = 1$ из-за колебаний дна бака, пульсации давления в камере сгорания, возмущений скорости потока при колебаниях насоса. Воспользуемся уравнениями

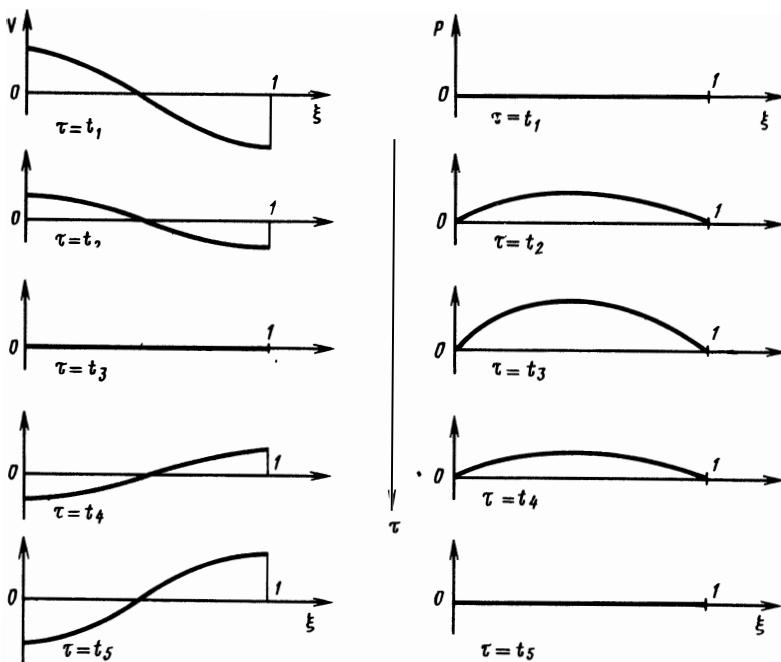


Рис. 5.9.

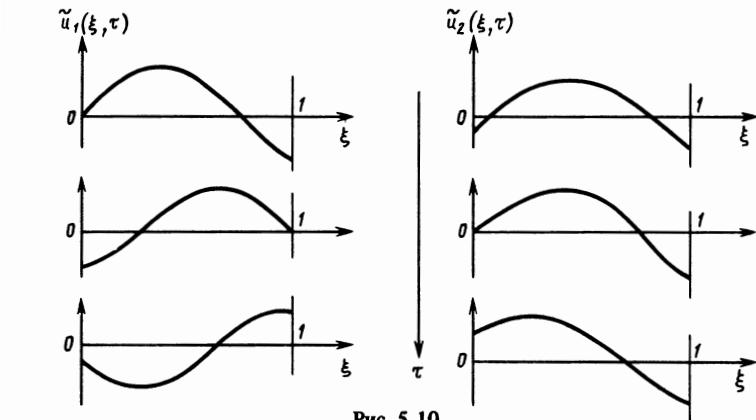


Рис. 5.10.

четырехполюсника (5.4.11), полагая, что влияние числа M учитывается только на границах трубы. Вместо (5.4.11) и (5.4.8) можно записать

$$\begin{aligned} \tilde{V}(1) &= \tilde{V}(0) \operatorname{ch}\lambda + \tilde{P}(0) \operatorname{sh}\lambda; & \tilde{P}(1) &= \tilde{V}(0) \operatorname{sh}\lambda + \tilde{P}(0) \operatorname{ch}\lambda; \\ \lambda_1 &= \frac{i\tilde{\Omega}}{1-M}; & \lambda_2 &= \frac{-i\tilde{\Omega}}{1+M}; & \tilde{\Omega} &= \tilde{\omega} + i\nu. \end{aligned} \quad (5.4.16)$$

Определим динамические свойства топливной магистрали с присоединенным к ней центробежным насосом, работающим в режиме развитой кавитации. Явление кавитации заключается в образовании газовых полостей на некоторых участках потока жидкости вследствие падения давления ниже давления насыщающих паров. Наличие газовых полостей равнозначно некоторой сосредоточенной упругости на входе в насос, существенно влияющей на динамические характеристики трубопроводов. Границное условие в сечении на выходе расходной магистрали, совпадающим со входом в насос, определяется, по существу, зависимостью между давлением и скоростью жидкости

$$p(\xi)/v(\xi) = Z_H,$$

где Z_H – акустическое сопротивление (импеданс) на входе в насос.

Хотя физика процессов, происходящих в насосе, и соответствующая математическая модель, описывающая их, сложны, акустическое сопротивление Z_H можно определить достаточно простым соотношением [11]

$$Z_H = \zeta (Z_d - \rho^* g \kappa) e^{i\omega \tau^*}, \quad (5.4.17)$$

где Z_d – акустическое сопротивление камеры сгорания двигателя; τ^* – время запаздывания, т.е. время, в течение которого изменения давления и скорости потока на выходе из насоса передаются на его вход; это время может быть оценено по формуле

$$\tau^* = l^*/(a_0 - v_H^*),$$

где l^* , v_H^* – характеристическая длина и среднее значение относительной скорости в проточной части центробежного колеса; a_0 – скорость звука в невозмущенной жидкости.

Коэффициенты, входящие в формулу (5.4.17), определяются соотношениями $\zeta = F_1/F_2$; $\kappa = \partial H_H / \partial v_H$, в которых F_1, F_2 – площади проходных сечений расходной и напорной магистрали, присоединяемых к насосу; H_H – напор центробежного насоса; коэффициент κ определяется по напорно-расходной характеристике насоса.

Соотношения между давлением и скоростью потока жидкости в трубопроводе определяются уравнениями (5.4.2) при $M = 0$. Границные условия на входе в трубу

$$\tilde{P}(0) = 0, \quad (5.4.18)$$

а на выходе –

$$\tilde{P}(1) = Z_H \tilde{V}(1). \quad (5.4.19)$$

Путем подстановки (5.4.18), (5.4.19) в равенства (5.4.16) получим характеристическое уравнение

$$\frac{1 - e^{\lambda_1 - \lambda_2}}{1 + e^{\lambda_1 - \lambda_2}} = Z_H.$$

При $M^2 \cong 0$ имеем $\lambda_1 - \lambda_2 = i \cdot 2 \tilde{\Omega} = -2\tilde{\nu} + i \cdot 2\tilde{\omega}$, $e^{i \cdot 2 \tilde{\Omega}} = \frac{1 - Z_H}{1 + Z_H}$.

Правая часть последнего уравнения может быть представлена в показательной форме

$$e^{i \cdot 2 \tilde{\Omega}} = \Gamma e^{i\theta}, \quad (5.4.20)$$

где $\Gamma = \sqrt{\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2}$, $\theta = \operatorname{arctg} \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}$; $\frac{1 - Z_H}{1 + Z_H} = \tilde{\alpha} + i\tilde{\beta}$.

Приравняв отдельно вещественные и мнимые части равенства (5.4.20), получим формулы для коэффициента затухания ν и частоты собственных колебаний ω_n

$$\nu = \frac{a_0}{2l} \ln \Gamma, \quad \omega_n = \frac{a_0}{2l} (\theta + 2\pi n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Если выходной конец трубы акустически закрыт, то $Z_H = \infty$ и $\theta = 0$; тогда для частоты собственных колебаний получим известную формулу

$$\omega_n = \frac{\pi (2n + 1) a_0}{2l}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Для оценки влияния центробежного насоса на частоту собственных колебаний трубопровода примем, что согласно (5.4.17)

$$\operatorname{Re} Z_H = A \cos \omega \tau^*, \quad \operatorname{Im} Z_H = A \sin \omega \tau^*,$$

где $A = \xi (Z_d - \rho^* g k)$ – действительное и, как правило, положительное число.

Как видно из формулы (5.4.20), присоединение центробежного насоса будет увеличивать частоту собственных колебаний трубопровода, если $\operatorname{Im} Z_H > 0$, что будет иметь место при $0 < \omega \tau^* < \pi$.

Если же $\pi < \omega \tau^* < 2\pi$, то $\operatorname{Im} Z_H < 0$ и, следовательно, $\theta < 0$, в этом случае присоединение насоса к трубе уменьшает частоту собственных колебаний последней.

Решение одномерной задачи о колебаниях скорости и давления жид-

кости в абсолютно жесткой трубе можно распространить на движение жидкости в упругой трубе. Н.Е. Жуковский предложил движение потока сжимаемой жидкости в длинной упругой трубе рассматривать как движение жидкости в жесткой трубе, заменяя модуль сжатия жидкости E_0 эквивалентным модулем сжатия, учитывающим упругие деформации трубы:

$$E_3 = E_1 E_0 / (E_1 + E_0).$$

Для трубы круглого поперечного сечения радиуса r_0 толщиной δ $E_1 = E\delta/2r_0$, где E – модуль упругости материала трубы.

Таким образом, влияние упругости стенок трубопровода на колебания жидкости учитывается введением эквивалентной скорости звука

$$a_3 = \frac{a_0 a_1}{\sqrt{a_0^2 + a_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2r_0 \rho^*}{E\delta} + \frac{\rho^*}{E_0}}} . \quad (5.4.21)$$

Здесь $a_1 = \sqrt{E_1/\rho^*}$ – скорость звука в трубопроводе, если жидкость несжимаема; E_0 – модуль упругости жидкости – отношение увеличения давления к уменьшению объема, отнесенное к единице объема; ρ^* – плотность жидкости.

При впрыске в жидкость небольшого количества нерастворимого газа скорость звука определяется формулой

$$a = \frac{E_2 E_3}{[\eta E_3 + (1 - \eta) E_2] [\rho_2 \eta + (1 - \eta) \rho^*]} , \quad (5.4.22)$$

где E_2 – модуль упругости газа; E_3 – приведенный модуль упругости жидкости в упругой трубе; η – объемное отношение газа и жидкости; ρ_2, ρ^* – плотность газа и жидкости.

§ 5.5. СПОСОБЫ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ПРОДОЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РАКЕТЫ

Изложенные в § 5.2...5.4 методы позволяют рассчитать для конкретных исходных данных формы и частоты собственных колебаний отдельных звеньев замкнутой системы: упругих топливных баков, упругого корпуса и топливных магистралей. Если частоты собственных колебаний совпадают, необходимо учесть резонансные состояния звеньев и провести проверку устойчивости продольных колебаний замкнутой системы по какому-либо из частотных критерии (например, по критерию Найквиста).

Амплитудно-фазовые частотные характеристики (АФЧХ) разомкнутой системы строятся в области резонансных частот звеньев, так как в этом

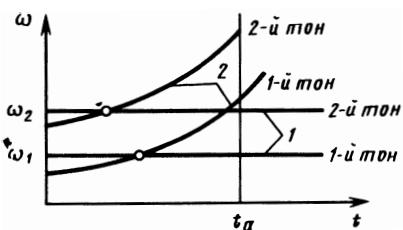


Рис. 5.11.

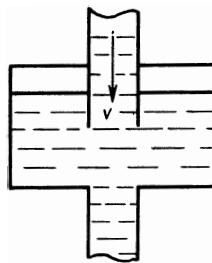


Рис. 5.12.

диапазоне частот вероятны колебания с возрастающей амплитудой. По характеру АФЧХ делаются заключения об устойчивости системы.

Можно предложить более простой подход к решению задачи, если считать, что при совпадении частот собственных колебаний звеньев возможна продольная неустойчивость. Для обеспечения продольной устойчивости необходимо разнести частоты собственных колебаний. На рис. 5.11 приведены графики зависимости собственных частот продольных колебаний трубопровода (1) и корпуса ракеты с баками, частично заполненными топливом (2) от времени. Продольная неустойчивость возможна при резонансных частотах ω_1 , ω_2 .

Чтобы резонансные явления не возникали на активном участке полета, можно увеличить или уменьшить собственные частоты продольных колебаний трубопровода или увеличить частоты собственных колебаний корпуса ракеты. Последний вариант практически неприемлем.

Для увеличения собственных частот продольных колебаний трубопровода нужно увеличить давление наддува в топливном баке, что не всегда можно осуществить, либо повысить жесткость конструкции трубы и сильфонов. Чтобы уменьшить собственные частоты продольных колебаний трубы, следует снизить модуль упругости материала, из которого изготовлен трубопровод, ввести аккумуляторы давления с демпфирующими устройствами, сильфоны (участки с поперечными или продольными гофрами), заменить круглое сечение трубы на эллиптическое, вдуть нерастворимый газ в магистраль, уменьшить упругость ее подвески. Наиболее распространенным способом уменьшения частот собственных колебаний трубы на практике является введение сосредоточенной упругости с регулируемыми параметрами – аккумулятора давления.

Первая частота собственных колебаний жидкости в трубе с аккумулятором давления определяется по формуле

$$\omega_1 = \frac{\theta}{2l} \sqrt{\frac{1}{C_{ж} + C_a} - \frac{2r_0 \rho^*}{\delta E}},$$

где $C_{ж}$, C_a – весовые податливости жидкости в трубе и аккумуляторе соответственно,

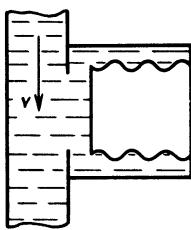


Рис. 5.13.

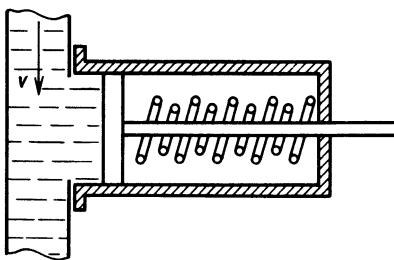


Рис. 5.14.

$$C_{\text{ж}} = \rho^* g \Pi_{\text{ж}}, \quad C_a = \rho^* g \Pi_a;$$

$\Pi_{\text{ж}}$ – объемная податливость жидкости,

$$\Pi_{\text{ж}} = \Delta V / (\Delta p V);$$

Π_a – объемная податливость аккумулятора,

$$\Pi_a = p_1 V_1 / (k^* p^2);$$

$p_1, \quad V_1$ – начальные давление и объем газа в аккумуляторе; k^* – удельная теплоемкость; p – давление газа в аккумуляторе.

При установке аккумулятора для обеспечения продольной устойчивости также необходимо увеличить как можно больше частоту собственных колебаний жидкости второго тона. Этого можно достигнуть за счет установки аккумулятора вблизи стыка трубопровода с ТНА.

Аккумуляторы по своей конструкции разделяются на газовые, пружинные и смешанные.

Упругость газового аккумулятора обеспечивается упругостью заполняющего его газа. Газовые аккумуляторы могут быть со свободной поверхностью (рис. 5.12) и с изолированной газовой полостью (рис. 5.13).

Схема пружинного аккумулятора приведена на рис. 5.14.

Весовая податливость такого аккумулятора рассчитывается по формуле

$$C_a = \rho^* g F_{\text{п}}^2 / k_a,$$

где $F_{\text{п}}$ – площадь поршня; k_a – жесткость пружины аккумулятора.

В аккумуляторе смешанного типа податливость обеспечивается не только объемом газа, но и упругими свойствами сильфона (см. рис. 5.13).

ГЛАВА 6. СТАБИЛИЗАЦИЯ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ РАКЕТ И КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ НА ПАССИВНЫХ УЧАСТКАХ ПОЛЕТА

§ 6.1. ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИКИ РАКЕТ И КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ НА ПАССИВНЫХ УЧАСТКАХ ПОЛЕТА

В предыдущих главах учебника были исследованы вопросы динамики баллистических ракет и ракет-носителей, предназначенных для выведения на различные орбиты полезной нагрузки, которая в конечном счете обеспечивает выполнение той или иной научно-технической и народнохозяйственной задачи, решаемой ракетно-космическим комплексом. В качестве полезной нагрузки могут рассматриваться головные части баллистических ракет, ракетно-космические разгонные блоки, пилотируемые и автоматические космические аппараты, орбитальные станции и др. Изучая динамику этих объектов, в дальнейшем будем пользоваться унифицированным их названием – космические аппараты (КА). Многие КА снабжены маршевыми или корректирующими двигательными установками, при работе которых реализуются режимы полета, аналогичные тем, которые в основном осуществляются во время полета баллистической ракеты и ракеты-носителя КА. Эти режимы соответствуют активным участкам полета. На активных участках полета КА могут быть использованы практически без изменений изложенные в предыдущих главах методы исследования задач динамики.

Вместе с тем движение КА происходит в специфических условиях. Большую часть времени занимает полет аппарата с выключенным маршевым реактивным двигателем (пассивные участки траектории). Уровень внешнего силового воздействия, за исключением воздействия гравитационных полей, как правило, невелик. Более того, силовые воздействия различного происхождения не одновременны. В общем случае повороты аппарата вокруг центра масс изменяют параметры его движения, так как меняется характер взаимодействия КА с внешней средой. Однако в космическом полете малые силы и моменты, возникающие при вращении аппарата, только в результате длительного воздействия могут привести к сколько-нибудь заметным изменениям параметров движения центра масс КА. Поэтому движение КА можно представить как два независимых движения: движение центра масс и вращение вокруг центра масс¹.

В данной главе рассматриваются пассивные участки траектории полета КА и предполагается, что угловое движение КА не оказывает влияния на движение его центра масс. Основное внимание уделяется проблемам,

¹ Участки движения ракет и КА с выключенными маршевыми двигателями в плотной атмосфере, где аэrodинамическое воздействие на объект может быть соизмеримо с воздействием включенной двигательной установки, условно отнесем к активным участкам полета и не будем здесь рассматривать.

связанным с ориентацией аппарата и стабилизацией его углового движения. Так как запасы энергии на КА ограничены, важно выбрать экономичные режимы управления его угловым движением. Детерминированность внешних сил и моментов, действующих на КА, иногда позволяет использовать их для пассивной стабилизации. Поэтому в учебнике рассмотрены пассивные и активные способы ориентации и угловой стабилизации аппарата с указанием методов расчета энергетических затрат.

Условимся считать главными режимами углового движения КА ориентацию и стабилизацию. Под ориентацией понимается процесс углового движения по заданному закону жестко связанной с аппаратом системы координат относительно опорной (базовой) системы. Ориентация как некоторое угловое движение КА в частных случаях может сводиться к совмещению в определенные моменты времени соответствующих осей связанный и опорной систем координат или к отклонению осей указанных систем координат друг относительно друга на заранее определенные углы. Ориентация КА необходима для выполнения программы полета.

Степень точности ориентации определяется в каждом конкретном случае в зависимости от решаемых в полете задач и различна перед включением маршевого реактивного двигателя, перед сближением двух космических аппаратов, перед сеансами связи, подзарядки аккумуляторов с помощью солнечных батарей, перед выполнением научных экспериментов, навигационных измерений и т.д.

Стабилизацией принято называть динамический процесс, с помощью которого ограничиваются не предусмотренные программой полета угловые движения связанных с аппаратом осей координат относительно соответствующих осей опорной системы. Стабилизация осуществляется в любом случае ориентированного движения КА по мере возникновения отклонений от программного движения из-за воздействия возмущений.

Нередко специалисты по космической технике под термином "стабилизация" понимают частный случай сформированного понятия стабилизации, а именно компенсацию нежелательных угловых движений или отклонений в тех случаях, когда вращение аппарата влияет на параметры движения его центра масс. Имеются в виду активные участки полета КА с работающей двигательной установкой или вход в атмосферу планет. Если же вращение аппарата не оказывается на движении его центра масс, то ликвидацию нежелательных угловых отклонений по традиции называют термином "ориентация", а не "стабилизация". Такой подход можно оправдать принципиально различными техническими возможностями обеспечения углового движения аппарата в режиме стабилизации на пассивных и активных участках траектории. Действительно, стабилизация КА на пассивном участке траектории осуществляется, так же как и ориентация, единой системой управления с оптическими датчиками. Возмущения в условиях космического полета относительно невелики и скомпенсировать их можно с помощью управляющих исполнительных органов, отрабатывающих сигналы приборов ориентации. При работе маршевого реактивного двигателя или

на участке спуска аппарата в атмосфере оптические приборы неработоспособны. Кроме того, возмущения, действующие на КА, велики, и стабилизация осуществляется с помощью более точных средств — гироскопических приборов и управляющих реактивных двигателей.

В дальнейшем мы будем называть стабилизацией любое устранение нежелательных угловых движений (отклонений) КА независимо от того, происходит оно на активном или пассивном участке полета и с помощью каких технических средств осуществляется.

§ 6.2. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ, ПРИМЕНЯЕМЫЕ В ДИНАМИКЕ КА

При осуществлении маневров на орбите, коррекции траектории движения, перед сеансами связи и другими операциями, предусмотренными программой полета КА, необходимо ориентировать корпус аппарата в пространстве относительно некоторой базовой (опорной) системы координат, положение которой заранее известно. Базовую систему координат выбирают с учетом характера решаемой задачи и возможностей аппаратурного решения. Рассмотрим некоторые системы координат и исследуем возможность их использования в качестве базовой системы.

По расположению центров системы координат можно разделить на планетоцентрические (с началом в центре небесного тела), планетотопические (с началом на поверхности планеты), космоцентрические (с началом вне планетных тел или КА) и связанные с КА (с началом в центре масс КА).

В качестве примера планетоцентрической системы рассмотрим геоцентрическую систему координат $O_0\xi\eta\xi$, начало которой совпадает с центром Земли (рис. 6.1). Положение системы неизменно в инерционном пространстве. Ось $O_0\eta$ направлена в сторону Северного полюса и совпадает с осью вращения Земли. Ось $O_0\xi$ расположена в плоскости экватора и направлена в точку весеннего равноденствия (в точку на экваторе небесной сферы, где Солнце в процессе его видимого с Земли годичного движения переходит из южной полусфера в северную). Ось $O_0\xi$ проведена так, чтобы образовалась правая система координат. Построенную таким образом систему координат в дальнейшем будем рассматривать как инерциальную.

Для перехода к орбитальной системе координат, рассматриваемой ниже, удобно вести промежуточную планетоцентрическую систему координат,

одна из осей которой частично определяет положение орбиты КА. Это так называемая узловая геоцентрическая система координат $O_0X^*Y^*Z^*$ (см. рис. 6.1).

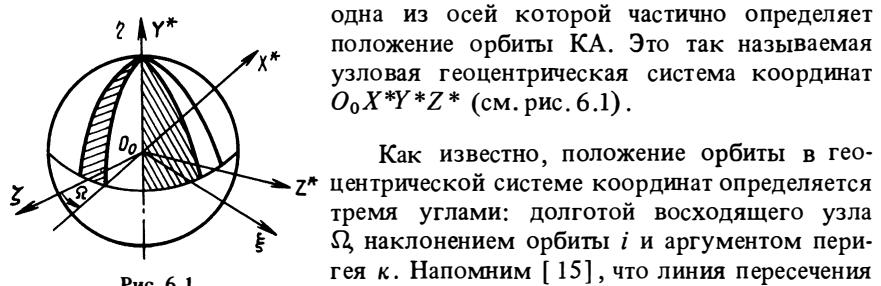


Рис. 6.1.

Как известно, положение орбиты в геоцентрической системе координат определяется тремя углами: долготой восходящего узла Ω , наклонением орбиты i и аргументом перигея κ . Напомним [15], что линия пересечения

плоскости орбиты с плоскостью экватора называется линией узлов. Восходящим узлом орбиты является точка, в которой КА переходит из южной полусфера в северную.

Долгота восходящего узла Ω – угол, который отсчитывается в плоскости экватора против часовой стрелки, если смотреть с Северного полюса, между направлением на точку весеннего равноденствия и линией узлов.

Наклонение орбиты i – угол между плоскостью экватора и плоскостью орбиты, отсчитываемый против часовой стрелки, если смотреть со стороны восходящего узла.

Аргумент перигея κ – угол в плоскости орбиты, который отсчитывается от направления на восходящий узел до направления на перигей орбиты. Положение КА на орбите задается аргументом широты u , который связан с истинной аномалией θ соотношением

$$u = \kappa + \theta.$$

Аргумент широты u – угол, отсчитываемый в плоскости орбиты от восходящего узла в направлении движения КА.

Истинная аномалия θ – угол между прямыми, проведенными из притягивающего центра орбиты вperiцентри и точку нахождения КА.

Положение орбиты в инерциальной системе координат из-за возмущений, вызванных несферичностью Земли, сопротивлением атмосферы, притяжением Солнца, Луны и т.д., непрерывно меняется. Будем предполагать, что оси узловой геоцентрической системы координат связаны с мгновенным положением орбиты и ориентированы в инерциальном пространстве неизменно. Ось $O_0 X^*$ расположена вдоль мгновенного направления линии узлов (см. рис. 6.1).

Узловая геоцентрическая система координат $O_0 X^* Y^* Z^*$ получена поворотом инерциальной системы $O_0 \xi \eta \zeta$ вокруг оси $O_0 \eta$ на угол $\Omega + \pi/2$.

Косинусы углов между осями инерциальной и узловой систем координат численно равны проекциям единичных векторов, направленных по осям узловой системы координат, на инерциальные оси. Значения направляющих косинусов приведены в табл. 6.1. Проекции вектора в системе координат $O \xi \eta \zeta$ определяются через проекции того же вектора в системе координат $O_0 X^* Y^* Z^*$ с помощью соотношения

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} X^* \\ Y^* \\ Z^* \end{pmatrix},$$

где A^T – транспонированная матрица направляющих косинусов, приведенных в табл. 6.1.

Рассмотрим орбитальные системы координат.

Построим систему координат $O_0 x_1 y_1 z_1$ (рис. 6.2), оси которой привязаны к плоскости орбиты и текущему положению на ней КА. Проведем че-

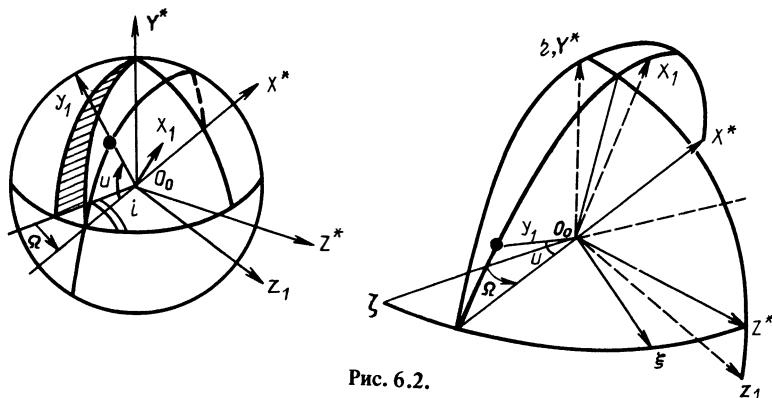


Рис. 6.2.

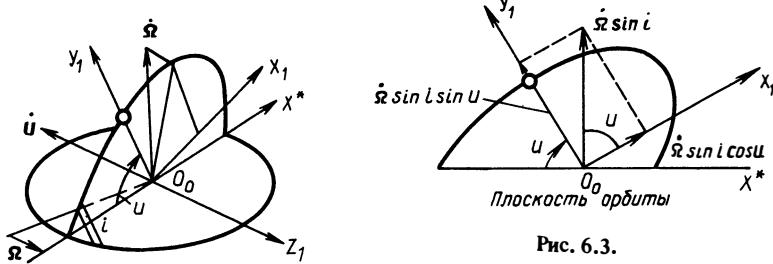


Рис. 6.3.

рез ось O_0X^* узловой системы координат плоскость орбиты, наклоненную к плоскости экватора под углом i . Совместим плоскость $O_0x_1y_1$ с плоскостью орбиты, причем ось O_0y_1 направим по местной вертикали, а ось O_0x_1 в сторону движения КА.

В связи с тем, что Земля не имеет идеальной сферической формы, различают геоцентрическую вертикаль (линия, соединяющая центр масс аппарата с центром Земли), географическую вертикаль (нормаль к международному земному эллипсоиду), гравитационную вертикаль (нормаль к гравитационной эквипотенциальной поверхности, опущенная из центра масс КА).

Плоскость $O_0y_1z_1$ расположена перпендикулярно орбитальной плоскости. Ось O_0y_1 орбитальной системы координат вращается вместе с аппаратом с угловой скоростью du/dt . Как правило, угловая скорость спутника du/dt является переменной величиной. Кроме того, различные возмущения, обусловленные нецентральностью гравитационного поля Земли, наличием атмосферы и т.д., постоянно деформируют орбиту и меняют ее положение в пространстве. Например, линия узлов медленно прецессирует в инерциальной системе координат.

Составляющие угловой скорости ω_1 орбитальной системы координат можно выразить через орбитальную угловую скорость аппарата du/dt и угловую скорость линии узлов $d\Omega/dt$ орбиты (рис. 6.3) в виде

Таблица 6.1

Оси узловой системы	Оси инерциальной системы		
	$O_0\xi$	$O_0\eta$	$O_0\xi$
O_0X^*	$-\cos\Omega$	0	$-\sin\Omega$
O_0Y^*	0	1	0
O_0Z^*	$-\sin\Omega$	0	$\cos\Omega$

Таблица 6.2

Оси орбитальной системы	Оси узловой системы		
	O_0X^*	O_0Y^*	O_0Z^*
O_0x_1	$\sin u$	$\cos u \sin i$	$\cos u \cos i$
O_0y_1	$-\cos u$	$\sin u \sin i$	$\sin u \cos i$
O_0z_1	0	$-\cos i$	$\sin i$

Таблица 6.3

Оси орбитальной системы	Оси инерциальной системы		
	$O_0\xi$	$O_0\eta$	$O_0\xi$
O_0x_1	$-\sin u \cos \Omega -$ $-\cos u \sin \Omega X$ $X \cos i$	$\cos u \sin i$	$\cos u \cos \Omega \cos i -$ $-\sin u \sin \Omega$
O_0y_1	$\cos u \cos \Omega -$ $-\sin u \sin \Omega X$ $X \cos i$	$\sin u \sin i$	$\sin u \cos \Omega \cos i +$ $+\cos u \sin \Omega$
O_0z_1	$-\sin \Omega \sin i$	$-\cos i$	$\sin i \cos \Omega$

Таблица 6.4

Оси связанный системы	Оси базовой системы		
	Ox_0	Oy_0	Oz_0
OX	1	ϑ	$-\psi$
OY	$-\vartheta$	1	γ
OZ	ψ	$-\gamma$	1

$$\begin{aligned}
 \omega_{1x_1} &= \frac{d\Omega}{dt} \sin i \cos u; \\
 \omega_{1y_1} &= \frac{d\Omega}{dt} \sin i \sin u; \\
 \omega_{1z_1} &= -\frac{du}{dt} - \frac{d\Omega}{dt} \cos i.
 \end{aligned} \tag{6.2.1}$$

Положение орбитальной системы координат относительно узловой и инерциальной систем определяют с помощью проекций единичных векторов осей системы координат $O_0x_1y_1z_1$ на оси систем $O_0X^*Y^*Z$ и $O_0\xi\eta\xi$, приведенные в табл. 6.2 и 6.3 соответственно. Проекции любого вектора в узловой системе координат $O_0X^*Y^*Z^*$ можно определить через его проекции в орбитальной системе координат $O_0x_1y_1z_1$ с помощью выражения

$$\begin{pmatrix} X^* \\ Y^* \\ Z^* \end{pmatrix} = \mathbf{B}^T \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \tag{6.2.2}$$

где \mathbf{B}^T – транспонированная матрица направляющих косинусов, приведенных в табл. 6.2.

Проекции произвольного вектора в инерциальной системе координат $O_0\xi\eta\xi$ связаны с его проекциями в орбитальной системе координат $O_0x_1y_1z_1$ соотношением

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \xi \end{pmatrix} = \mathbf{C}^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \tag{6.2.3}$$

где \mathbf{C}^T – транспонированная матрица направляющих косинусов, приведенных в табл. 6.3. Эта матрица может быть получена перемножением матриц \mathbf{A}^T и \mathbf{B}^T .

Одним из необходимых условий обеспечения желаемой ориентации КА в пространстве во время полета является введение некоторой базовой (опорной) системы координат, положение которой в инерциальном пространстве вполне определено: оси координат базовой системы должны либо иметь неизменное направление, либо перемещаться в пространстве по известному закону. Оси базовой системы должны задаваться на борту аппарата с помощью специальных устройств и приборов.

Можно сделать следующие общие рекомендации по выбору базовой системы координат. Прежде всего базовая система отсчета должна соответствовать задачам и условиям полета КА. Должна быть предусмотрена возможность реализации осей базовой системы с помощью располагаемо-

го арсенала технических средств. Базовую систему координат важно выбирать так, чтобы внешние моменты оказывали стабилизирующее действие на процесс ориентации или, если это невозможно, чтобы их возмущающее влияние было минимальным. Уравнения угловых движений КА в базовой системе должны иметь простой вид.

Конкретный выбор базовой системы координат зависит от типа ЛА и его назначения. Базовая система координат, пригодная для одного аппарата, не всегда может применяться для другого. Возможность использования той или иной системы координат в качестве базовой определяется для данного КА его техническими данными и программой полета.

При выборе в качестве базовой некоторой системы координат необходимо знать ее положение и закон перемещения в инерциальном пространстве.

Рассмотрим, например, может ли орбитальная система координат использоваться в качестве базовой. Введем две системы координат: орбитальную $Ox_1y_1z_1$ с единичными векторами i_1, j_1, k_1 , определяющими положительные направления осей, и базовую $Ox_0y_0z_0$ с единичными векторами i_0, j_0, k_0 .

Совместим центры этих систем координат (рис. 6.4). Будем считать, что взаимное расположение осей этих систем определяется тремя небольшими эйлеровыми углами поворота Φ_1, Φ_2, Φ_3 , так что единичные векторы связаны соотношениями

$$\begin{aligned} i_0 &= i_1 + \Phi_3 j_1 - \Phi_2 k_1; \quad j_0 = -\Phi_3 i_1 + j_1 + \Phi_1 k_1; \quad k_0 = \Phi_2 i_1 - \\ &- \Phi_1 j_1 + k_1. \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

Пусть ω_1 и ω_0 – векторы угловой скорости систем $Ox_1y_1z_1$ и $Ox_0y_0z_0$ соответственно в инерциальном пространстве:

$$\omega_1 = \omega_{1x} i_1 + \omega_{1y} j_1 + \omega_{1z} k_1;$$

$$\omega_0 = \omega_{0x} i_0 + \omega_{0y} j_0 + \omega_{0z} k_0.$$

Как и углы поворота (углы Эйлера), угловые скорости будем считать малыми.

Скорости базовой и орбитальной систем координат должны быть связаны соотношением

$$\omega_0(t) - \omega_1(t) = \omega^*(t), \quad (6.2.5)$$

где $\omega^*(t)$ – вполне определенная функция, обусловленная программой полета (в частном случае, когда требуется совместить оси базовой и орбитальной

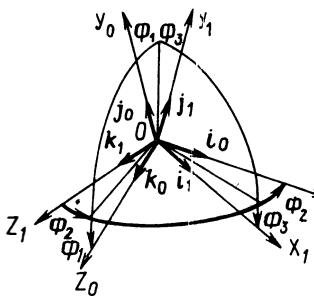


Рис. 6.4.

систем координат, $\omega^*(t) = 0$). Если закон изменения угловой скорости движения орбитальной системы координат $\omega_1(t)$ заранее известен, то можно подобрать $\omega_0(t)$ так, чтобы выполнялось равенство (6.2.5).

Как показывают соотношения (6.2.1), проекции угловой скорости ω_1 зависят от скорости обращения спутника \dot{u} , которая в общем случае для эллиптической орбиты является периодически изменяющейся величиной.

Однако из-за случайных возмущений, действующих на КА, орбиту движения и, следовательно, угловую скорость $\omega_1(t)$ орбитальной системы координат часто трудно определить заранее.

Практически вместо соотношения (6.2.5) выполняется равенство

$$\omega_0(t) - \omega_1(t) - \omega^*(t) = \Delta\omega,$$

где $\Delta\omega$ – некоторая неопределенная, обусловленная случайными причинами погрешность определения угловой скорости. С течением времени эта погрешность приводит к неопределенному увеличению угловых отклонений орбитальной системы координат от базовой. Следовательно, не всякую орбитальную систему координат можно принять за базовую. Выбор базовой системы координат, вращающейся в инерциальном пространстве, строго регламентирован. Только при отсутствии случайных возмущений угловую скорость ω_0 легко подобрать. Например, для идеальной круговой орбиты при отсутствии возмущений $\Delta\omega = 0$ и, если программой полета предусмотрено выполнение равенства $\omega^*(t) = 0$, проекции угловых скоростей базовой и орбитальной системы координат должны удовлетворять соотношениям

$$\omega_{0x_0} - \Phi_3 \omega_{0y_0} + \Phi_2 \omega_{0z_0} - \omega_{1x_1} = 0; \quad \omega_{0y_0} + \Phi_3 \omega_{0x_0} -$$

$$- \Phi_1 \omega_{0z_0} - \omega_{1y_1} = 0; \quad \omega_{0z_0} - \Phi_2 \omega_{0x_0} + \Phi_1 \omega_{0x_0} - \omega_{1z_1} = 0.$$

С точностью до величины первого порядка малости

$$\omega_{0x_0} \approx \omega_{1x_1}; \quad \omega_{0y_0} \approx \omega_{1y_1}; \quad \omega_{0z_0} \approx \omega_{1z_1}. \quad (6.2.6)$$

Учитывая, что в соотношении (6.2.1) $\dot{u} \gg \Omega$, можно записать

$$\omega_{1x_1} \approx 0; \quad \omega_{1y_1} \approx 0; \quad \omega_{1z_1} \cong - \frac{du}{dt} = -\nu. \quad (6.2.7)$$

и вследствие (6.2.6)

$$\omega_{0x_0} \approx 0; \quad \omega_{0y_0} \approx 0; \quad \omega_{0z_0} \approx - \frac{du}{dt} = -\nu. \quad (6.2.8)$$

Для спутника Земли наиболее приемлемой базовой системой координат является система, ось Oy_0 которой направлена по географической или гравитационной вертикали (геоцентрическую вертикаль на борту КА опре-

делить трудно), а Ox_0 совпадает с горизонтальным направлением движения КА в мгновенной орбитальной плоскости.

Как указывалось в гл. 1, при исследовании движения ракеты-носителя в качестве базовой системы удобно выбрать стартовую систему координат $OX_cY_cZ_c$ (см. рис. 1.5, а). Для активного участка полета, продолжительность которого нене велика, стартовая система близка к инерциальной. За базовую систему отсчета при изучении возмущенного движения ракеты была принята система координат, связанная с ней в невозмущенном движении.

В каждом конкретном случае при выборе базовой (опорной) системы координат необходимы оценка возможных возмущений и сопоставление отклонений под их влиянием базовой системы координат с требуемой точностью выполнения той или иной задачи.

Связанные системы координат подробно рассмотрены в гл. 1.

Проекции любого вектора в базовой системе координат могут быть найдены через его проекции в связанной системе координат:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = D^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (6.2.9)$$

где D^T – транспонированная матрица, составленная из элементов, приведенных в табл. 1.1. Когда углы ϑ, γ, ψ малы, выражения для косинусов углов, приведенные в табл. 1.1, упрощаются и принимают вид приведенных в табл. 6.4.

§ 6.3. УРАВНЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ КА НА ПАССИВНЫХ УЧАСТКАХ ПОЛЕТА

В общем случае КА представляет собой систему переменного состава с твердой оболочкой. Для получения уравнений ее движения мы воспользуемся той же методикой, которая использовалась в гл. 1 при выводе уравнений движения ракеты как системы переменного состава. Применяя принцип затвердевания к КА, нетрудно записать векторные уравнения сил и моментов, аналогичные уравнениям (1.5.8) и (1.6.1), а также эквивалентные им скалярные уравнения в проекциях на оси связанной системы координат $OXYZ$, аналогичные уравнениям (1.5.12) и (1.6.3). Необходимо иметь в виду, что в отличие от уравнений для ракет в правых частях уравнений для КА появляются новые слагаемые, отражающие специфические условия космического полета.

Решение уравнений движения (1.5.12) и (1.6.3) вследствие нелинейности и переменности по времени динамических коэффициентов довольно сложно и трудоемко. На практике в зависимости от характера решаемой задачи их несколько упрощают. Так, в первом приближении считают, что параметры КА и системы управления имеют номинальные значения. Помимо этого не учитывают все факторы, которые носят случайный характер и не могут быть заранее определены. В итоге получают некоторую упрощенную систему уравнений, в результате интегрирования которой определяют

параметры движения аппарата, соответствующего принятым идеализациям.

Полученная таким образом система уравнений, описывающая некоторое идеализированное движение КА, будет отличаться от уравнений действительного движения, но при определенных условиях гипотетическая и действительная траектории будут близкими.

Движение КА, описываемое системой уравнений при номинальных значениях параметров КА и системы управления, при отсутствии случайных возмущений будем называть невозмущенным (программным) движением, а соответствующую траекторию центра масс – невозмущенной траекторией.

Движение КА, реализуемое в конкретной обстановке, при действительных значениях параметров КА и системы управления назовем возмущенным движением.

Выведем уравнения возмущенного движения КА, используя приемы, подробно изложенные в гл. 1. Рассмотрим неуправляемый КА, совершающий пассивный полет по круговой орбите, так что

$$\nu = \nu_0 = \text{const}, \quad d\nu/dt = 0.$$

Так как здесь основное внимание будет уделяться вопросам обеспечения требуемой ориентации корабля в инерциальном пространстве или его угловой стабилизации, запишем только уравнения вращательного движения вокруг мгновенного центра масс.

Будем предполагать, что в программном движении аппарата связанные оси координат совпадают с осями базовой системы, в качестве которой используется орбитальная система координат. В возмущенном движении оси системы, связанной с аппаратом, повернуты относительно орбитальной системы координат на углы тангажа $\Delta\vartheta$, крена $\Delta\gamma$ и рыскания $\Delta\psi$, которые называют возмущениями параметров вращательного движения. Будем предполагать, что углы $\Delta\vartheta$, $\Delta\gamma$, $\Delta\psi$ и их производные по времени $d\Delta\vartheta/dt$, $d\Delta\gamma/dt$, $d\Delta\psi/dt$ – малые величины, так что $\nu_0 \gg d\Delta\vartheta/dt$.

Предварительно выведем некоторые кинематические соотношения.

Вектор угловой скорости связанных с КА осей координат относительно неподвижной базовой системы координат можно выразить через изменения углов тангажа, рыскания и крена:

$$\omega^* = \dot{\vartheta} + \dot{\psi} + \dot{\gamma}.$$

Спроектируем данное векторное равенство на связанные оси OX , OY , OZ . Направляющие косинусы вектора $\dot{\vartheta}$ в связанный системе координат равны – $\sin\psi$, $\cos\psi\sin\gamma$, $\cos\psi\cos\gamma$; вектора $\dot{\psi}$ – 0, $\cos\gamma$, $\sin\gamma$ и вектора $\dot{\gamma}$ – 1, 0, 0 (см. рис. 1.6).

Учитывая это, получим следующие кинематические уравнения, устанавливающие связь между проекциями на оси связанный системы угловой скорости аппарата и угловыми параметрами, характеризующими положение и движение КА относительно базовой системы координат:

$$\begin{aligned}\omega_x^* &= -\frac{d\Delta\vartheta}{dt} \sin\Delta\psi + \frac{d\Delta\gamma}{dt}; \\ \omega_y^* &= \frac{d\Delta\psi}{dt} \cos\Delta\gamma + \frac{d\Delta\vartheta}{dt} \cos\Delta\psi \sin\Delta\gamma; \\ \omega_z^* &= -\frac{d\Delta\psi}{dt} \sin\Delta\gamma + \frac{d\Delta\vartheta}{dt} \cos\Delta\psi \cos\Delta\gamma.\end{aligned}\quad (6.3.1)$$

Так как в нашем случае в качестве базовой выбрана орбитальная система координат, вращающаяся в инерциальном пространстве с угловой скоростью ω_0 , вектор угловой скорости связанных осей в инерциальной системе координат запишется в виде

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^* + \boldsymbol{\omega}_0.$$

Спроектируем это векторное равенство на оси системы координат $OXYZ$:

$$\begin{aligned}\omega_x &= \omega_x^* + \omega_{0x_0} \cos(x_0, x) + \omega_{0y_0} \cos(y_0, x) + \omega_{0z_0} \cos(z_0, x); \\ \omega_y &= \omega_y^* + \omega_{0x_0} \cos(x_0, y) + \omega_{0y_0} \cos(y_0, y) + \omega_{0z_0} \cos(z_0, y); \\ \omega_z &= \omega_z^* + \omega_{0x_0} \cos(x_0, z) + \omega_{0y_0} \cos(y_0, z) + \omega_{0z_0} \cos(z_0, z).\end{aligned}$$

С учетом (6.3.1) и (6.2.8), используя выражения для направляющих косинусов осей связанной системы координат (см. табл. 1.1), получим

$$\begin{aligned}\omega_x &= -\frac{d\Delta\vartheta}{dt} \sin\Delta\psi + \frac{d\Delta\gamma}{dt} + \nu_0 \sin\Delta\psi; \\ \omega_y &= \frac{d\Delta\psi}{dt} \cos\Delta\gamma + \frac{d\Delta\vartheta}{dt} \cos\Delta\psi \sin\Delta\gamma - \nu_0 \cos\Delta\psi \sin\Delta\gamma; \\ \omega_z &= -\frac{d\Delta\psi}{dt} \sin\Delta\gamma + \frac{d\Delta\vartheta}{dt} \cos\Delta\psi \cos\Delta\gamma - \nu_0 \cos\Delta\psi \cos\Delta\gamma.\end{aligned}\quad (6.3.2)$$

Так как углы $\Delta\psi$, $\Delta\gamma$ малы, справедливы приближенные равенства $\sin\Delta\psi \cong \Delta\psi$, $\sin\Delta\gamma \cong \Delta\gamma$, $\cos\Delta\psi \cong 1$, $\cos\Delta\gamma \cong 1$, и выражения (6.3.2) можно записать в более простом виде

$$\begin{aligned}\omega_x &= -\frac{d\Delta\vartheta}{dt} - \Delta\psi + \frac{d\Delta\gamma}{dt} + \nu_0 \Delta\psi; \quad \omega_y = \frac{d\Delta\psi}{dt} + \frac{d\Delta\vartheta}{dt} \Delta\gamma - \nu_0 \Delta\gamma; \\ \omega_z &= -\frac{d\Delta\psi}{dt} - \Delta\gamma + \frac{d\Delta\vartheta}{dt} - \nu_0,\end{aligned}$$

или, с точностью до величин второго порядка малости

$$\omega_x = \frac{d\Delta\gamma}{dt} + \nu_0 \Delta\psi; \quad \omega_y = \frac{d\Delta\psi}{dt} - \nu_0 \Delta\gamma; \quad \omega_z = \frac{d\Delta\vartheta}{dt} - \nu_0. \quad (6.3.3)$$

Продифференцируем по времени полученные соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_x}{dt} &= \frac{d^2\Delta\gamma}{dt^2} + \nu_0 \frac{d\Delta\psi}{dt}; \quad \frac{d\omega_y}{dt} = \frac{d^2\Delta\psi}{dt^2} - \nu_0 \frac{d\Delta\gamma}{dt}; \\ \frac{d\omega_z}{dt} &= \frac{d^2\Delta\vartheta}{dt^2}. \end{aligned} \quad (6.3.4)$$

Запишем уравнения вращательного движения КА с учетом кинематических соотношений (6.3.3) и (6.3.4):

$$\begin{aligned} J_x \left(\frac{d^2\Delta\gamma}{dt^2} + \nu_0 \frac{d\Delta\psi}{dt} \right) + (J_z - J_y) \left(\frac{d\Delta\psi}{dt} - \nu_0 \Delta\gamma \right) \times \\ \times \left(\frac{d\Delta\vartheta}{dt} - \nu_0 \right) &= \Sigma M_x; \\ J_y \left(\frac{d^2\Delta\psi}{dt^2} - \nu_0 \frac{d\Delta\gamma}{dt} \right) + (J_x - J_z) \left(\frac{d\Delta\vartheta}{dt} - \nu_0 \right) \left(\frac{d\Delta\gamma}{dt} + \right. \\ \left. + \nu_0 \Delta\psi \right) &= \Sigma M_y; \\ J_z \frac{d^2\Delta\vartheta}{dt^2} + (J_y - J_x) \left(\frac{d\Delta\gamma}{dt} + \nu_0 \Delta\psi \right) \left(\frac{d\Delta\psi}{dt} - \nu_0 \Delta\gamma \right) &= \Sigma M_z. \end{aligned} \quad (6.3.5)$$

Проведем линеаризацию уравнений (6.3.5), используя сформулированные ранее предположения:

$$\begin{aligned} J_x \frac{d^2\Delta\gamma}{dt^2} + (J_x + J_y - J_z) \nu_0 \frac{d\Delta\psi}{dt} + (J_z - J_y) \nu_0^2 \Delta\gamma &= \Sigma M_x; \\ J_y \frac{d^2\Delta\psi}{dt^2} - (J_x + J_y - J_z) \nu_0 \frac{d\Delta\gamma}{dt} + (J_z - J_x) \nu_0^2 \Delta\psi &= \Sigma M_y; \\ \frac{d^2\Delta\vartheta}{dt^2} = \Sigma M_z. \end{aligned} \quad (6.3.6)$$

Система уравнений (6.3.6) описывает в линейной постановке возмущенное вращательное движение неуправляемого КА. Неизвестными величинами здесь являются возмущения углов тангажа, рыскания и крена.

Если рассматривается КА с активной системой управления, то предположение о малости угловых скоростей $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ по сравнению с v_0 оказывается несправедливым. В этом случае угловая скорость движения аппарата вокруг центра масс значительно превосходит угловую скорость КА относительно притягивающего центра:

$$d\Delta\vartheta/dt \gg v_0, \quad d\Delta\psi/dt \gg v_0, \quad d\Delta\gamma/dt \gg v_0.$$

В соответствии с этим кинематические соотношения (6.3.3) упрощаются:

$$\omega_x = \frac{d\Delta\gamma}{dt}; \quad \omega_y = \frac{d\Delta\psi}{dt}; \quad \omega_z = \frac{d\Delta\vartheta}{dt} - v_0. \quad (6.3.7)$$

Линеаризованная система дифференциальных уравнений вращательного движения КА, снабженного активной системой управления, принимает вид

$$J_x \frac{d^2 \Delta\gamma}{dt^2} = \Sigma M_x; \quad J_y \frac{d^2 \Delta\psi}{dt^2} = \Sigma M_y; \quad J_z \frac{d^2 \Delta\vartheta}{dt^2} = \Sigma M_z. \quad (6.3.8)$$

В данном случае подразумевается, что в правые части уравнений (6.3.8) входят и управляющие моменты, создаваемые органами управления.

§ 6.4. СИЛЫ И МОМЕНТЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА КА В УСЛОВИЯХ КОСМИЧЕСКОГО ПОЛЕТА

В правые части уравнений движения (1.5.8) и (1.6.1) входят суммы всех сил и моментов, действующих на аппарат в полете. Анализируя источники их возникновения, силы можно разбить условно на внешние и внутренние.

К внешним силам можно отнести гравитационные, аэродинамические силы, радиационное и солнечное давление, силы воздействия внешних электрических и магнитных полей и др.

Внутренними силами можно считать силы собственной гравитации и силы, вызванные перемещением центра масс относительно корпуса аппарата. Последние, а также силы Кориолиса достаточно подробно проанализированы в гл. 1 и данном параграфе не рассматриваются. Тяга двигателей и управляющие силы в основном определяются типом и назначением КА, однако частично зависят и от внешних условий полета. В данной главе рассматривается пассивный участок полета, где реактивная тяга отсутствует. Назначение КА определяет условия его полета. В зависимости от условий полета по-разному проявляется действие тех или иных сил на движение

аппарата. Для количественной оценки этого действия удобно пользоваться понятием перегрузки, создаваемой рассматриваемыми силами.

Имея в виду, что уравнения движения КА (6.3.6) и (6.3.8) записаны в проекциях на связанные оси, все силы и моменты этих сил будем также представлять в виде проекций на оси связанной системы координат.

Аэродинамические силы и моменты, действующие на КА

Хотя аэродинамические силы и рассматривались в гл. 1, целесообразно рассмотреть их еще раз более полно и с учетом специфики условий полета КА.

При движении КА в атмосфере планет как результат взаимодействия поверхности и среды возникают аэродинамические силы. Их величина определяется конфигурацией аппарата, параметрами его движения и характеристиками атмосферы.

Для КА определенной формы и размеров аэродинамические силы зависят в основном от скорости полета и плотности окружающей воздушной среды.

При движении в плотных слоях атмосферы на дозвуковых скоростях определение аэродинамических характеристик основано на введении понятия пограничного слоя, гипотез о ламинарном и турбулентном режимах течения и т.д.

Трансзвуковой диапазон скоростей характеризуется появлением на обтекаемой поверхности скачков уплотнения. При этом возникает необходимость учета сжимаемости обтекающего тела газа. Среди известных методов расчета аэродинамических коэффициентов [13] в этом случае наиболее прост приближенный метод Ньютона. Коэффициент местного давления определяется по формуле

$$\bar{p} = \frac{2(p - p_\infty)}{\rho V^2} = \frac{V_n^2}{V_\infty^2},$$

где p_∞ , V_∞ – соответственно давление и скорость невозмущенного потока; V_n – нормальная к стенке составляющая невозмущенной скорости; ρ – плотность среды.

Если известно распределение нормального давления на стенке, легко вычислить аэродинамические коэффициенты. Так,

$$c_x = \frac{1}{S} \int_S \bar{p} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{V}_\infty) ds.$$

При гиперзвуковых скоростях, начиная с чисел Маха $M \geq 4$, необходимо учитывать особенности, связанные с влиянием высоких температур, возникающих за ударными волнами в пограничном слое.

В этом случае обычно учитывается изменение теплоемкости газа. Его молекулы при сильном нагреве диссоциируют, а затем с ростом скорости происходит термоионизация. Для газов становится несправедливым уравнение состояния. Меняется механизм передачи тепла к стенке. Подобные химико-физические превращения воздуха имеют место при спуске аппаратов в плотных слоях атмосферы, причем максимальные аэродинамические перегрузки, ограниченные прочностными или биологическими возможностями, достигают значений порядка 4 ... 6. Силовые и моментные аэродинамические характеристики существенно зависят и от того, в каких условиях протекает полет: в сплошной или разреженной среде.

Принято считать, что плотность атмосферы большинства планет меняется в зависимости от расстояния до поверхности планет h по экспоненциальному закону

$$\rho = \rho_0 e^{-\beta h}.$$

Однако при большой скорости полета, близкой к первой космической, даже на больших высотах аэродинамические силы могут быть значительными. Вследствие аэродинамического торможения, например, эллиптические орбиты искусственных спутников меняются, постепенно приближаясь к круговым.

Аэродинамическим торможением, как правило, определяется время существования спутника. На критической высоте (около 150 км) перегрузка от аэродинамических сил для сферического спутника массой 2,5 т достигает величины порядка 10^{-4} .

При полете КА в разреженной атмосфере характер обтекания существенно меняется. Здесь приходится отказаться от гипотезы сплошной среды, применимой в плотных слоях атмосферы, и пользоваться молекулярной теорией газов, которая основана на понятии дискретной схемы строения.

Пределы применимости гипотез о сплошном и дискретном строении атмосферы носят условный характер и определяются средней длиной свободного пробега молекул

$$l = 1,2 \frac{\nu \sqrt{k}}{a},$$

где ν – кинематическая вязкость; k – показатель адиабаты; a – скорость звука.

При оценке степени разреженности длину свободного пробега молекул сравнивают с характерным линейным размером d обтекаемого тела, вводя в рассмотрение бесразмерный параметр – число Кнудсена:

$$Kn = \frac{l}{d} = \frac{1,2 \nu \sqrt{k} / l}{d / a} = 1,2 \sqrt{k} \frac{M}{Re},$$

где $M = V/a$ – число Маха; $Re = Vd/\nu$ – число Рейнольдса.

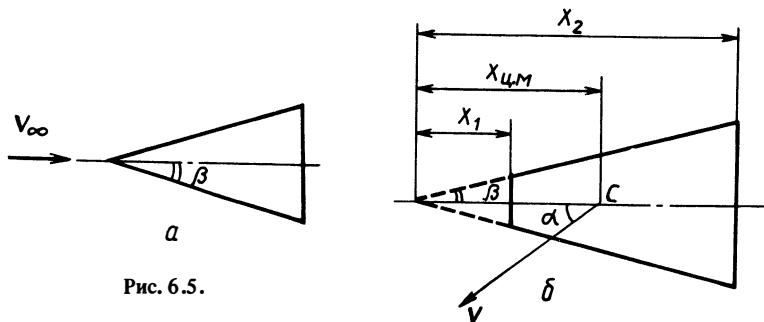


Рис. 6.5.

За характерный линейный размер d обычно принимают толщину пограничного слоя, вычисляемую по формулам для сплошной среды.

Если число $Kn \leq 0,01$, то газ следует считать плотным и применима гипотеза сплошности. Если $Kn \geq 10$, справедлива молекулярная гипотеза обтекания. В диапазоне значений чисел Кнудсена $0,01 < Kn < 10$ различают еще промежуточный режим и режим течения со скольжением.

Обычно гипотеза о сплошной среде справедлива для высот, не превышающих 100 км. Начиная с высот 600 км наблюдается другой предельный случай, когда соударения между частицами редки и применима молекулярная теория обтекания.

Механизм взаимодействия частиц с поверхностью при свободномолекулярном течении представляют в виде модели зеркального или диффузного отражения. В действительности реализуется вторая модель. Аэродинамические коэффициенты, полученные на основе гипотезы диффузного отражения молекулярного потока в предположении максвелловского распределения скоростей, зависят от скорости движения, угла ее наклона к обтекаемой поверхности, отношения температур стенки и газа, геометрии тела и т.д. Например, для острого конуса, имеющего угол полурасщепления β , с нулевым углом атаки α (рис. 6.5, а) при $M > 15$ коэффициент лобового сопротивления равен

$$c_{x_0 a} = 2 + \frac{2}{kM^2} + \frac{\sin\beta}{M} \sqrt{\frac{2\pi T_S}{kT_\infty}},$$

где T_S – температура поверхности (стенки); T_∞ – температура окружающей среды.

Коэффициент аэродинамического момента тангажа относительно центра масс КА, имеющего форму усеченного конуса (рис. 6.5, б), при полете на больших высотах с малыми углами атаки можно записать в виде [5]

$$m_z^* = \frac{2M_z}{\rho V^2} = \pi \operatorname{tg}\beta \left\{ 2\operatorname{tg}\beta [x_{CM}(x_2^2 - x_1^2) - (x_2^3 - x_1^3)] + \sqrt{\pi \frac{T_S}{T_\infty} \frac{H^*}{\rho^*}} \right\} \quad \alpha = m_z^{*\alpha} \alpha \text{ (при } \alpha \leq \beta\text{)}, \quad (6.4.1)$$

где $\mu^* = \frac{V}{\sqrt{2RT_\infty}}$ – коэффициент молекулярной скорости; R – универсальная газовая постоянная; ρ – плотность атмосферы; V – скорость полета; $H^*(\beta, x_{ц.м.}, x_1, x_2)$ – коэффициент формы.

Итак, в зависимости от условий полета имеют силу те или иные выражения аэродинамических коэффициентов.

Предположим, что внешняя поверхность КА симметрична относительно плоскостей OXY и OZ связанный системы координат. Будем пренебречь вращением аппарата и допустим, что воздушная среда, в которой совершается полет, неподвижна относительно инерциальной системы координат. Пренебрегая скоростью центра масс аппарата относительно его корпуса, считаем, что скорость объекта относительно воздушной среды равна скорости его центра $m: ss V_C$.

Равнодействующую всех аэродинамических сил, приложенных к КА, будем называть полной аэродинамической силой и обозначать R_A . Будем считать, что точка ее приложения – центр давления лежит на продольной оси КА и совпадает с аэродинамическим фокусом, а вектор полной аэродинамической силы лежит в плоскости, проходящей через ось OX и вектор V_C .

Полную аэродинамическую силу R_A разложим на две составляющие: на силу лобового сопротивления X_a , направленную по линии действия вектора скорости V_C , и подъемную силу Y_a (см. рис. 1.8). Эти составляющие по модулю можно представить так:

$$X_a = c_{x_a} \rho S \frac{V_C^2}{2}; \quad Y_a = c_{y_a} \rho S \frac{V_C^2}{2},$$

где c_{x_a} – коэффициент силы сопротивления; c_{y_a} – коэффициент подъемной силы; S – площадь миделевого сечения корпуса аппарата.

При сделанных в § 1.9 предположениях были получены выражения (1.9.16) и (1.9.17') проекций действующих на ракету в плотной атмосфере аэродинамических сил и моментов на оси связанный системы координат.

Исследуя пассивные участки полета ракеты или КА, остановимся на определении проекций аэродинамических сил и моментов на те же оси в частном случае движения с высокими скоростями в разреженной атмосфере. Распространим на этот случай предположения, оговоренные в § 1.9: движение КА происходит на малых углах атаки α , угловая скорость КА ω также малая величина. Кроме того, будем считать, что скорость ветра W_B мала по сравнению со скоростью движения центра масс V_C и ею можно пренебречь.

Тогда вместе формул (1.9.16) и (1.9.17) можно записать

$$X = -\frac{1}{2} c_{x_a} \rho S V_C^2 V_{Cx}; \quad (6.4.2)$$

$$Y = R_y^{\omega_z} \omega_z - \frac{1}{2} (c_{x_0 a} + c_{y a}^{\alpha}) \rho S V_{Cx} V_{Cy};$$

$$Z = R_z^{\omega_y} \omega_y - \frac{1}{2} (c_{x_0 a} + c_{y a}^{\alpha}) \rho S V_{Cx} V_{Cz}; \quad (6.4.2)$$

$$M_x = M_x^{\omega_x} \omega_x;$$

$$M_y = M_y^{\omega_y} \omega_y + \frac{x_F}{2} (c_{x_0 a} + c_{y a}^{\alpha}) \rho S V_{Cx} V_{Cz};$$

$$M_z = M_z^{\omega_z} \omega_z - \frac{x_F}{2} (c_{x_0 a} + c_{y a}^{\alpha}) \rho S V_{Cx} V_{Cy}.$$

Коэффициенты $c_{x_0 a}$ и производные $c_{y a}^{\alpha}$, $R_y^{\omega_z}$, $R_z^{\omega_y}$, $M_x^{\omega_x}$, $M_y^{\omega_y}$, $M_z^{\omega_z}$, зависящие от формы КА и скорости его движения, определяются с помощью теоретических зависимостей или экспериментально [13, 14]. Для КА осесимметричной формы с малым удлинением при скоростях полета, близких к первой космической скорости, в разреженной атмосфере

$$c_{x_0 a} \text{ на много } c_{y a}^{\alpha}; \quad R_y^{\omega_z}; \quad R_z^{\omega_y}; \quad M_x^{\omega_x}; \quad M_y^{\omega_y}; \quad M_z^{\omega_z},$$

и выражения проекций аэродинамических сил и моментов на связанные оси координат приближенно можно записать в виде

$$X = -1/2 c_{x_0 a} \rho S V_{Cx}^2 = -c_{x_0 a} S q; \\ Y = -1/2 c_{x_0 a} \rho S V_{Cx} V_{Cy} = c_{x_0 a} S q \sin \alpha \cos \chi; \\ Z = -1/2 c_{x_0 a} \rho S V_{Cx} V_{Cz} = c_{x_0 a} S q \sin \alpha \sin \chi; \quad (6.4.3)$$

$$M_x = 0;$$

$$M_y = \frac{x_F}{2} c_{x_0 a} \rho S V_{Cx} V_{Cz} = -c_{x_0 a} x_F S q \sin \alpha \sin \chi;$$

$$M_z = \frac{-x_F}{2} c_{x_0 a} \rho S V_{Cx} V_{Cy} = c_{x_0 a} x_F S q \sin \alpha \cos \chi,$$

где $q = \rho V_{Cx}^2 / 2$ – скорость напор; χ – угол между проекцией аэродинамической силы R_A на плоскость OYZ и осью OY связанный системы координат (см. рис. 1.9).

Анализируя формулы (6.4.3), нетрудно установить, что при малых углах α и χ

$$X \gg Y \gg Z \quad \text{и} \quad M_z \gg M_y.$$

Гравитационные силы и моменты

В § 1.9 при изучении динамики ракет на активных участках полета воздействие силы притяжения на объект исследования рассматривалось в предположении, что в любой точке траектории ракета находится в плоскопараллельном поле сил притяжения. При этом учитывалось изменение ускорения свободного падения по высоте полета и поворот осей связанный системы координат относительно осей стартовой системы.

Для пассивных участков полета КА наиболее приемлема модель центрального поля притяжения планеты. Рассмотрим эту модель подробнее, как наиболее общий случай.

Будем считать КА абсолютно жестким телом, движущимся в центральном гравитационном поле. Введем базовую систему координат $Ox_0y_0z_0$ (рис. 6.6), совместив ее начало с центром масс КА и выбрав направление оси Oy_0 от центра притяжения O_0 по линии, соединяющей его с центром масс C аппарата. Ось Oz_0 базовой системы перпендикулярна мгновенной орбитальной плоскости, ось Ox_0 направлена в сторону движения и вместе с осями Oy_0 , Oz_0 образует правую систему. На элементарную массу dm аппарата с радиусом-вектором r действует притягивающая сила

$$d\mathbf{G} = -g dm \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Знак минус учитывает противоположную направленность векторов $d\mathbf{G}$ и r .

Ускорение свободного падения g меняется в зависимости от расстояния r от центра притяжения. Для удобства выражим g через ускорение g_0 при каком-нибудь фиксированном расстоянии r_0 от центра O_0 . Тогда

$$g = g_0 \frac{r_0^2}{r^2}.$$

Учитывая это, имеем

$$d\mathbf{G} = \frac{g_0 r_0^2}{r^3} dm \mathbf{r}.$$

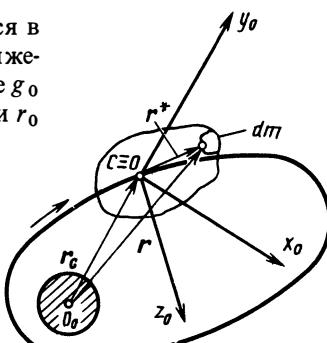


Рис. 6.6.

Гравитационная сила, действующая на весь аппарат, равна:

$$\mathbf{G} = -r_0^2 g_0 \int_V \frac{\mathbf{r}}{r^3} dm, \quad (6.4.4)$$

где V – объем КА.

В подынтегральном выражении (6.4.4)

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_C + \mathbf{r}^* = r_C \mathbf{j}_0 + \mathbf{r}^*,$$

где \mathbf{j}_0 – единичный вектор, направленный по оси Oy_0 .

Используя соотношение

$$\begin{aligned} r^2 &= \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = (r_C \mathbf{j}_0 + \mathbf{r}^*) \cdot (r_C \mathbf{j}_0 + \mathbf{r}^*) = r_C^2 + \mathbf{r}^{*2} + 2r_C (\mathbf{r}^* \cdot \mathbf{j}_0) = \\ &= r_C^2 [1 + \left(\frac{\mathbf{r}^{*2}}{r_C^2}\right) + 2\left(\frac{\mathbf{r}^*}{r_C} \cdot \mathbf{j}_0\right)] = r_C^2 [1 + \left(\frac{\mathbf{r}^{*2}}{r_C^2}\right) + 2\left(\frac{\mathbf{r}^*}{r_C} \cdot \mathbf{j}_0\right)] \end{aligned}$$

и принимая во внимание, что $r^*/r_C \ll 1$, с точностью до величин второго порядка малости можем записать

$$r \approx [1 + 2\left(\frac{\mathbf{r}^*}{r_C} \cdot \mathbf{j}_0\right)]^{1/2} r_C$$

и, следовательно,

$$r^{-3} \approx r_C^{-3} [1 + 2\left(\frac{\mathbf{r}^*}{r_C} \cdot \mathbf{j}_0\right)]^{-3/2}.$$

Раскладывая выражение, стоящее в квадратных скобках, в биномиальный ряд и пренебрегая величинами второго и более высокого порядка малости, получаем

$$r^{-3} = r_C^{-3} [1 - 3\left(\frac{\mathbf{r}^*}{r_C} \cdot \mathbf{j}_0\right)].$$

С учетом этого имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= -r_0^2 g_0 \int_V \left\{ \frac{1}{r_C^2} \mathbf{j}_0 [1 - 3\left(\frac{\mathbf{r}^*}{r_C} \cdot \mathbf{j}_0\right)] + \frac{\mathbf{r}^*}{r_C^3} [1 - \right. \\ &\quad \left. - 3\left(\frac{\mathbf{r}^*}{r_C} \cdot \mathbf{j}_0\right)] \right\} dm = -r_0^2 g_0 \int_V \left\{ \frac{1}{r_C^2} \mathbf{j}_0 - \frac{3}{r_C^3} (\mathbf{r}^* \cdot \mathbf{j}_0) \mathbf{j}_0 + \frac{\mathbf{r}^*}{r_C^3} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{r_C^3} (\mathbf{r}^* \cdot \mathbf{j}_0) \frac{\mathbf{r}^*}{r_C} \right\} dm. \end{aligned}$$

Вследствие малости последним слагаемым в подынтегральном выражении можно пренебречь. Тогда

$$\mathbf{G} = - \frac{r_0^2 g_0}{r_C^2} \int_V [\mathbf{j}_0 - 3 \frac{(\mathbf{r}^* \cdot \mathbf{j}_0)}{r_C} \cdot \mathbf{j}_0 + \frac{\mathbf{r}^*}{r_C}] dm . \quad (6.4.5)$$

Спроектируем вектор \mathbf{G} на оси базовой системы координат. Проекции вектора \mathbf{r}^* на эти оси обозначим через x_0, y_0, z_0 . Так как $\mathbf{j}_0 \in \{0, 1, 0\}$, то $(\mathbf{r}^* \cdot \mathbf{j}_0) = y_0$. Тогда

$$G_{x_0} = - \frac{r_0^2 g_0}{r_C^2} \int_V \frac{x_0}{r_C} dm; \quad G_{y_0} = \frac{r_0^2 g_0}{r_C^2} \int_V \left(1 - 2 \frac{y_0}{r_C}\right) dm = \\ = - \frac{r_0^2}{r_C^2} g_0 m + \frac{2r_0^2 g_0}{r_C^2} \int_V \frac{y_0}{r_C} dm; \quad G_{z_0} = - \frac{r_0^2 g_0}{r_C^2} \int_V \frac{z_0}{r_C} dm,$$

где m – масса аппарата.

Слагаемое $\frac{r_0^2}{r_C^2} g_0 m$ представляет собой гравитационную силу, приложенную к центру масс. Под ее действием КА движется по орбите. Момент этой силы равен нулю. Силы, выраженные остальными слагаемыми, создают моменты относительно центра масс аппарата.

Гравитационный момент относительно точки O равен

$$\mathbf{M}_\Gamma = (\mathbf{r}^* \times \mathbf{G}),$$

$$\text{или } \mathbf{M}_\Gamma = - \frac{r_0^2 g_0}{r_C^2} \left\{ \int_V (\mathbf{r}^* \times \mathbf{j}_0) dm - 3 \int_V \mathbf{r}^* \times \frac{(\mathbf{r}^* \cdot \mathbf{j}_0)}{r_C} \mathbf{j}_0 dm - \right. \\ \left. - \int_V \mathbf{r}^* \times \frac{\mathbf{r}^*}{r_C} dm \right\} = - \frac{r_0^2 g_0}{r_C^2} \left\{ \int_V \mathbf{r}^* \times \mathbf{j}_0 dm - \right. \\ \left. - 3 \int_V \frac{(\mathbf{r}^* \cdot \mathbf{j}_0)}{r_C} - \mathbf{r}^* \times \mathbf{j}_0 dm \right\} .$$

Так как точка O совпадает с центром масс аппарата C ,

$$\int_V \mathbf{r}^* \times \mathbf{j}_0 dm = \int_V \mathbf{r}^* dm \times \mathbf{j}_0 = 0.$$

$$\text{Поэтому } \mathbf{M}_\Gamma = \frac{3g_0 r_0^2}{r_C^3} \int_V (\mathbf{r}^* \cdot \mathbf{j}_0) (\mathbf{r}^* \times \mathbf{j}_0) dm.$$

Спроектируем вектор \mathbf{M}_Γ на оси базовой системы координат. Так как

$$(\mathbf{r}^* \cdot \mathbf{j}_0) = y_0 \text{ и } (\mathbf{r}^* \times \mathbf{j}_0) = x_0 \mathbf{k}_0 - z_0 \mathbf{i}_0$$

($\mathbf{i}_0, \mathbf{k}_0$ – соответственно единичные векторы по осям Ox_0 и Oz_0), можем записать

$$\mathbf{M}_\Gamma = \frac{3g_0 r_0^2}{r_C^3} \int_V (-y_0 z_0 \mathbf{i}_0 + x_0 y_0 \mathbf{k}_0) dm.$$

Как известно, центробежные моменты инерции тела определяются соотношениями

$$J_{x_0 y_0} = \int_V x_0 y_0 dm; \quad J_{y_0 z_0} = \int_V y_0 z_0 dm.$$

Таким образом,

$$\mathbf{M}_\Gamma = \frac{3g_0 r_0^2}{r_C^3} (-J_{y_0 z_0} \mathbf{i}_0 + J_{x_0 y_0} \mathbf{k}_0). \quad (6.4.6)$$

В проекциях на оси базовой системы координат получаем

$$M_{\Gamma x_0} = -\frac{3g_0 r_0^2}{r_C^3} J_{y_0 z_0}; \quad M_{\Gamma y_0} = 0; \quad M_{\Gamma z_0} = \frac{3g_0 r_0^2}{r_C^3} J_{x_0 y_0}.$$

С учетом того, что квадрат угловой скорости обращения спутника, движущегося по круговой орбите на расстоянии r_C от притягивающего центра,

$$\nu_0^2 = \frac{g_0 r_0^2}{r_C^3},$$

окончательно проекции гравитационных сил и моментов получаем в форме

$$G_{x_0} = -\nu_0^2 \int_V x_0 dm; \quad G_{y_0} = -r_C \nu_0^2 m + 2\nu_0^2 \int_V y_0 dm; \quad (6.4.7)$$

$$G_{z_0} = -\nu_0^2 \int_V z_0 dm; \quad (6.4.7)$$

$$M_{\Gamma x_0} = -3\nu_0^2 J_{y_0 z_0}; \quad M_{\Gamma y_0} = 0; \quad M_{\Gamma z_0} = 3\nu_0^2 J_{x_0 y_0}. \quad (6.4.8)$$

Как видим, гравитационные моменты записываются в достаточно простом виде, но пользоваться формулами (6.4.8) затруднительно, так как

центробежные моменты инерции $J_{x_0y_0}$ и $J_{y_0z_0}$ определены в базовой системе координат и могут меняться в течение полета. Чтобы избежать этого, выразим центробежные моменты инерции через главные моменты инерции КА.

Введем связанный систему координат $OXYZ$ с единичными векторами $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Пусть x, y, z — проекции вектора \mathbf{r}^* на оси связанный системы координат. Центробежный момент инерции в базовой системе координат можно записать так:

$$J_{x_0y_0} = \int_V x_0 y_0 dm = \int_V (\mathbf{r}^* \cdot \mathbf{i}_0) (\mathbf{r}^* \cdot \mathbf{j}_0) dm .$$

Но

$$\mathbf{i}_0 = (\mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{i}) \mathbf{i} + (\mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{j}) \mathbf{j} + (\mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k} ;$$

$$\mathbf{j}_0 = (\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{i}) \mathbf{i} + (\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{j}) \mathbf{j} + (\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k} ; \quad (6.4.9)$$

$$\mathbf{k}_0 = (\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{i}) \mathbf{i} + (\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{j}) \mathbf{j} + (\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k} .$$

Далее

$$(\mathbf{r}^* \cdot \mathbf{i}_0) = x (\mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{i}) + y (\mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{j}) + z (\mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{k}) ;$$

$$(\mathbf{r}^* \cdot \mathbf{j}_0) = x (\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{i}) + y (\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{j}) + z (\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{k}) ;$$

$$(\mathbf{r}^* \cdot \mathbf{k}_0) = x (\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{i}) + y (\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{j}) + z (\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{k}) .$$

Тогда

$$\begin{aligned} J_{x_0y_0} &= (\mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{i}) (\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{i}) \int_V x^2 dm + (\mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{j}) (\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{j}) \int_V y^2 dm + \\ &+ (\mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{k}) (\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{k}) \int_V z^2 dm + [(\mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{i}) (\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{j}) + (\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{i}) (\mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{j})] \int_V xy dm + \\ &+ [(\mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{i}) (\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{k}) - (\mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{k}) (\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{i})] \int_V xz dm + [(\mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{j}) (\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{k}) + \\ &+ (\mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{k}) (\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{j})] \int_V yz dm . \end{aligned}$$

Учитывая, что в качестве связанных осей координат выбраны главные оси инерции аппарата и, следовательно,

$$\int_V xy dm = \int_V xz dm = \int_V yz dm = 0 ,$$

получаем

$$J_{x_0 y_0} = (\mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{i}) (\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{i}) \int_V (x^2 - z^2) dm + (\mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{j}) (\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{j}) \int_V (y^2 - z^2) dm + \\ + [(\mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{k}) (\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{k}) + (\mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{i}) (\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{i}) + (\mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{j}) (\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{j})] \int_V z^2 dm.$$

Проанализируем каждое слагаемое. Имеем

$$\int_V (x^2 - z^2) dm = \int_V (x^2 + y^2) dm - \int_V (y^2 + z^2) dm = J_z - J_y;$$

$$\int_V (y^2 - z^2) dm = \int_V (x^2 + y^2) dm - \int_V (x^2 + z^2) dm = J_z - J_y.$$

Обращаясь к (6.4.9), нетрудно заметить, что

$$(\mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{i}) (\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{i}) + (\mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{j}) (\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{j}) + (\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{k}) (\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{k}) = (\mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{j}_0) = 0.$$

Поэтому

$$J_{x_0 y_0} = (\mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{i}) (\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{i}) [J_z - J_x] + (\mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{j}) (\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{j}) [J_z - J_y].$$

Аналогично

$$J_{y_0 z_0} = \int_V y_0 z_0 dm = \int_V (\mathbf{r}^* \cdot \mathbf{j}_0) (\mathbf{r}^* \cdot \mathbf{k}_0) dm = (\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{i}) (\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{i}) \int_V x^2 dm + \\ + (\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{j}) (\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{j}) \int_V y^2 dm + (\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{k}) (\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{k}) \int_V z^2 dm = \\ = (\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{j}) (\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{j}) \int_V (y^2 - x^2) dm + (\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{k}) (\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{k}) \int_V (z^2 - x^2) dm + \\ + [(\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{i}) (\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{i}) + (\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{j}) (\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{j}) + (\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{k}) (\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{k})] \int_V x^2 dm,$$

где

$$\int_V (y^2 - x^2) dm = \int_V (y^2 + z^2) dm - \int_V (x^2 + z^2) dm = J_x - J_y;$$

$$\int_V (z^2 - x^2) dm = \int_V (z^2 + y^2) dm - \int_V (x^2 + y^2) dm = J_x - J_z;$$

$$[(\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{i}) (\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{i}) + (\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{j}) (\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{j}) + (\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{k}) (\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{k})] = (\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{k}_0) = 0.$$

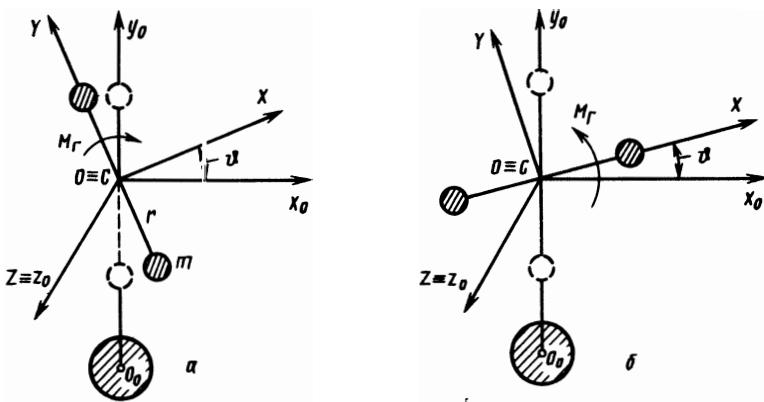


Рис. 6.7.

Поэтому

$$J_{y_0 z_0} = (\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{j}) (\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{j}) [J_x - J_y] + (\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{k}) (\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{k}) [J_x - J_z].$$

Окончательное выражение для гравитационного момента имеет вид

$$\mathbf{M}_r = -3\nu_0^2 \left\{ [(\mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{j}) (\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{j}) (J_x - J_y) + (\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{k}) (\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{k}) (J_x - J_z)] \mathbf{i}_0 - [(\mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{i}) (\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{i}) (J_z - J_x) + (\mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{j}) (\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{j}) (J_z - J_y)] \mathbf{k}_0 \right\}. \quad (6.4.10)$$

В частности, для КА, имеющего центр симметрии, $J_x = J_y = J_z$ и, следовательно, $\mathbf{M}_r = 0$. Если КА является осесимметричным телом, то при некотором взаимном расположении связанных и базовых осей выражение (6.4.10) упрощается.

Рассмотрим случай, когда связанные оси повернуты относительно базовых только на малый угол $\Delta\vartheta$, так что $\Delta\gamma = \Delta\psi = 0$. При этом

$$(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{j}) = (\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{k}) = 0; \quad (\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{i}) = \sin \Delta\vartheta; \quad (\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{j}) = \cos \Delta\vartheta;$$

$$(\mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{i}) = \cos \Delta\vartheta; \quad (\mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{j}) = -\sin \Delta\vartheta$$

$$\mathbf{M}_r = -\frac{3}{2} \nu_0^2 (J_x - J_y) \sin 2\Delta\vartheta \mathbf{k}_0. \quad (6.4.11)$$

Если $J_x > J_y$ (рис. 6.7, а), то при любом малом угловом отклонении $\Delta\vartheta$ возникает гравитационный момент, который стремится вернуть аппарат к положению устойчивого равновесия, когда ось OY совпадает с осью Oy_0 .

В случае $J_x < J_y$ (рис. 6.7, б) возникающий при малом угловом откло-

нении $\Delta\vartheta$ гравитационный момент увеличивает по абсолютной величине угол $\Delta\vartheta$, так что аппарат разворачивается в сторону рассмотренного выше положения устойчивого равновесия. Таким образом, при $\Delta\vartheta = n\pi$ ($n = 0, 1, 2 \dots$) КА, у которого $J_x < J_y$, находится в состоянии неустойчивого равновесия.

Принцип воздействия гравитационного момента на осесимметричное тело типа гантели используется в системах ориентации КА для построения местной гравитационной вертикали.

Гантель, у которой $J_x = J_z = 2mr^2$, $J_y = 0$ (см. рис. 6.7, а), будет стремиться к положению устойчивого равновесия, при котором ее продольная ось совпадает с направлением гравитационной вертикали Oy_0 . Гравитационный момент, действующий на такую гантель,

$$\mathbf{M}_\Gamma = -3\nu_0^2 mr^2 \sin 2\Delta\vartheta \mathbf{k}_0.$$

Гравитационные силы и моменты, определенные в базовой системе координат, могут быть записаны в проекциях на связанные оси, для чего используются преобразования (6.2.9). Учитывая малость углов отклонения связанных осей относительно базовых, выражение (6.4.10) можно записать так:

$$\mathbf{M}_\Gamma = -3\nu_0^2 \left\{ \Delta\gamma(J_z - J_y)\mathbf{i}_0 - \Delta\vartheta(J_y - J_x)\mathbf{k}_0 \right\}.$$

Спроектируем единичные векторы \mathbf{i}_0 , \mathbf{k}_0 на оси связанный системы координат:

$$\mathbf{i}_0 = (\mathbf{i} \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{k})\mathbf{k} = \mathbf{i} - \Delta\vartheta\mathbf{j} + \Delta\psi\mathbf{k};$$

$$\mathbf{k}_0 = (\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{k})\mathbf{k} = -\Delta\psi\mathbf{i} + \Delta\gamma\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

В соответствии с этим с точностью до величин второго порядка малости получим

$$\mathbf{M}_\Gamma = -3\nu_0^2 \left\{ \Delta\gamma(J_z - J_y)\mathbf{i} - \Delta\vartheta(J_y - J_x)\mathbf{k} \right\}. \quad (6.4.12)$$

Таким образом, проекции гравитационного момента на оси связанный системы координат будут

$$M_{\Gamma x} = -3\nu_0^2 (J_z - J_y) \Delta\gamma;$$

$$M_{\Gamma y} = 0; \quad (6.4.13)$$

$$M_{\Gamma z} = 3\nu_0^2 (J_y - J_x) \Delta\vartheta.$$

Действие давления света

Излучение Солнца обычно проявляется в виде светового излучения, радиоизлучения и корпускулярной радиации. По существующим представ-

лениям солнечный свет является электромагнитными волнами различной длины: от ультрафиолетовых до инфракрасных. Большая часть (99 %) энергии солнечного света заключена в интервале длин волн 0,3 ... 4,0 мкм.

Поток солнечной энергии, падающей в единицу времени перпендикулярно площадке в 1 м^2 , которая расположена на определенном расстоянии от Солнца, называется солнечной постоянной.

Солнечная постоянная зависит от длины волны и расстояния облучаемого аппарата от Солнца. На уровне траектории движения Земли, т.е. на расстоянии в 1 а.е., солнечная постоянная равна $1,4 \cdot 10^3 \text{ Вт}/\text{м}^2$.

Солнечные лучи создают давление света, которое прямо пропорционально отражательной способности поверхности тела и обратно пропорционально квадрату расстояния его от Солнца. Вблизи Земли давление света составляет $4,3 \cdot 10^{-6} \text{ Н}/\text{м}^2$. В общем случае

$$p_c = \frac{4,3 \cdot 10^{-6}}{r_c^2}$$

где r_c – расстояние от Солнца в а.е.

Корпускулярное излучение, часто называемое солнечным ветром, представляет собой потоки заряженных частиц (электронов, протонов, ионов), излучаемых Солнцем или другими звездами. В состав солнечного ветра входят протоны, порождаемые солнечными вспышками и излучаемые в виде плазмы, электроны и протоны, захваченные магнитным полем Земли, и космические лучи – частицы очень больших энергий (10^{18} эВ), генерируемые Солнцем или поступающие из других галактик. Скорость частиц корпускулярного излучения $v = 500 \dots 1500 \text{ км}/\text{с}$, максимальная их концентрация $10^9 \text{ 1}/\text{м}^3$.

Следует иметь в виду, что атмосфера Земли служит существенным препятствием для солнечного излучения. Различные спектры (в основном коротковолновый диапазон) солнечного излучения поглощаются атмосферой. Ее "непрозрачность" связана с наличием озона, частичек воды и пыли и т.д. Корпускулярные потоки практически не проникают на поверхность Земли.

Говорить о влиянии давления света можно только при полетах ракеты на высотах, больших 1000 ... 2000 км. Для аппарата, движущегося на высотах порядка 200 км, влияние давления света пренебрежимо мало по сравнению с аэродинамическим воздействием. Но уже на высоте более 500 км силы и моменты сил давления света начинают преобладать над аэродинамическими, а затем превосходят и гравитационные.

Возможны две модели отражения солнечных лучей от поверхности КА: зеркальное и диффузное. Ближе к действительности последняя модель. При диффузном отражении элементарная сила давления света, действующая на элемент площади dS (рис. 6.8), равна :

$$dF_c = p_c \tau dS \cos \beta, \text{ где } \cos \beta = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}),$$

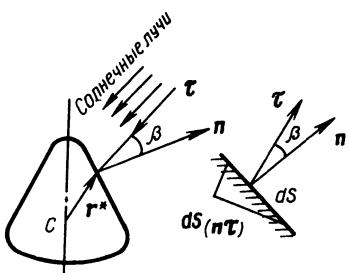


Рис. 6.8.

а элементарный момент

$$dM_c = d\mathbf{F}_c \times \mathbf{r}^* = p_c dS \tau (\mathbf{n} \cdot \tau) \times \mathbf{r}^*.$$

Здесь τ и n – единичные векторы в направлении, противоположном потоку, и в направлении нормали к площадке dS ; \mathbf{r}^* – радиус-вектор точки, где рассматривается элементарный поток. Равнодействующая сила давления света и момент этой силы определяется как

$$\mathbf{F}_c = p_c \tau \int_S (\mathbf{n} \cdot \tau) dS, \quad M_c = p_c \tau \times \int_S \mathbf{r}^* \cdot (\mathbf{n} \cdot \tau) dS, \quad (6.4.14)$$

где S – поверхность аппарата, облучаемая Солнцем.

В общем случае силу и момент давления света можно записать в виде

$$F_c = kp_c S; \quad M_c = kp_c S x_F,$$

где p_c – давление света; x_F – расстояние от центра давления до центра масс; k – коэффициент, зависящий от характера отражения света и распределения теплового излучения на поверхности аппарата ($k = 1$ соответствует зеркальному отражению; $k = 1,4$ – полному диффузному отражению).

Для КА конической формы с углом полураствора δ момент сил давления света будет [5]

$$M_c = \frac{p_c l^2}{2} \left(\frac{2}{3} l \cos^2 \delta - x_{ц.м.} \right) \sin 2\delta \sin \beta, \quad (6.4.15)$$

где l – длина образующей конической поверхности; $x_{ц.м.}$ – координата центра масс, отсчитываемая от носка конуса.

Для увеличения момента сил давления света используются солнечные паруса, удаленные от центра масс КА на значительное расстояние.

Взаимодействие с магнитным полем Земли

Землю принято считать слабым постоянным магнитом, поле которого напоминает магнитное поле диполя. Геомагнитная ось наклонена к оси вращения Земли на $11,5^\circ$. Центр диполя смещен от геометрического центра Земли на 500 км в сторону восточного полушария.

Источники магнитного поля Земли находятся в ядре, земной коре и в верхней атмосфере планеты. Предполагают, что главным источником являются системы электрических токов в жидком ядре Земли. В зависимости от движения жидкости изменяются направления и значения электрических токов, что приводит к медленному перемещению магнитных полюсов по поверхности Земли.

Второй источник земного магнетизма – магнитные аномалии, вызван-

ные скоплением ферромагнитных руд в определенных областях земной коры. Местные аномалии вызывают некоторое отклонение земного магнитного поля от правильного центрального диполя.

Третья причина магнетизма связана с токами заряженных частиц в верхних слоях атмосферы и околоземном космическом пространстве.

Наибольшее значение суммарной магнитной напряженности на поверхности Земли на магнитных полюсах 50,2 А. На экваторе магнитная напряженность составляет 24,8 А/м. На территории нашей страны напряженность магнитного поля не превышает 36 А/м.

Магнитное поле Земли вследствие давления постоянного корпускулярного потока из космоса локализовано в ограниченной области земного пространства и образует магнитосферу Земли. Магнитосфера в спокойный период ограничена радиусом $R_M = (10 \dots 15) R_3$, в период магнитных бурь $R_M = (3 \dots 6) R_3$.

С удалением от поверхности Земли интенсивность магнитного поля падает. В центральной части магнитосферы потенциал геомагнитного поля приближенно можно описать уравнением

$$W = W_0 + W_1 = \frac{10}{4\pi} \left[-\frac{Q_3}{r^2} \sin\varphi - 0,4 \frac{R_3^3}{R_M^3} r \sin\varphi \right],$$

где W_0 – потенциал геомагнитного поля, обусловленный внутренними источниками; W_1 – потенциал магнитного поля от токов, распределенных по поверхности магнитосферы; Q_3 – модуль вектора магнитного момента Земли; R_M – радиус магнитосферы; R_3 – радиус Земли; r – расстояние от центра Земли до точки, где определяется потенциал поля; φ – геомагнитная широта.

Как известно, напряженность магнитного поля $\mathbf{H} = \text{grad } W$.

Силовое воздействие магнитосферы на КА определяется величиной вектора магнитной индукции, который подсчитывается по формуле

$$\mathbf{B}_3 = \mu_0 \mu Q_3 [\mathbf{k}_0 - 3(\mathbf{k}_0, \mathbf{r}_0) \mathbf{r}_0] \frac{1}{r^3}, \quad (6.4.16)$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная; $\mu = 1$ – магнитная проницаемость околоземного пространства; \mathbf{k}_0 – единичный вектор, направленный по оси геомагнитного поля в сторону Северного полюса; \mathbf{r}_0 – единичный вектор, направленный по радиусу-вектору точки, где определяется индукция (рис. 6.9).

Значение магнитной индукции Земли на экваториальной круговой орбите высотой h определяется формулой

$$B_3 = \frac{9 \cdot 10^{-6}}{(6370 + h)^3} \text{ Т.}$$

На борту КА всегда существуют электрические цепи, магнитные элементы приборов, в металлической оболочке наводятся токи Фуко, которые

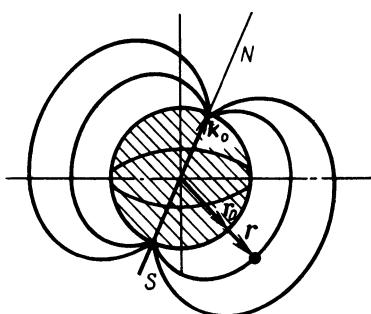


Рис. 6.9.

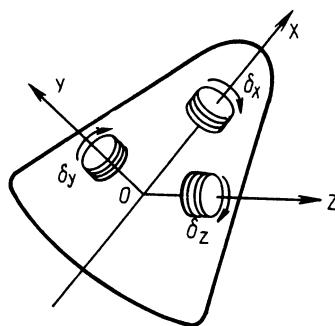


Рис. 6.10.

создают собственное магнитное поле. Взаимодействуя с магнитным полем Земли, оно создает момент, стремящийся ориентировать магнитный диполь аппарата по силовым геомагнитным линиям:

$$\mathbf{M}_M = \mathbf{Q}_M \times \mathbf{B}_3, \quad (6.4.17)$$

где \mathbf{Q}_M – вектор магнитного момента аппарата, $\mathbf{Q}_M = \frac{1}{2c} \int_V (\mathbf{r}^* \times \delta) dV$; c – скорость света; V – объем аппарата; \mathbf{r}^* – радиус-вектор элемента КА; δ – плотность тока в элементе КА.

Зная ориентацию векторов \mathbf{Q}_M и \mathbf{B}_3 относительно связанных осей, нетрудно записать проекции на них магнитного момента M_{Mx} , M_{My} и M_{Mz} .

Пусть магнитопривод, предназначенный для ориентации КА в пространстве, состоит из трех катушек. Ось каждой катушки совпадает с соответствующей осью связанной системы координат $OXYZ$ (рис. 6.10).

Обозначая ток, протекающий через катушку, электромагнитная ось которой совпадает с осью OX , через δ_x , с осью OY – через δ_y , с осью OZ – через δ_z , запишем выражения для магнитных моментов каждой катушки

$$Q_{Mx} = nS\delta_x; Q_{My} = nS\delta_y; Q_{Mz} = nS\delta_z,$$

где n и S – соответственно число витков и площадь витка, которые предполагаются одинаковыми для всех обмоток.

Часто возникает необходимость определить значения магнитного момента аппарата \mathbf{Q}_M , который обеспечивал бы создание требуемого, например для целей управления, магнитного момента \mathbf{M}_M . Для нахождения \mathbf{Q}_M умножим векторно левую и правую части равенства (6.4.17) на \mathbf{B}_3 :

$$\mathbf{B}_3 \times \mathbf{M}_M = \mathbf{B}_3 \times \mathbf{Q}_M \times \mathbf{B}_3,$$

получим

$$\mathbf{B}_3 \times \mathbf{M}_M = \mathbf{Q}_M (\mathbf{B}_3 \cdot \mathbf{B}_3) - \mathbf{B}_3 (\mathbf{Q}_M \cdot \mathbf{B}_3),$$

или

$$Q_M = \frac{1}{B_3^2} [(\mathbf{B}_3 \times \mathbf{M}_M) + \mathbf{B}_3 (Q_M \cdot \mathbf{B}_3)].$$

Потребление электроэнергии для создания магнитного момента минимально при таком Q_M , при котором второе слагаемое полученного соотношения $(Q_M \cdot \mathbf{B}_3) = 0$.

В этом случае

$$Q_M = \frac{1}{B_3^2} (\mathbf{B}_3 \times \mathbf{M}_M).$$

Проектируя данное векторное равенство на оси $OXYZ$, получаем значения токов

$$\delta_x = \frac{1}{nSB_3^2} (B_{3y}M_{Mz} - B_{3z}M_{My}); \quad \delta_y = \frac{1}{nSB_3^2} (B_{3z}M_{Mx} - B_{3x}M_{Mz}); \quad \delta_z = \frac{1}{nSB_3^2} (B_{3x}M_{My} - B_{3y}M_{Mx}),$$

которые необходимо пропустить через каждую катушку для создания требуемого магнитного момента.

Управляющие силы и моменты

Как отмечалось, в § 1.9, для управления полетом ракеты необходимо определенным образом изменять величину скорости центра масс аппарата и ориентацию его с сей в пространстве. Для этой цели на активных участках полета используются различные органы управления: воздушные и газовые (газоструйные) рули, вспомогательные верньерные двигатели, поворот маршевых двигателей, изменение их тяги дросселированием и форсированием, поворотные сопла двигателей, дефлекторы и т.д. При отклонении органов управления от нейтрального положения возникают необходимые для управления силы и моменты.

Выбор того или иного средства управления осуществляют, сравнивая потребные значения управляющих сил и моментов с возмущающими силами и моментами. Естественно, что управляющие воздействия должны пре- восходить максимально возможные возмущающие воздействия.

Рассмотрим силы и моменты, управляющие вращательным движением ракеты и КА относительно центра масс на пассивных участках полета.

На пассивном участке движения для ориентации аппарата и стабилизации его углового положения требуются меньшие управляющие силы и моменты. Для их создания используются другие средства: управляющие микрореактивные двигатели (УМРД), двигатели-маховики, гироскопические исполнительные органы (гиродинны), моментные магнитоприводы. Все эти средства предполагают получение управляющих сил и моментов за счет расхода энергии КА и относятся к активным системам управления. Наибо-

лее распространен способ создания управляющих моментов при помощи реактивных сопел. УМРД устанавливаются на максимально возможном расстоянии от центра масс аппарата так, чтобы возникала пара сил. Управляющий момент, как правило, постоянен по модулю

$$M_{\text{упр}} = Lp = LP \frac{dm}{dt} , \quad (6.4.18)$$

где P – тяга УМРД; L – плечо тяги; J – удельный импульс; dm/dt – секундный расход топлива.

Полный импульс тяги управляющих двигателей

$$I = \int M_{\text{упр}} dt = LJm .$$

Из этого выражения следует, что при постоянном полном импульсе расход топлива m обратно пропорционален удельному импульсу J . Так как УМРД работает не постоянно, а только в случае необходимости парировать возмущения или ориентировать КА, расход рабочего тела определяется не только его количеством, поданным в сопла двигателей, но и потерями при хранении и преобразовании энергии. Для создания реактивной тяги в УМРД используется либо кинетическая энергия сжатого газа, либо химическая энергия одно- или двухкомпонентного топлива. В качестве рабочего тела в системе, работающей на сжатом газе, чаще всего выбирают азот. Газы с меньшей молекулярной массой имеют больший удельный импульс, но вследствие малой плотности для их хранения требуются более громоздкие баллоны, в результате чего суммарная масса системы оказывается больше. Кроме того, азот безопасен в эксплуатации.

В качестве однокомпонентного топлива для УМРД используется перекись водорода 90 %- или 99 %-ной концентрации, гидразин и др.

Двухкомпонентное топливо выбирается, как правило, из числа самовоспламеняющихся, например несимметричный диметилгидразин и четырехокись азота НДМГ + N_2O_4 . Зависимость массы системы стабилизации на различных рабочих телах от полного импульса I показана на рис. 6.11.

Работа камер УМРД организуется не в непрерывном, а в более экономичном по расходу топлива импульсном режиме (рис. 6.12, *a*). Выбирая продолжительность перерывов между импульсами тяги УМРД, создают необходимые средний управляющий момент $M_{\text{упр}}$ и полный суммарный импульс. Типичные переходные характеристики камеры УМРД и управляющего ею клапана приведены на рис. 6.12, *б*.

Для создания управляющих моментов могут использоваться врачающиеся инерционные массы, расположенные на борту КА. Раскручивая или затормаживая маховик при помощи электродвигателя, в соответствии с законом сохранения количества движения можно привести во вращение летательный аппарат (рис. 6.13).

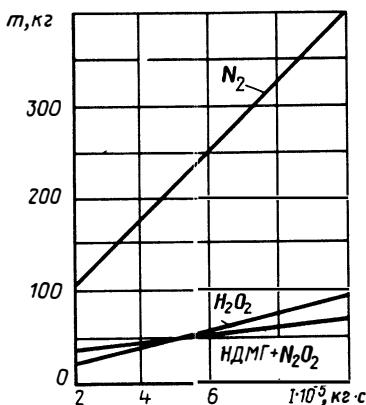


Рис. 6.11.

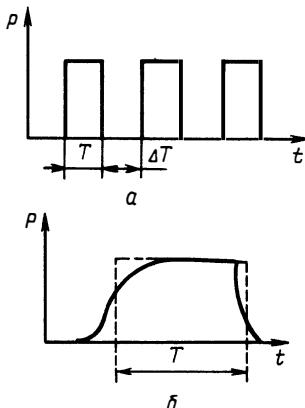


Рис. 6.12.

Управляющий момент инерционного маховика (ИМ) определяется выражением

$$M_{\text{упр}} = -J_m \frac{d\Omega}{dt}, \quad (6.4.19)$$

из которого следует, что для создания управляющего момента при неизменном J_m необходимо изменять угловую скорость маховика Ω . Обычно для управления угловой скоростью используются электродвигатели различных типов: двухфазные асинхронные двигатели постоянного тока с независимым или последовательным возбуждением и др.

Независимо от типов электродвигателей, используемых в качестве приводов маховиков, создаваемый двигателем момент и его приращение определяются форсунками

$$M_d = M_{d0} + \Delta M_d; \quad \Delta M_d = k_u \Delta U - k_\Omega \Omega; \quad \Omega = \Omega_0 + \Delta \Omega,$$

где k_u и k_Ω – коэффициенты пропорциональности, зависящие от параметров двигателей; ΔU – приращение питающего двигатели напряжения, соответствующее требуемому управлению; $\Delta \Omega$ – приращение угловой скорости оси электродвигателя; M_{d0} – начальный момент, создаваемый двигателем при отсутствии сигнала управления ΔU ; Ω_0 – начальная угловая скорость двигателя.

Приращение момента ΔM_d электродвигателя используют для создания управляющего момента, так что $M_{\text{упр}} \approx \Delta M_d$ (пренебрегаем частью энергии, которая превращается в тепло и рассеивается).

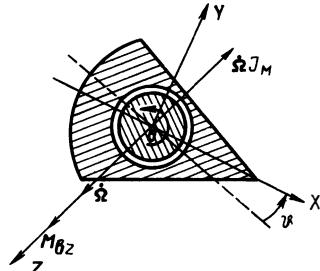


Рис. 6.13.

Таким образом, выражение для управляющего момента приобретает вид

$$M_{\text{упр}} = k_u \Delta U - k_\Omega \Omega,$$

где $k_\Omega \Omega$ определяется значением противоЭДС, возникающей при вращении.

Обычно используется безразмерная величина управляющего сигнала $U = \Delta U / U_{\max}$ ($0 \leq U \leq 1$), где U_{\max} – максимально возможное напряжение, подаваемое на электродвигатель. Поэтому

$$M_{\text{упр}} = k_u \bar{U} - k_\Omega \Omega. \quad (6.4.20)$$

При использовании инерционных маховиков для управления ракетой необходимо учитывать их подверженность насыщению: при действии постоянного возмущающего момента инерционный маховик должен постоянно разгоняться, но его конструкционные, прочностные и другие характеристики ограничены.

Гироскопические методы создания управляющих моментов дают выигрыш энергии по сравнению с методами, использующими инерционные маховики.

Системы с гироскопическими исполнительными органами принято разделять на полупассивные и активные. В обоих случаях управляющий момент создается за счет изменения направления вектора кинетического момента гироскопа. При этом кинетическая энергия роторов не меняется. В полупассивных системах гироскопы предназначены для демпфирования колебаний объекта без использования специальной системы управления. Энергия в них расходуется на поддержание постоянных кинетических моментов гироскопов.

Активные гироскопические системы применяются для стабилизации КА, для осуществления программных разворотов, сброса кинетического момента и т.д. Здесь гироскопы выполняют функции исполнительных органов в замкнутой системе управления.

Поясним принцип действия гироскопических систем, работающих в полупассивном и активном режимах. Пусть на КА установлен двухстепенной гироскоп, обладающий кинетическим моментом \mathbf{L}_0 . Ось прецессии гироскопа совпадает с продольной осью ракеты (рис. 6.14). Допустим, что в начальном невозмущенном положении отсутствует угловое рассогласование между осями трех следующих систем координат: связанной с КА $OXYZ$, связанной с кожухом гироскопа $Ox_g y_g z_g$ и базовой системой $Ox_0 y_0 z_0$. Рассмотрим поведение указанного гироскопа при воздействии постоянного возмущающего момента M_{Bz} в плоскости тангажа. Под действием этого момента КА начинает вращаться с угловой скоростью

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{M_{Bz}}{J_z} t.$$

Вращение аппарата вызовет прецессию гироскопа относительно оси OX с угловой скоростью $d\beta/dt$. Как следствие прецессии появится гироскопический момент

$$M_{\text{гир}} = L \times \frac{c\beta}{a t} ,$$

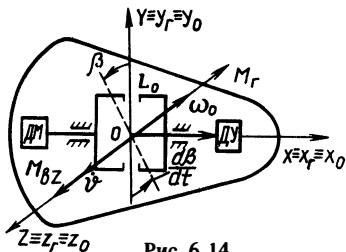


Рис. 6.14.

направленный против внешнего возмущающего момента M_{Bz} . Здесь $|L| = L_0 \cos\beta$. В полуавтоматической системе гироскопический момент увеличивает сопротивляемость КА возмущающим моментам.

Не вдаваясь в анализ переходных процессов, можно записать, что в установившемся режиме будет иметь место равенство

$$M_{\text{гир}} = M_{Bz} ,$$

позволяющее оценить угловую скорость прецессии:

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{M_{Bz}}{L_0 \cos\beta} .$$

В активных системах специальный датчик момента (ДМ), расположенный на оси прецессии гироскопа, создает по команде системы управления момент M_{DM} . Гироскоп отклоняется под действием этого момента, появляется гироскопический момент, который заставляет КА развернуться вокруг оси OZ .

Таким образом, в обоих режимах управляющий момент, за счет которого разворачивается КА, определяется формулой

$$M_{y\text{упр}} = M_{\text{гир}} = L_0 \frac{d\beta}{dt} \cos\beta . \quad (6.4.21)$$

Нетрудно установить, что суммарный управляющий момент системы не может превысить некоторого значения (кинетического момента гироскопа).

Действительно, интегрируя равенство (6.4.21), получаем

$$\int M_{y\text{упр}} dt = \int L_0 \frac{d\beta}{dt} \cos\beta dt = L_0 \sin\beta \leq L_0 .$$

Иными словами, при действии на КА постоянных возмущений наступает состояние насыщения, когда гироскопические исполнительные органы теряют работоспособность. Это произойдет, когда вектор L будет совмещен

с осью стабилизации OZ , т.е. при $\beta = \pi/2$. Обычно устанавливается допустимый угол прецессии $\beta_n < \pi/2$, называемый углом насыщения. При любом угле $\beta < \beta_n$ работоспособность системы удовлетворительная. Эффективность гироскопа максимальна при $\beta = 0$.

Существование режима насыщения гироскопических систем, как и систем с инерциальными маховиками, является серьезным их недостатком. К недостаткам также относится наличие перекрестных связей при стабилизации или управлении КА относительно трех осей координат. Действительно, при $\beta \neq 0$ вектор L_0 можно разложить на две составляющие: $L_y = L_0 \cos\beta$ и $L_z = L_0 \sin\beta$ (рис. 6.15). Вертикальная составляющая L_y является "полезной" для управления в плоскости тангажа, горизонтальная составляющая L_z вносит искажения в работу этого канала при наличии возмущающего момента M_{By} в плоскости рыскания. Когда гироскоп отклонен от оси OY на угол β и на КА действует возмущающий момент M_{By} (а возмущения M_{Bz} в плоскости тангажа отсутствуют), L_z и M_{By} вызывают прецессию гироскопа с угловой скоростью $d\beta/dt$, возникает гироскопический момент

$$M_{\text{гир}z} = L_y \times \frac{d\beta}{dt},$$

разворачивающий КА по тангажу, хотя возмущение действует по рысканию.

Чтобы избавиться от перекрестных связей, применяют спаренные гироскопы, кинетические моменты которых равны, но противоположны по направлению в исходном состоянии. Гироскопы соединены кинематически передачей так, что прецессия их будет происходить в разные стороны, а гироскопические моменты будут равны и противоположно направлены. Три такие системы, установленные по трем взаимно перпендикулярным осям, стабилизируют КА без перекрестных связей.

Режим насыщения гироскопической системы ликвидируется с помощью управляющих реактивных двигателей. В режиме сброса кинетического момента, когда гироскоп достиг угла насыщения $\beta = \beta_n$ (если рассматривать движение по каналу тангажа), включаются реактивные сопла (см. рис. 6.15), создающие момент $M_{p.c}$. Аппарат начинает вращаться с угловой скоростью $d\vartheta/dt$, что приводит к прецессии гироскопа с угловой скоростью $d\beta/dt$, уменьшающей угол β до нуля. Прецессия гироскопа вызывает возникновение гироскопического момента $M_{\text{гир}}$, направленного против момента $M_{p.c}$. В установившемся режиме $M_{\text{гир}} = M_{p.c}$, поэтому работоспособность гиросистемы восстанавливается без изменения угла тангажа аппарата. При достижении вектором L_0 первоначального положения,

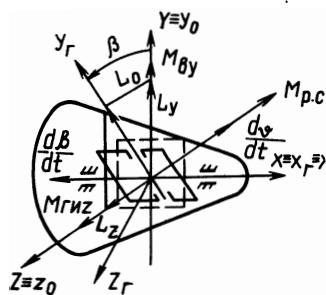


Рис. 6.15.

перпендикулярного оси стабилизации ($\beta = 0$), УМРД должны быть выключены.

При исследовании движения КА часто бывает необходимо учитывать силы Кориолиса, возникающие при вращении объекта и относительном движении его элементов (в том числе движении жидкых топлив), и силы, обусловленные смещением центра масс относительно корпуса КА. Эти силы достаточно подробно рассмотрены в гл. 1, и мы не будем на них останавливаться.

§ 6.5. ПАССИВНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ КА

Для приближения параметров движения КА к программным значениям могут использоваться как управляющие, так и внешние силы и моменты, для создания которых не требуется расходовать энергию, запасенную на аппарате.

Стабилизация КА, осуществляемая за счет внешних сил и моментов, называется пассивной.

Поскольку анализировать поведение аппарата при одновременном учете всех внешних моментов затруднительно, ограничимся рассмотрением движения КА вокруг центра масс под действием моментов либо гравитационных, либо аэродинамических сил, либо давления света. Остановимся на исследовании заземленного углового движения КА вокруг одной из осей связанной системы координат, например оси OZ . Запишем уравнение заземленного вращательного движения

$$J_z \frac{d^2 \Delta \vartheta}{dt^2} = M_z .$$

В зависимости от условий полета КА преобладающими будут либо гравитационный момент

$$M_z = -3\nu_0^2 (J_x - J_y) \Delta\vartheta ,$$

либо момент аэrodинамических сил

$$M_z = M_z^\alpha \Delta\alpha ,$$

где $\Delta\alpha \approx \Delta\vartheta$ для орбит, близких к круговым, либо момент давления света, определяемый по формуле (6.4.15), в которой $\Delta\beta = \Delta\vartheta$, если в программном движении требуется, чтобы продольная ось КА совпадала с направлением на Солнце.

Для всех случаев можно записать уравнение вращательного движения в виде

$$J_z \frac{d^2 \Delta \vartheta}{dt^2} = -k_m \Delta \vartheta , \quad (6.5.1)$$

где коэффициент момента

$$k_M = \begin{cases} 3\nu_0^2 (J_x - J_y); \\ -M_z^\alpha = -m_z^\alpha \frac{\rho V^2}{2}; \\ \frac{p_c l^2}{2} [\frac{2}{3} l \cos^2 \delta - x_{ц.м}] \sin 2\delta. \end{cases} \quad (6.5.2)$$

Итак, в рассматриваемом случае движение аппарата описывается уравнением гармонических колебаний

$$\frac{d^2 \Delta \vartheta}{dt^2} + \omega^2 \Delta \vartheta = 0, \quad (6.5.3)$$

в котором собственная частота колебаний КА $\omega^2 = k_M/J_z$.

Следовательно, для углового движения КА при пассивной стабилизации любого вида характерно отсутствие демпфирования. Здесь можно говорить об устойчивости движения, подразумевая, что аппарат может быть на границе колебательной неустойчивости. При действии возмущений аппарат при пассивной стабилизации совершает гармонические колебания относительно положения $\Delta \vartheta = 0$.

Гравитационная стабилизация КА. Движение тела вокруг центра масс в центральном гравитационном поле

Проанализируем пространственное движение КА вокруг центра масс под действием гравитационного момента, предполагая, что остальные моменты пренебрежимо малы. С учетом выражений (6.4.13) для проекций гравитационного момента запишем уравнения вращательного движения тела (6.3.6) в проекциях на оси связанный системы координат:

$$\begin{aligned} J_x \frac{d^2 \Delta \gamma}{dt^2} + \nu_0^2 (J_z - J_y) \Delta \gamma + \nu_0 (J_x + J_y - J_z) \frac{d \Delta \psi}{dt} &= \\ = -3\nu_0^2 (J_z - J_y) \Delta \gamma; \\ J_y \frac{d^2 \Delta \psi}{dt^2} + \nu_0^2 (J_z - J_x) \Delta \psi - \nu_0 (J_x + J_y - J_z) \frac{d \Delta \gamma}{dt} &= 0; \\ J_z \frac{d^2 \Delta \vartheta}{dt^2} = -3\nu_0^2 (J_x - J_y) \Delta \vartheta. \end{aligned} \quad (6.5.4)$$

После приведения подобных членов получим

$$\begin{aligned} J_x \frac{d^2 \Delta \gamma}{dt^2} + 4\nu_0^2 (J_z - J_y) \Delta \gamma + \nu_0 (J_x + J_y - J_z) \frac{d \Delta \gamma}{dt} &= 0; \\ J_y \frac{d^2 \Delta \psi}{dt^2} + \nu_0^2 (J_z - J_x) \Delta \psi - \nu_0 (J_x + J_y - J_z) \frac{d \Delta \gamma}{dt} &= 0; \\ J_z \frac{d^2 \Delta \vartheta}{dt^2} + \nu_0^2 (J_x - J_y) \Delta \vartheta &= 0. \end{aligned} \quad (6.5.5)$$

Определим соотношения между моментами инерции J_x, J_y, J_z , при которых обеспечивается устойчивое движение тела. Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} J_x \lambda^2 + 4\nu_0^2 (J_z - J_y) & \nu_0 (J_x + J_y - J_z) \lambda & 0 \\ -\nu_0 (J_x + J_y - J_z) \lambda & J_y \lambda^2 + \nu_0^2 (J_z - J_x) & 0 \\ 0 & 0 & J_z \lambda^2 + 3\nu_0^2 (J_x - J_y) \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим

$$\left\{ J_x J_y \lambda^4 + \nu_0^2 [4J_y (J_z - J_y) + J_x (J_z - J_x) + (J_x + J_y - J_z)^2] \lambda^2 + \right. \\ \left. + 4\nu_0^4 (J_z - J_y) (J_z - J_x) \right\} [J_z \lambda^2 + 3\nu_0^2 (J_x - J_y)] = 0. \quad (6.5.6)$$

Характеристическое уравнение (6.5.6) распадается на два:

$$J_x J_y \lambda^4 + \nu_0^2 [4J_y (J_z - J_y) + J_x (J_z - J_x) + (J_x + J_y - J_z)^2] \lambda^2 + \\ + 4\nu_0^4 (J_z - J_y) (J_z - J_x) = 0; \quad (6.5.7)$$

$$J_z \lambda^2 + 3\nu_0^2 (J_x - J_y) = 0. \quad (6.5.8)$$

Полагая $\lambda^2 = p$ в уравнении (6.5.7) и определяя p , можно найти λ из соотношения $\lambda = \pm \sqrt{p}$.

При решении возможны следующие частные случаи:

1. Корни p – действительные положительные числа ($p > 0$). При этом среди корней λ характеристического уравнения будет положительный корень, и, значит, движение будет неустойчивым.

2. Нулевой корень $p = 0$. Этому значению p соответствуют нулевые корни характеристического уравнения. Устойчивость возможна, если нулевому корню кратности l соответствует l групп решений дифференциальных уравнений.

3. Корни p – действительные отрицательные числа ($p < 0$). Им соот-

ветствуют чисто мнимые корни характеристического уравнения. Устойчивость возможна.

4. Корни p – комплексные числа: $p = \alpha \pm i\beta = |p| e^{i \arg p}$. При этом

$$\lambda = \pm \sqrt{p} = \pm \sqrt{|p|} e^{\frac{i \arg p}{2}} = \sqrt{|p|} \left(\cos \frac{\arg p}{2} + i \sin \frac{\arg p}{2} \right),$$

где $\arg p = \varphi + 2k\pi$; $\frac{\arg p}{2} = \frac{\varphi}{2} + k\pi (k = 0, 1, 2, \dots)$. Найдем, каким комплексным корням p будут соответствовать корни λ характеристического уравнения, дающие устойчивые решения системы (6.5.5). На рис. 6.16 на комплексной плоскости показаны корни λ_1 и λ_2 , соответствующие числу p . Как видим, при любом значении p , кроме случая, когда аргумент числа p $\varphi = \pi$, один из двух корней λ_1 и λ_2 имеет положительную вещественную часть. Поэтому при всех p , аргумент которых $\varphi \neq \pi$, решение системы (6.5.5) неустойчиво.

Следовательно, математическим условием устойчивости является наличие трех пар чисто мнимых корней λ характеристического уравнения.

Определим необходимые и достаточные условия устойчивости решения системы дифференциальных уравнений (6.5.5). Необходимым условием, при котором корнями λ характеристического уравнения будут мнимые числа, является положительность коэффициентов системы (6.5.7) и (6.5.8). Это выполняется, если в свободном члене уравнения (6.5.7)

$$J_z > J_y; \quad J_z > J_x \quad (6.5.9)$$

или

$$J_x > J_z; \quad J_y > J_z, \quad (6.5.10)$$

а в свободном члене уравнения (6.5.8)

$$J_x > J_y. \quad (6.5.11)$$

Объединяя соотношения (6.5.9)...(6.5.11), получаем два условия

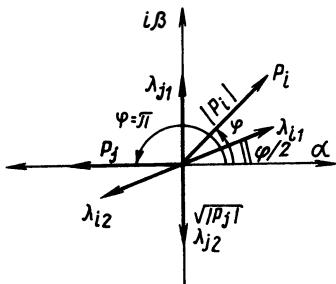


Рис. 6.16.

$$J_z > J_x > J_y; \quad (6.5.12)$$

$$J_x > J_y > J_z, \quad (6.5.13)$$

причем в неравенстве (6.5.13) моменты инерции J_x , J_y , J_z должны быть выбраны в определенном соотношении, при котором обеспечивается положительность коэффициента во втором слагаемом уравнения (6.5.7) при

условии (6.5.10). Для определения этого соотношения проанализируем раздельно случаи (6.5.12) и (6.5.13).

Предварительно преобразуем характеристическое уравнение (6.5.7). Обозначим

$$A = \frac{J_z - J_y}{J_x} ; \quad B = \frac{J_z - J_x}{J_y} . \quad (6.5.14)$$

Тогда $J_x J_y \lambda^4 + \nu_0^2 [4J_y (J_z - J_y) + J_x (J_z - J_x) + (J_x + J_y - J_z)^2] \lambda^2 +$

$$\begin{aligned} & + 4\nu_0^4 (J_z - J_x) (J_z - J_y) = \lambda^4 + \nu_0^2 \left[\frac{4(J_z - J_y)}{J_x} + \frac{(J_z - J_x)}{J_y} + \right. \\ & + \frac{J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 + 2J_x J_y - 2J_x J_z - 2J_y J_z}{J_x J_y} \left. \right] \lambda^2 + \\ & + 4\nu_0^4 \frac{(J_z - J_x)(J_z - J_y)}{J_x J_y} = \lambda^4 + \nu_0^2 [4A + B + \frac{J_x}{J_y} - 2 \frac{J_z}{J_y} + \frac{J_y}{J_x} - \\ & - 2 \frac{J_z}{J_x} + \frac{J_z^2}{J_x J_y} + 2] \lambda^2 + 4\nu_0^4 AB = \lambda^4 + \nu_0^2 [4A + B - B - A + 1 + \\ & + \frac{J_x J_y + J_z^2 - J_x J_z - J_y J_z}{J_x J_y}] \lambda^2 + 4\nu_0^4 AB = \lambda^4 + \nu_0^2 [4A + B - B - \\ & - A + 1 + AB] \lambda^2 + 4\nu_0^4 AB = 0 . \end{aligned}$$

или

$$\lambda^4 + \nu_0^2 [1 + 3A + AB] \lambda^2 + 4\nu_0^4 AB = 0 . \quad (6.5.15)$$

Рассмотрим случай (6.5.12). Определим область реальных значений параметров A и B в уравнении (6.5.15), при которых исследуемое движение будет устойчивым. Прежде всего отметим, что условие (6.5.12) соответствует положительным значениям A и B :

$$A > 0, \quad B > 0 . \quad (6.5.16)$$

Соотношения (6.5.14) представим как

$$A = \frac{J_z - J_y}{J_x} = \frac{1 - \bar{J}_y}{\bar{J}_x} ; \quad B = \frac{J_z - J_x}{J_y} = \frac{1 - \bar{J}_x}{\bar{J}_y} , \quad (6.5.17)$$

где $\bar{J}_x = J_x/J_z$, $\bar{J}_y = J_y/J_z$.

- Обозначим $k = \bar{J}_y/\bar{J}_x$ и запишем формулы (6.5.17) иначе:

$$A = \frac{1 - k\bar{J}_x}{\bar{J}_x}; \quad B = \frac{1 - \bar{J}_x}{k\bar{J}_x}.$$

Исключая относительный момент инерции \bar{J}_x , получаем выражение

$$A = 1 + k(B - 1). \quad (6.5.18)$$

Здесь $A > 0, B > 0$ и в силу условия (6.5.12) $0 < k < 1$.

На рис. 6.17 показана область реальных значений A и B , построенная в плоскости этих параметров при условии (6.5.12). Заштрихованная область ограничена прямыми линиями, которые получены из уравнения (6.5.18) при подстановке предельно возможных значений $k = 0$ и $k = 1$.

Проверим, выполняется ли в случае (6.5.12) достаточное условие устойчивости. Чтобы биквадратное уравнение (6.5.7) имело две пары чисто мнимых корней, соответствующее квадратное уравнение

$$p^2 + \nu_0^2(1 + 3A + AB)p + 4\nu_0^4AB = 0$$

должно иметь только отрицательные действительные корни. Это возможно, если дискриминант уравнения больше нуля:

$$\frac{1}{4}\nu_0^4(1 + 3A + AB)^2 - 4\nu_0^4AB > 0.$$

или

$$(1 + 3A + AB)^2 - 16AB > 0. \quad (6.5.19)$$

Данное неравенство должно выполняться при изменении параметров A и B в пределах заштрихованной области (см. рис. 6.17). С помощью соотношения (6.5.18) исключим параметр A из неравенства (6.5.19):

$$\begin{aligned} (1 + 3A + AB)^2 - 16AB &= [4 + B + k(B - 1)(B + 3)]^2 - 16B - \\ &- 16kB(B - 1) = (B - 1)^2(B + 3)^2k^2 + [2(4 + B)(B - 1)(B + 3) - \\ &- 16B(B - 1)]k + (4 + B)^2 - 16B = \\ &= (B - 1)^2(B + 3)^2k^2 + 2(B^2 - B + 12)(B - 1)k + (B - 4)^2. \end{aligned}$$

Итак, неравенство (6.5.19) приобретает вид

$$\begin{aligned} \varphi(B, k) &= (B - 1)^2(B + 3)^2k^2 + 2(B^2 - B + 12)(B - 1)k + \\ &+ (B - 4)^2 > 0. \end{aligned} \quad (6.5.20)$$

При $B > 1$ функция $\varphi(B, k)$ больше нуля, и неравенство (6.5.20) выполняется. Исследуем случай $0 < B < 1$. Определим значения функции $\varphi(B, k)$ при предельно возможных значениях $k = 0$ и $k = 1$:

$$\varphi(B, 0) = (B - 4)^2 > 0;$$

$$\begin{aligned}\varphi(B, 1) &= (B - 1)^2 (B + 3)^2 + 2(B^2 - B + 12)(B - 1) + (B - 4)^2 = \\ &= B^4 + 6B(B^2 - \frac{5}{6}B + 1) + 1 > 0.\end{aligned}$$

Итак, при $0 < B < 1$ $\varphi(B, 0) > 0$ и $\varphi(B, 1) > 0$.

Покажем, что при $0 < k < 1$ $\varphi(B, k)$ – монотонная функция. Определим производную

$$\frac{\partial \varphi}{\partial k} = 2(B - 1)^2 (B + 3)^2 k + 2(B^2 - B + 12)(B - 1)$$

и исследуем, меняет ли она знак в диапазоне $0 < k < 1$. Нетрудно показать, что при $B < 1$

$$\frac{\partial \varphi(B, 0)}{\partial k} = 2(B^2 - B + 12)(B - 1) < 0;$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi(B, 1)}{\partial k} &= 2(B - 1)^2 (B + 3)^2 + 2(B^2 - B + 12)(B - 1) = \\ &= 2(B - 1)[B^3 + 6B^2 + 2B + 3] < 0.\end{aligned}$$

Таким образом, в области $0 < B, k < 1$ производная $\partial \varphi(B, k) / \partial k$ не меняет знака. Значит, функция $\varphi(B, k)$ в этой области монотонная. Так как при $k = 0$ и $k = 1$ $\varphi(B, k) > 0$ при всех $0 < B < 1$, то она положительна на всем промежутке $0 < k < 1$, и неравенство (6.5.20) в этой области выполняется.

Из вышеизложенного следует, что соотношение $J_z > J_x > J_y$ является не только необходимым, но и достаточным условием устойчивости. Физи-

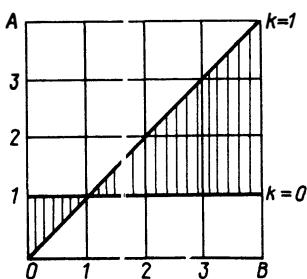


Рис. 6.17.

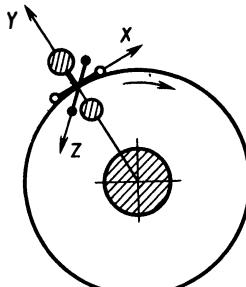


Рис. 6.18.

чески это означает, что под действием гравитационного момента возникшие в результате какого-нибудь возмущения малые углы $\Delta\vartheta$, $\Delta\psi$ и $\Delta\gamma$ между осями связанной и опорной систем координат будут изменяться по гармоническому закону.

Под действием гравитационного момента КА будет стремиться сориентироваться так, чтобы ось его наименьшего момента инерции совпала с направлением к центру притяжения (с гравитационной вертикалью), ось наибольшего момента инерции — с бинормалью к траектории, а ось промежуточного момента инерции — с трансверсалю траектории (рис. 6.18).

Рассмотрим второй вариант соотношений моментов инерции ракеты $J_x > J_y > J_z$. Построим, как и раньше, область реальных значений A и B , при которых выполняется необходимое условие устойчивости (6.5.13). Из формул (6.5.14) следует, что в данном случае $A < 0$ и $B < 0$. Обозначая

$$J_y/J_x = k; \quad J_z/J_y = \mu \quad (0 < k < 1, \quad 0 < \mu < 1),$$

выражения (6.5.14) приводим к виду

$$\begin{aligned} A &= \frac{J_z - J_y}{J_x} = \frac{J_z}{J_x} - k = \frac{J_z}{J_y} \frac{J_y}{J_x} - k = \mu k - k = k(\mu - 1); \\ B &= \frac{J_z - J_x}{J_y} = \frac{J_z}{J_y} - \frac{J_x}{J_y} = \mu - \frac{1}{k}. \end{aligned} \quad (6.5.21)$$

Если исключим отсюда μ , получим уже известное выражение $A = 1 + k(B - 1)$, которое в области отрицательных значений A и B ограничивает зону допустимых значений A и B (на рис. 6.19 она заштрихована вертикально).

Исключая из (6.5.21) k , получаем

$$B = \mu + \frac{1 - \mu}{A}. \quad (6.5.22)$$

При одном из предельно возможных значений $\mu = 0$ из (6.5.22) имеем $B = 1/A$, что сужает зону реальных величин A и B при условии (6.5.13).

Рассмотрим теперь достаточное условие устойчивости для случая (6.5.13). Как уже отмечалось, для устойчивости движения нужно, чтобы корни уравнения

$$p^2 + \nu_0^2(1 + 3A + AB)p + 4\nu_0^4AB = 0,$$

полученного из характеристического уравнения, были отрицательными. Это возможно, если выполняются неравенства

$$1 + 3A + AB > 0; \quad (6.5.23)$$

$$(1 + 3A + AB)^2 - 16AB > 0. \quad (6.5.24)$$

Учитывая, что $A < 0$, условие (6.5.23) приведем к виду

$$B < -3 - \frac{1}{A}.$$

На рис. 6.19 построена кривая $B = -3 - \frac{1}{A}$, которая еще более уменьшила область реальных значений A и B .

Преобразуем условие (6.5.24) :

$$(B + 3)^2 A^2 - (14B - 6)A + 1 > 0. \quad (6.5.25)$$

Левую часть неравенства разложим на множители, так что

$$(B + 3)^2 A^2 - (14B - 6)A + 1 = (A - A_1)(A - A_2),$$

$$\text{где } A_{1,2} = \frac{(14B - 6) \pm \sqrt{(14B - 6)^2 - 4(B + 3)^2}}{2(B + 3)^2} = \\ = \frac{7B - 3 \pm 4\sqrt{3B(B - 1)}}{(B + 3)^2}. \quad (6.5.26)$$

Учитывая это, вместо (6.5.25) можем записать неравенство

$$(A - A_1)(A - A_2) > 0,$$

которое выполняется в двух случаях:

$$\text{если } A > A_1 \text{ и } A > A_2 \quad (6.5.27)$$

$$\text{или } A < A_1 \text{ и } A < A_2. \quad (6.5.28)$$

В плоскости параметров A и B построим кривые $A_1(B)$ и $A_2(B)$ в соответствии с (6.5.26). Как видно из рис. 6.19, второе условие (6.5.28) не соответствует пределам области допустимых значений A и B , полученных ранее. Условие (6.5.27) удовлетворяется на части этой области, ограниченной осью абсцисс $A = 0$, прямой $A = B$ и кривой $A_1(B)$.

Таким образом, в случае $J_x > J_y > J_z$ необходимое и достаточное условие устойчивости выполняется в очень малой зоне в плоскости параметров A, B (плотно за трихованная зона). Только в узком диапазоне значений A и B при строго определенном соотношении моментов инерции в случае $J_x > J_y > J_z$ КА может находиться на границе колебательной неустойчивости, двигаясь по орбите, как показано на рис. 6.20. При этом гравитационный момент стремится ориентировать ось наименьшего момента инерции

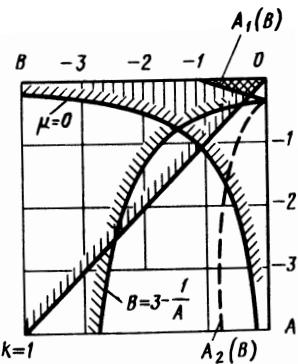


Рис. 6.19.

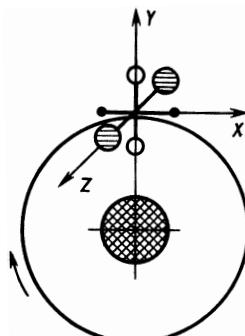


Рис. 6.20.

аппарата по бинормали к траектории, ось наибольшего момента инерции — по трансверсали к траектории, ось промежуточного момента инерции — по гравитационной вертикали.

Гравитационная стабилизация аппарата реализуется главным образом такой его компоновкой, при которой соблюдаются соотношения (6.5.12), и относительные разности моментов инерции A и B выбраны из областей устойчивости, показанных на рис. 6.17. Условие (6.5.13) играет вспомогательную роль и используется в тех случаях, когда по программе полета реальные режимы гравитационной стабилизации чередуются с поворотами ракеты с помощью активной системы управления. При этом компоновка аппарата в первом режиме способствует нужной ориентации по гравитационной вертикали, а во втором режиме управляющий момент, создаваемый реактивной струей, истекающей из газореактивных сопл, которые необходимы для разворота объекта, легко преодолевает инерционность и гравитационный момент.

Возмущенное движение гравитационно стабилизированного КА представляет собой незатухающие колебания:

$$\Delta\gamma = C_{11} \sin \omega_\gamma t + D_{11} \cos \omega_\gamma t + C_{21} \sin \omega_\psi t + D_{21} \cos \omega_\psi t;$$

$$\Delta\psi = C_{12} \sin \omega_\psi t + D_{12} \cos \omega_\psi t + C_{22} \sin \omega_\gamma t + D_{22} \cos \omega_\gamma t;$$

$$\Delta\vartheta = C_{13} \sin \omega_\vartheta t + D_{13} \cos \omega_\vartheta t,$$

частоты которых по каналам крена и рыскания

$$\omega_{\gamma\psi} = \left| \nu_0 \sqrt{0,5 [(1 + 3A + AB) \mp \sqrt{(1 + 3A + AB)^2 - 16AB}] } \right|,$$

по каналу тангенса

$$\omega_\vartheta = \left| \nu_0 \sqrt{\frac{3(J_x - J_y)}{J_z}} \right|. \quad (6.5.29)$$

Амплитуды взаимосвязанных колебаний по каналам крена и рыскания характеризуют точность гравитационной стабилизации и зависят от начальных значений возмущений углов и угловых скоростей $\Delta\gamma_0$, $\Delta\psi_0$, $d\Delta\gamma_0/dt$, $d\Delta\psi_0/dt$. Их значения обратно пропорциональны модулю разности квадратов частот $|\omega_\psi^2 - \omega_\gamma^2|$. Ошибки стабилизации по углам $\Delta\gamma$ и $\Delta\psi$ можно уменьшить разнесением частот ω_γ и ω_ψ , если положить $B \gg 1$.

Если соотношения между моментами инерции аппарата таковы, что $A = B = 1$, колебания по каналам крена и рыскания становятся независимыми.

При определенных начальных значениях возмущений углов и угловых скоростей может оказаться, что гравитационный момент недостаточен, чтобы реализовались колебания КА относительно указанных выше положений равновесия.

Допустимые начальные значения возмущений углов и угловых скоростей, при которых гравитационный момент обеспечивает колебания аппарата относительно базовой системы координат, составляют так называемые условия "захвата".

В качестве примера рассмотрим частный случай возмущенного движения КА под действием гравитационного момента по каналу тангенса, предполагая, что движения по другим каналам не существует: $\Delta\gamma(t) = \Delta\psi(t) = 0$. Обозначим начальные значения параметров движения $\Delta\vartheta(0) = \Delta\vartheta_0$, $d\Delta\vartheta(0)/dt = d\Delta\vartheta_0/dt$ и определим условия "захвата".

Используя полученную ранее формулу (6.4.11) для гравитационного момента, запишем уравнение вращения аппарата вокруг оси OZ :

$$J_z \frac{d^2 \Delta\vartheta}{dt^2} = -\frac{3}{2} \nu_0^2 (J_x - J_y) \sin 2\Delta\vartheta,$$

или

$$\frac{d^2 \Delta\vartheta}{dt^2} + \frac{\omega_0^2}{2} \sin 2\Delta\vartheta = 0. \quad (6.5.30)$$

Найдем первый интеграл уравнения (6.5.30) с заданными начальными условиями. Введем подстановку $d\Delta\vartheta/dt = p$. Продифференцируем левую и правую части по времени, получим $\frac{d^2 \Delta\vartheta}{dt^2} = \frac{dp}{d\Delta\vartheta} \frac{d\Delta\vartheta}{dt} = \frac{pd़}{d\Delta\vartheta}$.

Подставив данное соотношение в (6.5.30), получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$pd़ + \frac{\omega_0^2}{2} d\Delta\vartheta \sin 2\Delta\vartheta = 0,$$

интегрируя которое, найдем

$$p^2 - \frac{\omega_0^2}{2} \cos 2\Delta\vartheta = C.$$

Возвращаясь к исходным переменным, запишем

$$\frac{2}{\omega_\vartheta^2} \left(\frac{d\Delta\vartheta}{dt} \right)^2 = \cos 2\Delta\vartheta + C. \quad (6.5.31)$$

Постоянную интегрирования C в (6.5.31) удобно записать через начальные значения параметров движения $\Delta\vartheta_0$ и $d\Delta\vartheta_0/dt$ в виде

$$C = \frac{2}{\omega_\vartheta^2} \left(\frac{d\Delta\vartheta_0}{dt} \right)^2 - \cos 2\Delta\vartheta_0. \quad (6.5.32)$$

Анализируя формулу (6.5.31), нетрудно установить, что слагаемое $\cos 2\Delta\vartheta$ в правой части является знакопеременной величиной, по модулю не превосходящей единицу. Сопоставляя это слагаемое со значением константы C , можно определить соотношения, при которых угловая скорость аппарата $d\Delta\vartheta/dt$ становится равной нулю.

Если $C \geq 1$, правая часть равенства (6.5.31) положительная величина. Физически это означает, что при $t > 0$, несмотря на действие гравитационного момента, происходит вращение КА в ту же сторону, что при $t = 0$.

Если $C < 1$, возможны случаи, когда $d\Delta\vartheta/dt = 0$. Это значит, что гравитационный момент достаточен для прекращения вращения аппарата.

Таким образом, неравенство

$$\frac{2}{\omega_\vartheta^2} \left(\frac{d\Delta\vartheta_0}{dt} \right)^2 - \cos 2\Delta\vartheta_0 < 1, \quad (6.5.33)$$

или $\frac{1}{\omega_\vartheta^2} \left(\frac{d\Delta\vartheta_0}{dt} \right)^2 < \frac{1}{2} (1 + \cos 2\Delta\vartheta_0)$

является условием "захвата" КА гравитационным моментом. Как видно, частота колебаний аппарата по тангажу ω_ϑ является важной характеристикой эффективности гравитационной стабилизации. Ее увеличение приводит к расширению области допустимых значений начальных угловых скоростей $d\Delta\vartheta_0/dt$ при фиксированных $\Delta\vartheta_0$.

Движение КА вокруг центра масс под действием аэродинамических сил или давления света

При движении КА на высотах не более 500 км вблизи планет с атмосферой преобладают аэродинамические силы, которые могут быть использованы для пассивной стабилизации (движение КА с выключенным двигателем и активной системой управления в плотных слоях атмосферы рассматривается как движение на активных участках). Момент аэродинамических сил, определяющий характер вращательного движения аппарата, стремится совместить линию, проходящую через центр масс и центр давления КА, с направлением его скорости относительно атмосферы так, чтобы центр масс оказался впереди центра давления.

При аэродинамической стабилизации в качестве базовой выступает скоростьная система координат, которая из-за двух факторов – вращения атмосферы и эксцентриситета орбиты – отличается от базовой системы координат, применяемой в случае гравитационной стабилизации. Действительно, аэродинамическая сила из-за вращения атмосферы вместе с Землей не лежит в плоскости орбиты. Вектор скорости аппарата относительно атмосферы будет повернут по отношению к вектору линейной орбитальной скорости на некоторый угол $\Delta\chi$. Определим максимальное значение $\Delta\chi$. Предположим, что КА движется по круговой полярной орбите высотой 300 км. Подсчитаем скорость вращения воздушных масс на этой высоте, предполагая, что атмосфера вращается вместе с Землей:

$$V_{\text{атм}} = \Omega_3 r = 485 \text{ м/с},$$

где Ω_3 – угловая скорость вращения Земли вокруг своей оси ($\Omega_3 = 2\pi/86400 \text{ с}^{-1}$); r – радиус орбиты ($r = 6670 \text{ км}$).

Скорость движения КА по круговой орбите высотой 300 км

$$V_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{k^2 M}{r}} = 7800 \text{ м/с},$$

где k – гравитационная постоянная Гаусса; M – масса Земли. Тогда

$$\Delta\chi = \frac{V_{\text{атм}}}{V_{\text{кр}}} = \frac{485}{7800} \approx 3^\circ 30'.$$

Таким образом, вектор скорости аппарата отклонен от плоскости орбиты в самом неблагоприятном случае на угол $\Delta\chi = 3^\circ 30'$.

Оценим влияние эллиптичности орбиты на угол $\Delta\vartheta$ между вектором скорости аппарата и осью Ox_0 базовой системы координат, используемой при гравитационной стабилизации. Для орбит с эксцентриситетом e соотношение между $\Delta\vartheta$ и истинной аномалией θ имеет вид

$$\cos\Delta\vartheta = \frac{1 + e \cos\theta}{\sqrt{1 + 2e \cos\theta + e^2}}. \quad (6.5.34)$$

Определим величину истинной аномалии θ_m , при которой отклонение $\Delta\vartheta$ максимально. Для этого найдем производную $d(\cos\Delta\vartheta)/d\theta$ и приравняем ее нулю:

$$\frac{d(\cos\Delta\vartheta)}{d\theta} = \frac{-e \sin\theta_m (1 + 2e \cos\theta_m + e^2 - 1 - e \cos\theta_m)}{(1 + 2e \cos\theta_m + e^2)^{3/2}} = 0,$$

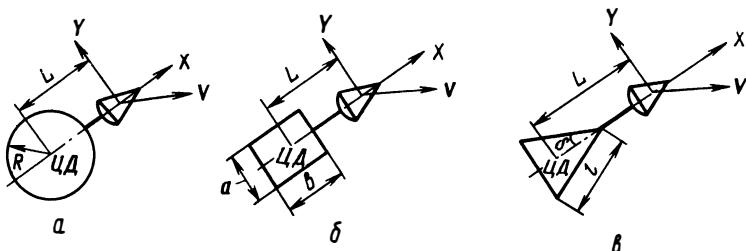


Рис. 6.21.

или

$$1 + e^2 + 2e \cos \theta_m - 1 - e \cos \theta_m = 0.$$

Откуда $\cos \theta_m = -e$. Используя (6.5.34), получаем

$$(\cos \Delta \vartheta)_m = \sqrt{1 - e^2}. \quad (6.5.35)$$

Для орбиты с эксцентриситетом $e = 0,1$ максимальное отклонение, определяемое формулой (6.5.35), будет $\Delta \vartheta_m \cong 5^\circ 40'$.

Таким образом, ось Ox_0 базовой системы координат в случае аэродинамической стабилизации отклонена от соответствующей оси системы координат, используемой при гравитационной стабилизации, на угол $\Delta \vartheta$, зависящий от эксцентриситета орбиты. При малых эксцентриситетах орбиты ($e < 0,1$) базовые системы координат для этих видов стабилизации отличаются на малую величину; при больших эксцентриситетах совместить аэродинамическую и гравитационную стабилизации трудно.

Исследуем характер движения КА относительно базовой системы координат, ось Ox_0 которой совпадает с вектором скорости аппарата. Рассмотрим аэродинамическую стабилизацию спутника при помощи шарового или плоского стабилизатора (рис. 6.21, а, б) в плоскости тангажа.

Будем считать, что масса стабилизатора пренебрежимо мала по сравнению с массой КА. Действительно, при использовании достаточно легкого материала масса стабилизатора будет составлять около 5 % массы аппарата. Кроме того, будем предполагать, что аэродинамическое давление на КА значительно меньше давления на стабилизатор. Аэродинамическим и гравитационным моментами, действующими на аппарат, будем пренебрегать по сравнению с аэродинамическим моментом стабилизатора. Считая для простоты, что атмосфера неподвижна, запишем уравнение вращательного движения аппарата вокруг оси OZ :

$$J_z \frac{d^2 \Delta \vartheta}{dt^2} = M_z.$$

В случае шарового стабилизатора

$$M_z = -c_{x_0 a} s_{ct} q x_F \sin \Delta\alpha ,$$

в случае плоского стабилизатора

$$M_z = -c_{x_0 a} s_{ct} q x_F |\sin \Delta\alpha| \sin \Delta\alpha ,$$

где S_{ct} – площадь диаметрального сечения сферического стабилизатора или площадь плоского стабилизатора; $x_F = L$ – расстояние между центром масс и центром давления аппарата.

Тогда уравнения углового движения КА со сферическим и плоским стабилизаторами имеют вид

$$\frac{d^2 \Delta\vartheta}{dt^2} + \frac{c_{x_0 a} S_{ct} q L}{J_z} \sin \Delta\alpha = 0 ; \quad (6.5.36)$$

$$\frac{d^2 \Delta\vartheta}{dt^2} + \frac{c_{x_0 a} S_{ct} q L |\sin \Delta\alpha|}{J_z} \sin \Delta\alpha = 0 .$$

Определим соотношение между углами $\Delta\vartheta$ и $\Delta\alpha$ при движении спутника по орбите, близкой к круговой. Пользуясь схемой, приведенной на рис. 6.22, получаем

$$\Delta\vartheta = \vartheta^* + \Delta\alpha ,$$

и, продифференцировав это соотношение по времени,

$$\frac{d \Delta\vartheta}{dt} = \frac{d \vartheta^*}{dt} + \frac{d \Delta\alpha}{dt} ,$$

где $d\vartheta^*/dt = v$ – скорость поворота радиуса-вектора, соединяющего центр притяжения с центром масс КА, так что

$$\frac{d \Delta\vartheta}{dt} = v + \frac{d \Delta\alpha}{dt} .$$

При малых эксцентриситетах орбиты $v \cong v_0 = \text{const}$. Поэтому $d^2 \Delta\vartheta/dt^2 = d^2 \Delta\alpha/dt^2$ и уравнения (6.5.35) принимают вид

$$\frac{d^2 \Delta\alpha}{dt^2} + \frac{c_{x_0 a} S_{ct} q L}{J_z} \sin \Delta\alpha = 0 ; \quad (6.5.37)$$

$$\frac{d^2 \Delta\alpha}{dt^2} + \frac{c_{x_0 a} S_{ct} q L |\sin \Delta\alpha|}{J_z} \sin \Delta\alpha = 0 . \quad (6.5.38)$$

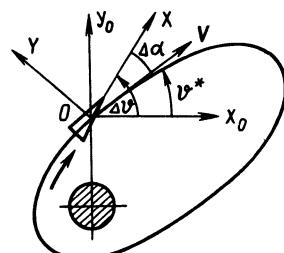


Рис. 6.22.

Для малых углов атаки $\Delta\alpha$ оба уравнения могут быть представлены в виде уравнения гармонических колебаний

$$\frac{d^2 \Delta\alpha}{dt^2} + \omega^2 \Delta\alpha = 0, \quad (6.5.39)$$

где $\omega = \sqrt{\frac{c_{x0a} S_{ct} q L}{J_z}}$ — для шарового стабилизатора;

$\omega = \sqrt{\frac{c_{x0a} S_{ct} q L |\sin \Delta\alpha|}{J_z}}$ — для плоского стабилизатора.

При полете аппарата с шаровым стабилизатором площадью $S_{ct} = 100 \text{ м}^2$ на высотах 200...300 км период колебаний исчисляется несколькими десятками минут. Поэтому аэродинамическая стабилизация не может использоваться в оперативных целях.

КА, который снабжен стабилизатором, расположенным позади центра масс (статически устойчивый аппарат), будучи выведенным из положения равновесия, когда продольная ось аппарата OX совпадает с вектором его скорости, совершает под действием аэродинамического момента гармонические колебания относительно этого равновесного состояния.

Если заданы начальные значения возмущений $\Delta\alpha_0$ и $d\Delta\alpha_0/dt$, нетрудно записать решение уравнения (6.5.39) :

$$\Delta\alpha = D \sin(\omega t + \psi).$$

Здесь амплитуда колебаний $D = \sqrt{\Delta\alpha_0^2 + \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{d\Delta\alpha_0}{dt} \right)^2}$, фаза колебаний $\psi = \arctg \left(\frac{\frac{d\Delta\alpha_0}{dt}}{\Delta\alpha_0 \omega} \right)$.

Как видно, точность стабилизации улучшается с уменьшением $\Delta\alpha_0$ и $d\Delta\alpha_0/dt$.

Так как при одинаковых площадях S_{ct} в установившемся режиме лобовое сопротивление шарового стабилизатора больше, чем плоского, последний менее эффективен. Однако плоский стабилизатор меньше замедляет движение аппарата, поэтому он иногда используется на малых высотах.

Определим условия "захвата" при аэродинамической стабилизации. Сначала проинтегрируем уравнение движения КА со сферическим стабилизатором, считая известными начальные значения $\Delta\alpha_0$ и $d\Delta\alpha_0/dt$. Обозначив $d\Delta\alpha/dt = p$, найдем $d^2 \Delta\alpha/dt^2 = pdp/d\Delta\alpha$. Вместо (6.5.37) получим уравнение с разделяющимися переменными

$$pdः + \omega^2 d\Delta\alpha \sin \Delta\alpha = 0.$$

Первый интеграл данного уравнения имеет вид

$$p^2 - 2\omega^2 \cos \Delta\alpha = C,$$

или

$$\frac{1}{2\omega^2} \left(\frac{d\Delta\alpha}{dt} \right)^2 = \cos \Delta\alpha + C. \quad (6.5.40)$$

Постоянную интегрирования выразим через начальные значения параметров $\Delta\alpha_0$ и $d\Delta\alpha_0/dt$:

$$C = \frac{1}{2\omega^2} \left(\frac{d\Delta\alpha_0}{dt} \right)^2 - \cos \Delta\alpha_0.$$

Проводя рассуждения, аналогичные ранее изложенным, получим искомое условие "захвата":

$$\frac{1}{2\omega^2} \left(\frac{d\Delta\alpha_0}{dt} \right)^2 - \cos \Delta\alpha_0 < 1,$$

или

$$\frac{1}{\omega} \frac{d\Delta\alpha_0}{dt} < \sqrt{2(1 + \cos \Delta\alpha_0)}. \quad (6.5.41)$$

Условие аэродинамического "захвата" ракеты с плоским стабилизатором нетрудно получить из интеграла уравнения (6.5.38), который имеет вид

$$\frac{1}{\omega^2} \left(\frac{d\Delta\alpha}{dt} \right)^2 = -|\Delta\alpha| + \frac{1}{2} \sin 2|\Delta\alpha| + C, \quad (6.5.42)$$

$$\text{где константа } C = \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{d\Delta\alpha_0}{dt} \right)^2 + |\Delta\alpha_0| - \frac{1}{2} \sin 2|\Delta\alpha_0|.$$

Условия (6.5.40), (6.5.42) выполняются при $0 < |\Delta\alpha| < \pi$. Практический интерес представляет случаи, когда угловое отклонение $\Delta\alpha < \pi/2$.

Полагая в (6.5.40) и (6.5.42) $\Delta\alpha = \pi/2$, $d\Delta\alpha/dt = 0$, получим условия практического "захвата" при аэродинамической стабилизации для аппарата со сферическим стабилизатором

$$\frac{1}{\omega} \frac{d\Delta\alpha_0}{dt} \leq \sqrt{2 \cos \Delta\alpha_0} \quad (6.5.43)$$

и плоским стабилизатором

$$\frac{1}{\omega} \frac{d\Delta\alpha_0}{dt} \leq \sqrt{\frac{\pi}{2} - |\Delta\alpha_0| - \frac{1}{2} \sin 2|\Delta\alpha_0|}. \quad (6.5.44)$$

Момент, создаваемый давлением света, может стать преобладающим при высотах полета над поверхностью Земли более 1000 км.

Принцип стабилизации КА давлением света тот же, что и при аэродинамической стабилизации. Аппарат снабжается стабилизатором – солнечным парусом различной формы, расположенным позади центра масс (см. рис. 6.21). В качестве базовой системы координат используется система, одна из осей которой совпадает с направлением солнечных лучей, падающих на аппарат.

Уравнение вращательного движения при стабилизации давлением света аналогично уравнению (6.5.39), где под $\Delta\alpha$ подразумевается угол, образованный продольной осью аппарата и направлением солнечных лучей.

Частоту гармонических колебаний космического аппарата определяют по формулам

$$\omega = \sqrt{\frac{\pi R^2 p_c L}{J_z}} \quad - \text{для сферического стабилизатора;}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{p_c l^2 L \sin 2\delta}{2 J_z}} \quad - \text{для конического паруса-стабилизатора (см. рис. 6.21, в);}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{p_c a b L}{J_z}} \quad - \text{для плоского паруса (см. рис. 6.21, б).}$$

При одинаковых площадях конический и плоский стабилизаторы дают один и тот же период колебаний (порядка нескольких часов).

В заключение отметим, что при аэродинамической, гравитационной стабилизации или стабилизации посредством давления света имеет место колебательное движение КА без демпфирования. Поэтому необходимо с помощью специальных устройств, расположенных на борту аппарата, обеспечить искусственное демпфирование его угловых движений. Считается, что наиболее успешно эта задача может быть решена применением системы автоматического управления, реагирующей на угловую скорость КА. Демпфирование колебаний при пассивной стабилизации может обеспечить активная система, создающая, например, с помощью реактивных сопел управляемый момент.

Другая характерная особенность пассивной стабилизации – малость собственной частоты угловых движений ω . Для обеспечения необходимой точности стабилизации углового положения и повышения быстродействия в систему управления требуется ввести сигналы по углу отклонения и угловой скорости.

§ 6.6. СТАБИЛИЗАЦИЯ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ КА, СНАБЖЕННОГО СИСТЕМОЙ УПРАВЛЕНИЯ

Большинство космических аппаратов снабжено системами ориентации и стабилизации, с помощью которых обеспечивается управляемость и устой-

чивость полета на пассивных участках траектории. Активные методы стабилизации углового движения аппарата позволяют создавать управляющие моменты в любое время полета независимо от наличия внешних силовых факторов. Активная стабилизация предполагает расходование энергии, запасенной на борту аппарата. С целью экономии массы рабочего тела в системах ориентации и стабилизации, как правило, используются нелинейные законы управления.

Стабилизация вращательного движения КА с помощью УМРД

Среди активных систем стабилизации и управления движением КА наибольшее распространение в настоящее время получили системы, основанные на использовании в качестве исполнительных органов УМРД.

Системы управления с реактивными соплами могут строиться по линейному и нелинейному законам. Линейные законы управления менее экономичны с точки зрения расходования рабочего тела по сравнению с нелинейными законами.

Определим оптимальное управление УМРД с точки зрения минимума расхода рабочего тела. Рассмотрим случай углового движения КА в плоскости тангажа. Запишем уравнения движения (6.3.8) в безразмерной форме:

$$x'_1(t) = x_2(t), \quad x'_2(t) = u(t); \quad |u(t)| \leq 1, \quad (6.6.1)$$

где $x_1(t)$, $x_2(t)$ – функции, эквивалентные угловому отклонению и угловой скорости аппарата; $u(t)$ – управление, эквивалентное моменту микрореактивных двигателей. Штрихами обозначены производные параметров по времени.

Будем предполагать, что расход рабочего тела q линейно зависит от управления u :

$$q = q_0 |u(t)|$$

Необходимо обеспечить ориентацию ракеты за время T так, чтобы интеграл $F = \int_0^T q_0 |u(t)| dt$ имел минимальное значение.

Таким образом, мы пришли к задаче отыскания функции $u(t)$, входящей в подынтегральное выражение, при которой интеграл F имеет минимальное значение. Методы решения таких задач подробно рассматриваются в курсах оптимального управления [4] и вариационного исчисления [8]. Мы будем решать эту задачу, придерживаясь схемы, изложенной в книге Я.Н. Ройтенберга [24].

Пусть управляемая система описывается дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (6.6.2)$$

Управление $u(t)$ надо выбрать так, чтобы интеграл

$$F = \int_0^T f_0(x(t), u(t)) dt$$

принимал наименьшее возможное значение.

Обозначим через $x_0(t)$ функцию, определяемую дифференциальным уравнением

$$\frac{dx_0}{dt} = f_0(x_1, \dots, x_n, u) \quad (6.6.3)$$

и начальным условием $x_0(0) = 0$.

Уравнения (6.6.2) и (6.6.3) можно представить в виде одной системы

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(x, u) \quad (j = 0, 1, \dots, n). \quad (6.6.4)$$

Для решения задачи вводится дополнительная система относительно вспомогательных переменных p_0, p_1, \dots, p_n :

$$\frac{dp_k}{dt} = - \sum_{j=0}^k \frac{\partial f_j(x(t), u(t))}{\partial x_k} p_j \quad (k = 0, 1, \dots, n). \quad (6.6.5)$$

Уравнения (6.6.5) составляют систему однородных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, имеющую единственное решение $p_k(t)$, где $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Введем функцию Гамильтона

$$H(p, x, u) = \sum_{j=0}^n p_j f_j(x, u),$$

используя которую будем иметь

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = f_j(x, u); \quad \frac{\partial H}{\partial x_k} = \sum_{j=0}^n p_j \frac{\partial f_j(x, u)}{\partial x_k}.$$

При этом уравнения (6.6.4) и (6.6.5) можно заменить каноническими уравнениями первого порядка [12]

$$\frac{\partial x_j}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad (j = 0, 1, \dots, n);$$

$$\frac{\partial p_j}{\partial t} = - \frac{\partial H}{\partial x_j} \quad (j = 0, 1, \dots, n)$$

относительно функций x_j и $p_j = \partial f / \partial x_j'$.

В нашем случае при $j = 0$ имеем $f_0(x, u) = q_0 |u(t)|$, причем $u(t)$ удовлетворяет уравнениям (6.6.1), т.е. зависит от $x_i(t)$ ($i = 1, 2$).

Функция Гамильтона имеет вид

$$H(x_1, x_2, p_1, p_2, t) = \sum_{i=1}^2 p_i x_i' - q_0 |u(t)|. \quad (6.6.6)$$

В соответствии с теоремой Понтрягина [24] определим, каково должно быть управление $u(t)$, чтобы гамильтониан (6.6.6) имел максимум.

Анализ удобно сопровождать графическим изображением $H = H(u)$. Поделив обе части равенства (6.6.6) на коэффициент q_0 , принимаемый за условный масштаб, запишем функцию Гамильтона:

$$H^* = p_1^* x_2 + p_2^* u - |u|. \quad (6.6.6^*)$$

На рис. 6.23 приведена зависимость $H^* = H^*(u)$.

Параметром, регулирующим изменение функции $H^*(u)$, является коэффициент p_2^* . Во всех случаях, когда $|p_2^*| < 1$, максимум $H^*(u)$ достигается при $u = 0$. Если $|p_2^*| \geq 1$, максимум функции $H^*(u)$ смещается на границы $u = \pm 1$. Таким образом, оптимальное по расходу рабочего тела управление ориентацией КА можно определить условиями

$$u = \begin{cases} 0, & \text{если } |p_2^*| < 1; \\ +1, & \text{если } p_2^* \geq 1; \\ -1, & \text{если } p_2^* \leq -1, \end{cases} \quad (6.6.7)$$

т.е. управление имеет релейный характер с зоной отключения управляющего момента.

В конечном счете нам нужно определить зависимость $u(t)$. Для этого найдем переменные p_1^* и p_2^* :

$$p_1^{*\prime} = - \frac{\partial H^*}{\partial x_1} = O;$$

$$p_2^{*\prime} = - \frac{\partial H^*}{\partial x_2} = -p_1^*.$$

После интегрирования имеем

$$p_1^* = p_{10}^*; \quad p_2^* = p_{10}^* t + p_{20}^*,$$

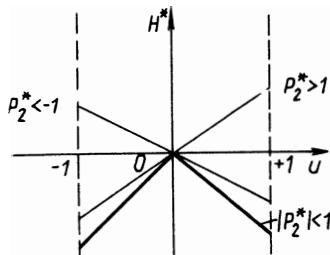


Рис. 6.23.

где p_{10}^* и p_{20}^* – начальные значения переменных p_1^*, p_2^* . Как видим, зависимости $p_1^*(t)$ и $p_2^*(t)$ линейные. Это значит, что граничному значению параметра p_2^* соответствуют единственно возможные значения t_1^* и t_2^* , при которых происходит изменение управления $u(t)$ согласно условиям (6.6.7). График зависимости сигнала u от времени t для оптимального по расходу рабочего тела релейного управления приведен на рис. 6.24, а.

Исследуем угловое движение КА по каналу тангажа с системой управления, в которой используются УМРД и чувствительные элементы с релейной характеристикой (рис. 6.25). Предположим, что сопла УМРД работают без запаздывания, а закон управления имеет вид

$$u(\Delta\vartheta, \frac{d\Delta\vartheta}{dt}) = \begin{cases} -1 & \text{при } \Delta\vartheta > \vartheta_H, \quad \frac{d\Delta\vartheta}{dt} > -\dot{\vartheta}_H; \\ 0 & \text{при } |\Delta\vartheta| < |\vartheta_H|, \quad \left|\frac{d\Delta\vartheta}{dt}\right| < |\dot{\vartheta}_H|; \\ +1 & \text{при } \Delta\vartheta < -\vartheta_H, \quad \frac{d\Delta\vartheta}{dt} < \dot{\vartheta}_H \end{cases} \quad (6.6.8)$$

где ϑ_i и $\dot{\vartheta}_H$ – зоны нечувствительности датчиков углов и угловых скоростей.

Условимся, что $u(\Delta\vartheta, d\Delta\vartheta/dt) = -1$ соответствует торможению, а $u(\Delta\vartheta, d\Delta\vartheta/dt) = 1$ – разгону КА. Проведем исследования, используя метод построения фазового портрета системы в плоскости параметров движения $\Delta\vartheta$ и $d\Delta\vartheta/dt$.

Уравнение возмущенного движения КА в плоскости тангажа имеет вид

$$J_z \frac{d^2 \Delta\vartheta}{dt^2} = M_{y_{\text{упр}z}} u(\Delta\vartheta, \frac{d\Delta\vartheta}{dt}) - M_{Bz}, \quad (6.6.9)$$

или

$$\frac{d^2 \Delta\vartheta}{dt^2} = w_{y_{\text{упр}z}} u - w_{Bz}, \quad (6.6.10)$$

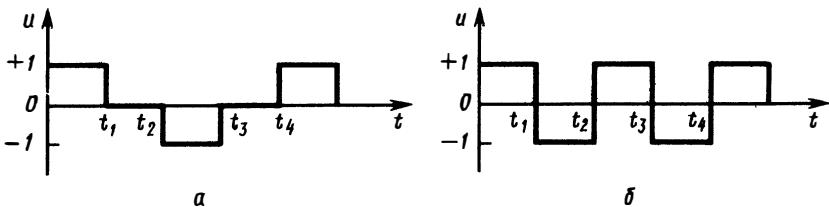


Рис. 6.24.

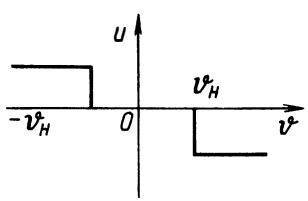


Рис. 6.25.

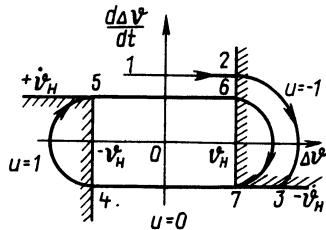


Рис. 6.26.

где $w_{\text{упр}z} = M_{\text{упр}z}/J_z$, $w_{\text{в}z} = M_{\text{в}z}/J_z$ – угловые ускорения КА под действием управляющего и возмущающего моментов.

Построим фазовую траекторию КА для случая $w_{\text{в}z} = M_{\text{в}z} = 0$ (рис. 6.26). Пусть известны начальные отклонения фазовых параметров $\Delta\vartheta(0) = -\Delta\vartheta_0$, $d\Delta\vartheta(0)/dt = d\Delta\vartheta_0/dt$ (точка 1), которые находятся в зоне нечувствительности измерительных элементов. На плоскости изменения фазовых параметров аппарата ($\Delta\vartheta$, $d\Delta\vartheta/dt$) строятся линии переключения управления, вид которых зависит от статических характеристик чувствительных элементов и параметров исполнительных устройств (напряжений срабатывания электроклапанов, времени запаздывания реле, управляющих микрореактивными двигателями). Линии переключения, обозначенные на рис. 6.26 штриховкой, делят плоскость фазовых параметров на три зоны, соответствующие сигналам управления $u = +1$, $u = 0$, $u = -1$. В начальной точке 1, соответствующей времени $t = 0$, уравнение движения КА имеет вид

$$d^2\Delta\vartheta/dt^2 = 0.$$

После интегрирования получаем уравнение фазовой траектории

$$d\Delta\vartheta/dt = \text{const} = d\Delta\vartheta_0/dt. \quad (6.6.11)$$

Точка, изображающая фазовое положение КА, будет двигаться горизонтально до пересечения с линией переключения $\Delta\vartheta = \vartheta_H$. Физически это означает, что аппарат вращается по инерции с выключенными УМРД. На линии переключения (точка 2) включаются управляющие сопла, создающие ускорение $-w_{\text{упр}z}$. Начиная с точки 2, уравнение движения имеет вид

$$d^2\Delta\vartheta/dt^2 = -w_{\text{упр}z},$$

после интегрирования которого получаем

$$\frac{d\Delta\vartheta}{dt} = -w_{\text{упр}z}t + \frac{d\Delta\vartheta_0}{dt}; \quad (6.6.12)$$

$$\Delta\vartheta = -\frac{1}{2}w_{\text{упр}z}t^2 + \frac{d\Delta\vartheta_0}{dt}t + \vartheta_H,$$

где ϑ_h и $d\Delta\vartheta_0/dt$ – значения фазовых параметров в момент t_1 переключения управления.

Исключая из (6.6.12) время t , запишем уравнение фазовой траектории при работающих УМРД (участок 2 – 3) :

$$\left(\frac{d\Delta\vartheta}{dt} \right)^2 - \left(\frac{d\Delta\vartheta_0}{dt} \right)^2 = -2w_{y_{\text{упр}z}}(\Delta\vartheta - \vartheta_h). \quad (6.6.13)$$

Это уравнение параболы с вершиной на оси $O\Delta\vartheta$, удаленной от начала координат на величину $\vartheta_h + \frac{1}{2w_{y_{\text{упр}z}}} \left(\frac{d\Delta\vartheta}{dt} \right)$. В точке 3 по команде датчика угловых скоростей управляющие сопла отключаются, и аппарат будет вращаться с постоянной угловой скоростью $-\dot{\vartheta}_h$. В точке 4 датчик, измеряющий угловое отклонение аппарата, даст команду включения УМРД для разгона КА. При этом фазовая траектория определится уравнением

$$\left(\frac{d\Delta\vartheta}{dt} \right)^2 - \dot{\vartheta}_h^2 = 2w_{y_{\text{упр}z}}(\Delta\vartheta + \vartheta_h).$$

В дальнейшем наступает автоколебательный режим движения аппарата, характерный для нелинейных законов управления. Установившиеся колебания, наступающие вслед за переходным процессом, более продолжительны; они в основном определяют расход рабочего тела.

Определим период автоколебаний КА в установившемся режиме. Обозначим время полета с работающими УМРД через t_a , а время полета с выключенными УМРД – через t_π . Учитывая, что

$$t_\pi = 2 \frac{2\vartheta_h}{\dot{\vartheta}_h}, \quad t_a = 2 \frac{2\dot{\vartheta}_h}{w_{y_{\text{упр}z}}}, \quad (6.6.14)$$

получаем период автоколебаний

$$T = t_\pi + t_a = 4 \left(\frac{\vartheta_h}{\dot{\vartheta}_h} + \frac{\dot{\vartheta}_h}{w_{y_{\text{упр}z}}} \right). \quad (6.6.15)$$

Рассмотрим движение КА, когда момент внешних сил отличен от нуля. Пусть начальные значения параметров КА (точка 1), как и ранее, находятся в зоне нечувствительности измерительных элементов (рис. 6.27), исполнительные органы работают без запаздывания, $w_{Bz} = \text{const} > 0$. Проинтегрируем уравнение движения КА (6.6.10) на пассивном и активном участках. Для пассивного участка при начальных условиях $(-\Delta\vartheta_0, d\Delta\vartheta_0/dt)$ получим

$$(d\Delta\vartheta/dt)^2 - (d\Delta\vartheta_0/dt)^2 = 2w_{Bz}(\Delta\vartheta + \Delta\vartheta_0).$$

Под действием возмущающего момента M_{BZ} в пассивном полете изображающая точка будет двигаться к точке 2 на линии переключения управления $\Delta\vartheta = \vartheta_H$ по параболе. В точке 2 включаются сопла УМРД, истекающее из них рабочее тело создает управляющее ускорение

$$w_{\text{упр}z} u = -w_{\text{упр}z}.$$

Начиная с точки 2 уравнение движения аппарата будет иметь вид

$$\frac{d^2 \Delta\vartheta}{dt^2} = -w_{\text{упр}z} + w_{Bz}.$$

Считая известными начальные условия ϑ_H и $d\Delta\vartheta_2/dt$, после интегрирования этого уравнения получим

$$\frac{d\Delta\vartheta}{dt} = (w_{Bz} - w_{\text{упр}z}) t + \frac{d\Delta\vartheta_2}{dt};$$

$$\Delta\vartheta = \frac{1}{2} (w_{Bz} - w_{\text{упр}z}) t^2 + \frac{d\Delta\vartheta_2}{dt} t + \vartheta_H.$$

Исключая время t , установим, что изображающая точка движется до точки 3 по параболе

$$\left(\frac{d\Delta\vartheta}{dt} \right)^2 - \left(\frac{d\Delta\vartheta_2}{dt} \right)^2 = 2(w_{Bz} - w_{\text{упр}z})(\Delta\vartheta - \vartheta_H).$$

Координата вершины параболы $\Delta\vartheta_C$ определяется выражением

$$\Delta\vartheta_C = \vartheta_H + \frac{1}{2(w_{Bz} - w_{\text{упр}z})} \left(\frac{d\Delta\vartheta_2}{dt} \right)^2.$$

В точке 3 управляющие сопла выключаются, и изображающая точка будет двигаться к точке 4 по некоторой периодической (вследствие действия возмущающего момента) кривой, условно замененной на рис. 6.27 отрезком 3–4. Начиная с точки 4 уравнением фазовой траектории будет уравнение параболы

$$\left(\frac{d\Delta\vartheta}{dt} \right)^2 - \dot{\vartheta}_H^2 = 2w_{Bz}(\Delta\vartheta - \vartheta_H).$$

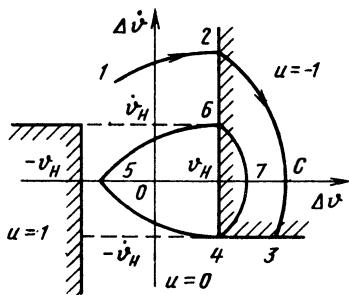


Рис. 6.27.

Начиная с точки пересечения фазовой траектории с линией переключения управления (точка 6) уравнение движения аппарата примет вид $d^2\Delta\vartheta/dt^2 = -w_{\text{упр}z} + w_{\text{в}z}$.

Интегрируя это уравнение с известными (в точке 6) начальными условиями $\dot{\vartheta}_h$, ϑ_h и исключая время t , запишем уравнение фазовой траектории на участке 6 – 7 – 4:

$$\left(\frac{d\Delta\vartheta}{dt} \right)^2 - \dot{\vartheta}_h^2 = 2(w_{\text{в}z} - w_{\text{упр}z})(\Delta\vartheta - \vartheta_h).$$

Таким образом, возникает несимметричный автоколебательный цикл, смещенный к одной из вертикальных линий переключения управления. Вершины 5 и 7 парабол, образующих предельный цикл, удалены от начала координат (от точки O) на разные расстояния:

$$\Delta\vartheta_5 = \vartheta_h - \frac{\dot{\vartheta}_h^2}{2w_{\text{в}z}}, \quad \Delta\vartheta_7 = \vartheta_h + \frac{\dot{\vartheta}_h^2}{2(w_{\text{упр}z} - w_{\text{в}z})}.$$

Период автоколебаний при действии возмущающего момента определяется формулой

$$T = t_p + t_a = 2 \left(\frac{\dot{\vartheta}_h}{w_{\text{в}z}} + \frac{\dot{\vartheta}_h}{w_{\text{упр}z} - w_{\text{в}z}} \right), \quad (6.6.16)$$

Обычно выбирают $w_{\text{упр}z} \gg w_{\text{в}z}$. Поэтому

$$T \approx \frac{2\dot{\vartheta}_h}{w_{\text{в}z}}. \quad (6.6.17)$$

По виду фазового портрета системы можно судить об устойчивости или неустойчивости углового движения КА вокруг центра масс. Если по завершению переходных процессов (участки 1 – 2 – 3 на рис. 6.26; 6.27) устанавливаются автоколебания, при которых максимальные значения скорости аппарата в предельном цикле ($d\Delta\vartheta/dt$) _{max} меньше, чем начальные значения $d\Delta\vartheta_0/dt$, угловое движение считается устойчивым. Таким образом, условием стабилизируемости вращательного движения КА является неравенство

$$\left| \left(\frac{d\Delta\vartheta}{dt} \right)_{\text{max}} \right| < \left| \frac{d\Delta\vartheta_0}{dt} \right|.$$

Установим расход энергии при активной стабилизации. Введем осредненный за период автоколебаний секундный расход рабочего тела

$$\dot{m}_{cp} = \frac{t_a}{T} \dot{m},$$

где \dot{m} – секундный расход массы в УМРД.

Полный расход рабочего тела m за время t полета в автоколебательном режиме определим как

$$m \approx \dot{m}_{cp} t.$$

Используя формулы (6.6.14) и учитывая, что в выражении (6.6.15) $t_p > t_a$ (к этому стремятся), можно приближенно записать

$$\dot{m}_{cp} = \frac{\dot{\vartheta}_H^2 \dot{m}}{w_{uprz} \dot{\vartheta}_H} = \frac{\dot{\vartheta}_H^2 J_z \dot{m}}{\dot{\vartheta}_H PL}. \quad (6.6.18)$$

Из формулы (6.6.18) следует, что средний секундный расход рабочего тела зависит от размеров зон нечувствительности датчиков угловой скорости и угла. Чем точнее требуется сориентировать КА, тем меньше должна быть зона нечувствительности датчика угла $\dot{\vartheta}_H$, но это приводит к увеличению расхода рабочего тела.

В тех случаях, когда на аппарате постоянно действует возмущающий момент $M_{Bz} = \text{const}$, расход массы в УМРД несколько меняется. Используя соотношения (6.6.16) и (6.6.17), запишем приближенное выражение для среднего секундного расхода рабочего тела

$$\dot{m}_{cp} = \frac{w_{Bz} \dot{m}}{w_{uprz}}. \quad (6.6.19)$$

Если в формулы (6.6.18), (6.6.19) ввести безразмерный коэффициент $(1 - k)$, учитывающий скважность импульсов ($0 < k < 1$), то получим выражение для секундного расхода массы в УМРД, работающих в импульсном режиме.

Зная фазовую характеристику системы, можно определить колебания КА как функции некоторого безразмерного времени. Амплитуда этих колебаний характеризует ошибку стабилизации по углу тангажа.

Для чувствительных элементов, работающих в релейном режиме (см. рис. 6.25), ошибка стабилизации составляет

$$\Delta\vartheta = \dot{\vartheta}_H + \frac{\dot{\vartheta}_H^2}{2 w_{uprz}}. \quad (6.6.20)$$

Таким образом, точность стабилизации зависит от размеров зон нечувствительности датчиков углов $\dot{\vartheta}_H$, угловых скоростей $\dot{\vartheta}_H$, а также величин w_{uprz} . Повышение точности равносильно уменьшению ошибок $\Delta\vartheta$, но при

в этом увеличивается энергопотребление. Следует заметить, что с точки зрения уменьшения расхода рабочего тела рационально увеличивать период автоколебаний и уменьшать время включения сопл за один цикл.

При практическом воплощении систем стабилизации за счет гистерезиса реле и запаздывания происходит смещение границ включения и выключения реактивных сопл. При этом КА совершает расходящиеся колебания. Для обеспечения устойчивого движения приходится отказываться от оптимальных (по быстродействию или расходу) законов управления и вводить законы управления по углу и угловой скорости отклонения аппарата.

При проектировании системы ориентации и стабилизации вращательного движения КА с заданными геометрическими и инерционными характеристиками возникает необходимость выбрать эффективность управляющих средств w_{upz} и размеры зон нечувствительности датчиков углов ϑ_h и угловых скоростей $\dot{\vartheta}_h$, обеспечивающих заданную точность угловой стабилизации $\Delta\tilde{\vartheta}$. При этом обычно переходные процессы не рассматриваются, параметры системы определяются в режиме автоколебаний. С точки зрения минимума расходования рабочего тела предпочтительными являются так называемые односторонние циклы автоколебаний, которые устанавливаются около одной из линий переключения управления (см. рис. 6.27). Такие циклы автоколебаний должны удовлетворять условиям точности и экономичности. Так как уравнения траекторий фазовых параметров движения аппарата на пассивном и активном участках известны:

$$\begin{aligned} \Delta\vartheta = \Delta\vartheta_5 + \frac{1}{2w_{BZ}} \left(\frac{d\Delta\vartheta}{dt} \right)^2; \quad \Delta\vartheta = \Delta\vartheta_7 - \frac{1}{2(w_{upz} - w_{BZ})} \times \\ \times \left(\frac{d\Delta\vartheta}{dt} \right)^2 \end{aligned} \quad (6.6.21)$$

и по условиям односторонности цикла и точности угловой стабилизации должны по крайней мере удовлетворяться равенства

$$\Delta\vartheta_7 = \Delta\tilde{\vartheta}, \quad \Delta\vartheta_5 = -\Delta\tilde{\vartheta}, \quad (6.6.22)$$

можно определить соотношения между искомыми параметрами

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta}_h^2 &= \frac{4\Delta\tilde{\vartheta}w_{BZ}(w_{upz} - w_{BZ})}{w_{upz} + w_{BZ}}, \\ \vartheta_h &= \frac{\Delta\tilde{\vartheta}(w_{upz} - w_{BZ})}{w_{upz} + w_{BZ}}. \end{aligned} \quad (6.6.23)$$

Найдем границы областей изменения выбираемых характеристик:

$$w_{upz}^{\min} \leq w_{upz} \leq w_{upz}^{\max}; \quad \vartheta_h^{\min} \leq \vartheta_h \leq \vartheta_h^{\max}; \quad \dot{\vartheta}_h^{\min} \leq \dot{\vartheta}_h \leq \dot{\vartheta}_h^{\max}.$$

Подсчитаем максимальное значение управляющего ускорения $w_{\text{упр}z}$ (или P_{\max}), полагая, что существует минимально возможное время срабатывания электроклапанов, управляющих микрореактивными двигателями, t_{\min} .

Время движения аппарата с включенными и выключенными соплами

$$t_a = \sqrt{\frac{8(\Delta\vartheta_7 - \vartheta_H)}{w_{\text{упр}z} - w_{BZ}}} ; \quad t_n = \sqrt{\frac{8(\vartheta_H - \Delta\vartheta_5)}{w_{BZ}}} .$$

Полагая $t_a = t_{\min}$, $\Delta\vartheta_7 = \Delta\tilde{\vartheta}$ и используя формулу (6.6.23), получим выражение

$$w_{\text{упр}z} = \sqrt{\frac{16 \Delta\tilde{\vartheta} w_{BZ}}{t_{\min}^2} + w_{BZ}^2} .$$

Минимальное значение управляющего ускорения определим из условия $w_{\text{упр}z} > w_{BZ}$.

Найдем границы областей изменения параметров системы управления ϑ_H и $\dot{\vartheta}_H$.

Нетрудно установить, что при $w_{\text{упр}z} = \infty$ устанавливается предельно мыслимый цикл автоколебаний, характеризующийся предельными значениями $\vartheta_{\text{нпред}} = \Delta\tilde{\vartheta}$, $\dot{\vartheta}_{\text{нпред}} = 2\sqrt{w_{BZ}\Delta\tilde{\vartheta}}$.

Так как система должна стабилизировать аппарат с некоторым запасом по угловым отклонениям, положим $\Delta\vartheta_7 = 0,9\Delta\tilde{\vartheta}$ и по формулам (6.6.23) найдем максимальные размеры зон нечувствительности датчиков углов и угловых скоростей:

$$\vartheta_H = \frac{0,9\Delta\tilde{\vartheta}(w_{\text{упр}z} - w_{BZ})}{w_{\text{упр}z} + w_{BZ}} ; \quad \dot{\vartheta}_H = \sqrt{\frac{3,6\Delta\tilde{\vartheta}w_{BZ}(w_{\text{упр}z} - w_{BZ})}{w_{\text{упр}z} + w_{BZ}}} .$$

Минимальные значения ϑ_H , $\dot{\vartheta}_H$ обусловлены чувствительностью датчиков. Для определенности можно положить $\vartheta_H = 0,001\dot{\vartheta}_H$, $\dot{\vartheta}_H = 0,001\dot{\vartheta}_H$. Чтобы выявить влияние искомых параметров на экономичность системы, подсчитаем массу рабочего тела, необходимого при одностороннем цикле автоколебаний для стабилизации аппарата в течении заданного времени t :

$$m = \frac{tt_a}{t_a + t_n} \cdot \frac{P}{P_{\text{уд}g}} = \left(1 + \sqrt{\frac{\Delta\vartheta_5 - \vartheta_H}{\Delta\vartheta_7 - \vartheta_H}} \left(1 - \frac{w_{\text{упр}z}}{w_{BZ}}\right)\right)^{-1} \frac{tJ_z w_{\text{упр}z}}{LP_{\text{уд}g}} .$$

Учитывая формулы (6.6.21), получим

$$m = \frac{t J_z w_{\text{упр}z}}{L P_{\text{уд}g}} \left(1 - \frac{\dot{\vartheta}_H}{w_{BZ}} \sqrt{\frac{w_{\text{упр}z} - w_{BZ}}{2(0,9 \Delta \tilde{\vartheta} - \vartheta_H)}} \right)^{-1}. \quad (6.6.24)$$

С ростом управляющего ускорения $w_{\text{упр}z}$ (или тяги P) экономичность цикла автоколебаний повышается. Однако при этом растет средний секундный расход рабочего тела, а также масса конструкций двигателей и арматуры. Поэтому рекомендуется выбирать

$$5w_{BZ} >> w_{\text{упр}z} \geq 1,5w_{BZ}.$$

Стабилизация вращательного движения КА с помощью инерционных маховиков

Простота конструктивных решений и достаточно высокая точность управления объясняют широкое применение в настоящее время инерционных маховиков для стабилизации и управления КА.

Принцип действия систем, использующих врачающиеся массы в качестве исполнительных органов, основан на известном законе теоретической механики, согласно которому кинетический момент системы при отсутствии внешних возмущений сохраняется постоянным.

Системы с инерционным маховиком имеют ограничения по управляющему и максимальному кинетическому моментам, связанные с наличием предельной угловой скорости маховика. Эти системы нуждаются в компенсации кинетического момента маховика, когда его угловая скорость в случае действия большого возмущающего момента или при длительном действии малых постоянных возмущений достигает максимально возможного значения.

Известно несколько режимов работы систем с инерционными маховиками: стабилизация углового положения КА, его программные развороты,брос кинетического момента маховика, стабилизация угловой скорости аппарата и др.

Стабилизация углового движения аппарата осуществляется замкнутой системой автоматического регулирования, состоящей из объекта регулирования – КА – и системы управления, в функции которой входит измерение параметров движения, сравнение их с программными значениями, выработкой управляющих сигналов и т.д.

Системы управления угловым движением с инерционными маховиками могут основываться на линейном или нелинейном законе управления в зависимости от характеристик чувствительных элементов и приводов. Если чувствительные элементы (датчики углов и угловых скоростей) обладают линейными характеристиками, а привод маховика позволяет осуществить закон управления

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{k_g}{J_M} \Delta \vartheta, \quad (6.6.25)$$

где k_ϑ – передаточный коэффициент; Ω – угловая скорость маховика, то имеет место линейное уравнение.

Когда датчики углов и угловых скоростей имеют релейные характеристики с зонами нечувствительности, а двигатель маховика может создавать при разгоне и торможении только постоянный момент M_d , возникает необходимость выбрать режимы вращения инерционного маховика, оптимальные либо по быстродействию, либо по расходу энергии.

Рассмотрим одноосное управление в случае движения КА в плоскости тангажа, предполагая, что по каналам рыскания и крена система работает идеально и перекрестные связи отсутствуют. Запишем уравнение движения КА

$$J_z \frac{d^2 \Delta \vartheta}{dt^2} = M_{Bz} - M_d \quad (6.6.26)$$

и маховика

$$J_M \left(\frac{d\Omega}{dt} - \frac{d^2 \Delta \vartheta}{dt^2} \right) = M_d, \quad (6.6.27)$$

где J_z – момент инерции КА с маховиком относительно оси OZ ; J_M – момент инерции маховика; M_d – момент, создаваемый двигателем раскрутки маховика; M_{Bz} – возмущающий момент.

Складывая уравнения (6.6.26) и (6.6.27), получаем

$$(J_z - J_M) \frac{d^2 \Delta \vartheta}{dt^2} + J_M \frac{d\Omega}{dt} = M_{Bz},$$

или

$$J_{za} \frac{d^2 \Delta \vartheta}{dt^2} + J_M \frac{d\Omega}{dt} = M_{Bz}, \quad (6.6.28)$$

где $J_{za} = J_z - J_M$ – момент инерции КА при отсутствии маховика.

Если возмущающий момент не действует ($M_{Bz} = 0$), то, используя выражение (6.4.20), можно записать

$$J_{za} \frac{d^2 \Delta \vartheta}{dt^2} = -J_M \frac{d\Omega}{dt}; \quad (6.6.29)$$

$$J_M \frac{d\Omega}{dt} = k_u \bar{U} - k_\Omega \Omega. \quad (6.6.30)$$

Систему уравнений (6.6.29), (6.6.30) приведем к безразмерному виду. Для этого введем новые параметры:

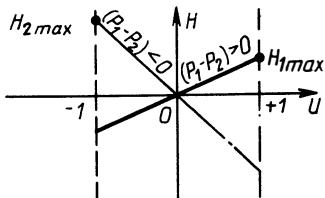


Рис. 6.28.

$$u = \frac{k_u}{k_\Omega} \bar{U}; \quad \tau = \frac{k_\Omega}{J_M} t.$$

Уравнение (6.6.30) примет вид

$$\frac{d\Omega}{d\tau} = u - \Omega.$$

Обозначая $\Omega = x_2(\tau)$, записываем

$$x'_2(\tau) = u(\tau) - x_2(\tau).$$

Проинтегрировав уравнение (6.6.29) при нулевых начальных условиях и обозначив $x_1(\tau) = k_\Omega J_{za} \Delta\vartheta / J_M^2$, получим

$$x'_1(\tau) = x_2(\tau).$$

Таким образом, преобразованную к безразмерному виду систему уравнений (6.6.29) и (6.6.30) можно записать следующим образом:

$$x'_1(\tau) = x_2(\tau); \quad (6.6.31)$$

$$x'_2(\tau) = u(\tau) - x_2(\tau), \quad (6.6.32)$$

где штрихи означают производные по времени τ ; $u(\tau)$ – искомая функция управления ($0 \leq u \leq 1$).

Для удобства анализа преобразуем систему уравнений (6.6.31) и (6.6.32) следующим образом.

Обозначим $y_1(\tau) = x_1(\tau) + x_2(\tau)$; $y'_1(\tau) = x'_1(\tau) + x'_2(\tau)$. Сложив уравнения (6.6.31) и (6.6.32), получим

$$y'_1(\tau) = u(\tau). \quad (6.6.33)$$

Введя замену $y_2(\tau) = -x_2(\tau)$, запишем уравнение (6.6.32) относительно новой неизвестной:

$$-y'_2(\tau) = u(\tau) + y_2(\tau),$$

или

$$y'_2(\tau) = -u(\tau) - y_2(\tau). \quad (6.6.34)$$

Определим закон изменения управления $u(\tau)$, при котором обеспечивается оптимальное быстродействие системы. В этом случае минимизируемая функция записывается как

$$F = \int_0^T d\tau. \quad (6.6.35)$$

Гамильтониан системы уравнений (6.6.33) и (6.6.34) с учетом соотношения (6.6.35) имеет вид

$$H = p_1 u - p_2 (u + y_2) - 1.$$

График зависимости $H = H(u)$ (рис. 6.28) показывает, что в диапазоне изменения $-1 \leq u \leq +1$ функция $H(u) = (p_1 - p_2)u$ достигает максимального значения в двух точках: если $p_1 > p_2$, при $u = +1$; если $p_1 < p_2$, при $u = -1$, т.е. оптимальное по быстродействию управление носит релейный характер (см. рис. 6.24, б) с одним переключением в зависимости от знака функции

$$u = \operatorname{sgn} [p_1 - p_2].$$

Нетрудно показать, что оптимальный по расходу энергии закон управления предполагает наличие трех режимов: $u(\tau) = +1$ (при разгоне маховика); $u(\tau) = -1$ (при торможении маховика); $u(\tau) = 0$ (при малых отклонениях КА, соответствующих зонам нечувствительности датчиков).

Таким образом, в общем случае при использовании инерционных маховиков в системе управления с нелинейными характеристиками чувствительных элементов оптимальным законом управления является существенно нелинейная функция $u(\Delta\vartheta, d\Delta\vartheta/dt)$, которая задается в виде

$$u(\Delta\vartheta, \frac{d\Delta\vartheta}{dt}) = \begin{cases} -1 & \text{при } \Delta\vartheta > \dot{\vartheta}_h, \frac{d\Delta\vartheta}{dt} > -\dot{\vartheta}_h; \\ 0 & \text{при } |\Delta\vartheta| < |\dot{\vartheta}_h|, \left| \frac{d\Delta\vartheta}{dt} \right| < |\dot{\vartheta}_h|; \\ +1 & \text{при } \Delta\vartheta < -\dot{\vartheta}_h, \frac{d\Delta\vartheta}{dt} < \dot{\vartheta}_h. \end{cases} \quad (6.6.36)$$

Исследуем работоспособность инерционных маховиков в режиме стабилизации углового движения по каналу тангажа, при котором требуется выдержать $d\Delta\vartheta/dt = 0$.

Когда на КА действует возмущающий момент $M_{BZ} = \text{const}$, интегрирование уравнения (6.6.28) при нулевых начальных условиях дает

$$\frac{d\Delta\vartheta}{dt} = \frac{1}{J_{z a}} (M_{BZ} t - J_M \Omega).$$

Если требуется обеспечить движение КА без вращения ($d\Delta\vartheta/dt = 0$), необходимо, чтобы

$$\Omega = \frac{M_{BZ}}{J_M} t.$$

Последнее соотношение показывает, что при действии постоянного возмущающего момента стабилизировать положение КА можно путем непрерывного увеличения (уменьшения) угловой скорости маховика вплоть до режима насыщения, при котором $\Omega = \Omega_h$, где Ω_h – его предельно допустимая скорость вращения (скорость насыщения).

Время насыщения определяется по формуле

$$t_h = \frac{J_M \Omega_h}{M_{Bz}} .$$

Если на КА действует внешний возмущающий момент, изменяющийся по гармоническому закону

$$M_{Bz} = M_{Bz_0} \sin \omega^* t ,$$

то решение уравнения (6.6.28) запишется как

$$\frac{d \Delta \vartheta}{dt} = - \frac{1}{J_{za}} \left[\frac{M_{Bz_0}}{\omega^*} \cos \omega^* t + J_M \Omega \right] .$$

Вращение КА вокруг оси OZ с угловой скоростью $d \Delta \vartheta / dt$ будет отсутствовать, когда

$$\Omega = - \frac{M_{Bz_0}}{\omega^* J_M} \cos \omega^* t ,$$

откуда следует, что режим насыщения при гармоническом возмущении не наступает, если только

$$- \frac{1}{\omega^*} < \frac{J_M \Omega_h}{M_{Bz_0}} .$$

Определим характер движения КА при угловой стабилизации в плоскости тангенса с линейным законом управления (6.6.25). Подставив линейный закон управления в (6.6.28), запишем уравнение движения

$$\frac{d^2 \Delta \vartheta}{dt^2} + \omega^2 \Delta \vartheta = w_{Bz} , \quad (6.6.37)$$

где $\omega = \sqrt{k_\vartheta / J_{za}}$ – собственная частота системы; $w_{Bz} = M_{Bz} / J_{za}$ – угловое ускорение, вызванное возмущающим моментом.

Решение уравнения (6.6.37) при нулевых начальных условиях имеет вид

$$\Delta \vartheta = \frac{w_{Bz}}{\omega^2} (1 - \cos \omega t) , \quad (6.6.38)$$

что указывает на наличие незатухающих колебаний относительно положения

$$\Delta\vartheta_{\text{ст}} = \frac{w_{Bz}}{\omega^2} = \frac{M_{Bz}}{k_\vartheta},$$

называемого статической ошибкой угла стабилизации.

Используя соотношение (6.6.25), нетрудно определить закон изменения скорости маховика, соответствующий решению (6.6.38):

$$\Omega = \frac{M_{Bz}}{J_M} \left(t - \frac{1}{\omega} \sin \omega t \right). \quad (6.6.39)$$

Таким образом, КА с линейным законом управления и инерционный маховик при действии постоянного возмущающего момента будут совершать незатухающие колебания.

Такой характер движения вызывает ошибки стабилизации и энергетически невыгоден. Последний недостаток можно ликвидировать, если переключать двигатель маховика при его торможении в режим генератора.

Чтобы движение аппарата в плоскости тангажа было затухающим, линейный закон управления строится с учетом сигнала, формируемого при помощи датчика угловой скорости, так что вместо (6.6.25) применяется соотношение

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{k_\vartheta \Delta\vartheta}{J_M} + \frac{k_\dot{\vartheta}}{J_M} \frac{d\Delta\vartheta}{dt}.$$

Запишем уравнение движения КА в этом случае в виде

$$J_{za} \frac{d^2 \Delta\vartheta}{dt^2} + k_\dot{\vartheta} \frac{d\Delta\vartheta}{dt} + k_\vartheta \Delta\vartheta = M_{Bz}.$$

Его решением будет функция

$$\Delta\vartheta = \frac{w_{Bz}}{\omega^2} + A e^{-\mu\omega t} \sin(\omega\sqrt{1-\mu^2}t + \psi),$$

где $\mu = k_\dot{\vartheta}/2\omega J_{za}$; A, ψ – коэффициенты, определяемые начальными условиями; первое слагаемое, как и прежде, характеризует статическую ошибку системы.

Исследуем движение при угловой стабилизации КА, снабженного нелинейной системой управления, описываемой соотношениями (6.6.36). Как показывает практика, анализ удобно выполнить методом фазовой плоскости (плоскости параметров движения КА $\Delta\vartheta$ и $d\Delta\vartheta/dt$).

Пусть система управления состоит из чувствительных элементов с релейными характеристиками и зонами нечувствительности, а двигатель

инерционного маховика может создавать момент только трех значений: $+M_{\text{д}}, 0, -M_{\text{д}}$.

Уравнение движения КА в плоскости тангажа с инерционными маховиками, закон управления которыми соответствует (6.6.36), имеет вид

$$J_{z \text{ a}} \frac{d^2 \Delta \vartheta}{dt^2} = M_{\text{д}} u(\Delta \vartheta, \frac{d \Delta \vartheta}{dt}) + M_{\text{в з}},$$

или

$$\frac{d^2 \Delta \vartheta}{dt^2} = w_{\text{д}} u + w_{\text{в з}}, \quad (6.6.40)$$

где $w_{\text{д}} = M_{\text{д}}/J_{z \text{ a}}$; $w_{\text{в з}} = M_{\text{в з}}/J_{z \text{ a}}$.

Рассмотрим поведение системы при отсутствии возмущающего момента ($M_{\text{в з}} = 0$). На фазовой плоскости (см. рис. 6.26) построим линии переключения управления маховиком (отмечены штриховкой). Предположим, что начальное положение КА известно $\Delta \vartheta(0) = -\Delta \vartheta_0$ и $d \Delta \vartheta(0)/dt = d \Delta \vartheta_0/dt$ и эти значения находятся в зоне нечувствительности датчиков (точка 1). Запишем уравнение движения (6.6.40), соответствующее начальному состоянию:

$$\frac{d^2 \Delta \vartheta}{dt^2} = 0.$$

Интегрируя это уравнение, получим уравнение фазовой траектории $d \Delta \vartheta/dt = d \Delta \vartheta_0/dt$, которая является линией, параллельной оси абсцисс до пересечения с линией переключения $\Delta \vartheta = \vartheta_{\text{н}}$ (точка 2). Отрезок 1–2 соответствует движению аппарата по инерции с выключенным приводом маховика. Начиная с точки 2 уравнение движения будет $d^2 \Delta \vartheta/dt^2 = -w_{\text{д}}$. Интегрируя его, получаем уравнение фазовой траектории на участке 2–3 в виде параболы

$$\left(\frac{d \Delta \vartheta}{dt} \right)^2 - \left(\frac{d \Delta \vartheta_0}{dt} \right)^2 = -2w_{\text{д}}(\Delta \vartheta - \vartheta_{\text{н}}), \quad (6.6.41)$$

вершина которой имеет координаты

$$\frac{d \Delta \vartheta}{dt} = 0; \Delta \vartheta = \vartheta_{\text{н}} + \frac{1}{2w_{\text{д}}} \left(\frac{d \Delta \vartheta_0}{dt} \right)^2.$$

В точке 3 режим торможения маховика окончится, и аппарат будет двигаться с постоянной угловой скоростью $-\dot{\vartheta}_{\text{н}}$ вплоть до точки 4, где маховик начинает разгоняться приводом. Изображающая точка фазовой траектории будет двигаться далее по параболе $\left(\frac{d \Delta \vartheta}{dt} \right)^2 - \dot{\vartheta}_{\text{н}}^2 = 2w_{\text{д}}(\Delta \vartheta + \vartheta_{\text{н}})$.

Нетрудно установить, что в итоге наступает режим автоколебаний (контур 4 – 5 – 6 – 7). Период автоколебаний определяется по формуле

$$T = 4 \left(\frac{\dot{\vartheta}_H}{\dot{\vartheta}_H - w_D} + \frac{\dot{\vartheta}_H}{w_{BZ}} \right).$$

Траектория движения изображений точки в фазовой плоскости в случае, когда действует внешний момент $M_{BZ} = \text{const}$, несколько отличается от рассмотренной ранее (см. рис. 6.27). Отличие имеется на пассивных, неуправляемых участках движения (интервалы 1 – 2 и 4 – 5 – 6) и на участках разгона и торможения инерционного маховика (интервалы 2 – 3 и 6 – 7 – 4). Автоколебательный цикл (4 – 5 – 6 – 7), возникающий в этом случае, несимметричен, так как на участке (6 – 7 – 4) на аппарат действует разность моментов ($M_D - M_{BZ}$), а на участке (4 – 5 – 6) – только момент внешних сил.

Период автоколебаний при действии возмущающего момента $M_{BZ} = \text{const}$ определяется по формуле

$$T = 2 \left(\frac{\dot{\vartheta}_H}{w_D - w_{BZ}} + \frac{\dot{\vartheta}_H}{w_{BZ}} \right) = \frac{2w_D \dot{\vartheta}_H}{w_{BZ}(w_D - w_{BZ})}.$$

Определим энергетические затраты при стабилизации КА с помощью инерционных маховиков. Потребная мощность на участках разгона или торможения инерционного маховика подсчитывается по формуле

$$N(t) = M_D(t) \Omega(t),$$

$$\text{где } M_D(t) = J_M \frac{d\Omega}{dt}.$$

В случае линейного закона управления (6.6.25)

$$M_D(t) = k_\vartheta \Delta\vartheta(t).$$

При постоянном возмущающем моменте M_{BZ} в соответствии с (6.6.38) момент двигателя будет

$$M_D(t) = M_{BZ}(1 - \cos\omega t).$$

Используя (6.6.39), определяем потребную мощность

$$N(t) = \frac{M_{BZ}^2}{J_M} \left(t - \frac{1}{\omega} \sin\omega t \right) (1 - \cos\omega t).$$

Энергию, затраченную маховиком для преодоления M_{BZ} за время t , можно подсчитать по формуле

$$E = \int_0^t N(t) dt.$$

В системе стабилизации с нелинейным законом управления момент M_D , создаваемый приводом, постоянен. Интегрируя уравнение вращения КА (6.6.28) при начальных условиях $d\Delta\vartheta_0/dt = -\dot{\vartheta}_H$, получаем

$$\frac{d\Delta\vartheta}{dt} = (w_{BZ} - w_D)t - \dot{\vartheta}_H,$$

$$\text{где } w_{BZ} = \frac{M_{BZ}}{J_{za}}; w_D = \frac{M_D}{J_{za}} = \frac{J_M}{J_{za}} - \frac{d\Omega}{dt}.$$

Используя закон сохранения кинетического момента, определим закон изменения угловой скорости маховика:

$$\Omega(t) = -\frac{J_{za}}{J_M} [(w_{BZ} - w_D)t - \dot{\vartheta}_H].$$

Потребная энергия для раскрутки маховика за период автоколебаний определяется по формуле

$$E = 2 \int_0^{\tilde{t}} N(t) dt = \frac{J_{za}^2 M_D \dot{\vartheta}_H^2}{J_M (M_{BZ} - M_D)},$$

$$\text{где } \tilde{t} = \frac{\dot{\vartheta}_H}{w_D - w_{BZ}}.$$

Полученная зависимость показывает, что расход энергии в нелинейных системах существенно зависит от размеров зон нечувствительности датчика угловой скорости, которые целесообразно уменьшать. В результате численного анализа можно установить, что при одинаковом периоде автоколебаний нелинейные системы энергетически выгоднее линейных систем, использующих инерционные маховики.

Рассмотрим пространственное вращательное движение КА, система управления которого основана на использовании инерционных маховиков. Предположим, что на КА имеются три маховика, установленные вдоль трех главных осей инерции некоторого твердого тела, которое эквивалентно системе, состоящей из корпуса КА и маховиков. Будем считать, что маховики имеют одинаковые моменты инерции J_M .

Если моменты инерции системы (корпус КА и маховики) относительно осей OX, OY, OZ обозначить J_x, J_y и J_z , то моменты инерции фиктивного

твердого тела, полученного из системы в предположении, что маховики отсутствуют, можно определить как

$$J_1 = J_x - J_m; \quad J_2 = J_y - J_m; \quad J_3 = J_z - J_m.$$

Обозначая проекции на оси связанный системы координат абсолютной угловой скорости инерционных маховиков Ω и угловой скорости аппарата ω через $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ и $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ соответственно, записываем

$$\Omega_x = \omega_x + \Omega_{rx}; \quad \Omega_y = \omega_y + \Omega_{ry}; \quad \Omega_z = \omega_z + \Omega_{rz},$$

где $\Omega_{rx}, \Omega_{ry}, \Omega_{rz}$ – проекции относительной угловой скорости инерционных маховиков.

Формально заменяя в левых частях уравнений (1.6.3) моменты инерции относительно главных осей инерции системы моментами инерции J_1, J_2, J_3 фиктивного твердого тела, получаем уравнения углового движения КА:

$$\begin{aligned} J_1 \frac{d\omega_x}{dt} + (J_3 - J_2) \omega_y \omega_z &= \Sigma M_x; \\ J_2 \frac{d\omega_y}{dt} + (J_1 - J_3) \omega_x \omega_z &= \Sigma M_y; \\ J_3 \frac{d\omega_z}{dt} + (J_2 - J_1) \omega_x \omega_y &= \Sigma M_z. \end{aligned} \tag{6.6.42}$$

В правые части уравнений системы (6.6.42) кроме возмущающих и управляющих моментов, проекции которых равны соответственно M_{bx}, M_{by}, M_{bz} и $M_{упр,x} = -J_m \frac{d\Omega_x}{dt}$, $M_{упр,y} = -J_m \frac{d\Omega_y}{dt}$, $M_{упр,z} = -J_m \frac{d\Omega_z}{dt}$, входят гироскопические моменты, приложенные к корпусу КА и определяемые по формуле $M_{ги} = L^* \times \omega$. Так как проекции кинетических моментов маховиков в нашем случае

$$L_x^* = J_m \Omega_x; \quad L_y^* = J_m \Omega_y; \quad L_z^* = J_m \Omega_z,$$

проекции гироскопических моментов определим как

$$M_{гиx} = J_m \Omega_y \omega_z - J_m \Omega_z \omega_y;$$

$$M_{гиy} = J_m \Omega_z \omega_x - J_m \Omega_x \omega_z;$$

$$M_{гиz} = J_m \Omega_x \omega_y - J_m \Omega_y \omega_x.$$

Запишем в развернутом виде уравнения вращательного движения КА

$$\begin{aligned}
 J_1 \frac{d\omega_x}{dt} + (J_3 - J_2) \omega_y \omega_z &= M_{bx} - J_M \frac{d\Omega_x}{dt} + J_M \Omega_y \omega_z - \\
 - J_M \Omega_z \omega_y; \\
 J_2 \frac{d\omega_y}{dt} + (J_1 - J_3) \omega_x \omega_z &= M_{by} - J_M \frac{d\Omega_y}{dt} + J_M \Omega_z \omega_x - \\
 - J_M \Omega_x \omega_z; \\
 J_3 \frac{d\omega_z}{dt} + (J_2 - J_1) \omega_x \omega_y &= M_{bz} - J_M \frac{d\Omega_z}{dt} + J_M \Omega_x \omega_y - \\
 - J_M \Omega_y \omega_x.
 \end{aligned} \tag{6.6.43}$$

Определим законы вращения маховиков в случае, когда с их помощью осуществляется программное движение КА. Будем считать, что в программном движении обеспечивается идеальная ориентация аппарата, при которой оси связанный и базовой систем координат совпадают. Ранее было установлено, что в качестве базовой удобно использовать орбитальную систему координат, проекции угловой скорости которой

$$\omega_{0x_0} = \omega_{0y_0} \approx 0; \quad \omega_{0z_0} \approx -\nu.$$

В случае идеальной ориентации можно записать

$$\omega_x = \omega_y = 0; \quad \omega_z = -\nu. \tag{6.6.44}$$

Если внешние возмущающие моменты отсутствуют ($M_{bx} = M_{by} = M_{bz} = 0$), то для анализа программного движения можно воспользоваться законом сохранения кинетического момента. Проекции кинетического момента системы, состоящей из КА и маховика, имеют вид

$$\begin{aligned}
 L_x &= (J_x - J_M) \omega_x + J_M \Omega_x = J_1 \omega_x + J_M \Omega_{rx}; \\
 L_y &= (J_y - J_M) \omega_y + J_M \Omega_y = J_2 \omega_y + J_M \Omega_{ry}; \\
 L_z &= (J_z - J_M) \omega_z + J_M \Omega_z = J_3 \omega_z + J_M \Omega_{rz}.
 \end{aligned}$$

С учетом равенств (6.6.44) проекции кинетического момента будут

$$L_x = J_M \Omega_{rx}; \quad L_y = J_M \Omega_{ry}; \quad L_z = J_M \Omega_{rz} - J_3 \nu. \quad (6.6.45)$$

Будем рассматривать угловое движение КА в геоцентрической системе координат, ориентация осей которой неизменна. Обозначим через L_{x_0} , L_{y_0} , L_{z_0} проекции кинетического момента на оси неподвижной системы координат в начальный момент времени. В соответствии с законом сохранения кинетического момента их можно выразить через проекции кинетического момента L_x , L_y , L_z в любой другой момент времени. Для этого нужно учесть перемещение связанной системы относительно геоцентрической. Так как при идеальной ориентации связанная система совпадает с орбитальной, достаточно рассмотреть движение последней по отношению к инерциальной геоцентрической системе. Будем полагать, что в программном движении (идеальная ориентация) углы крена, рысканья и тангажа определяются соотношениями $\gamma = \psi = 0$, $\vartheta = \vartheta(t)$. Используя выражения для направляющих косинусов (табл. 1.1), запишем

$$L_{x_0} = L_x \cos \vartheta - L_y \sin \vartheta; \quad L_{y_0} = L_x \sin \vartheta + L_y \cos \vartheta; \quad L_{z_0} = L_z. \quad (6.6.46)$$

Исключая из (6.6.45) и (6.6.46) проекции кинетического момента L_x , L_y , L_z , получим искомые проекции относительной угловой скорости маховика Ω_r , необходимой для обеспечения идеальной ориентации ракеты:

$$\begin{aligned} \Omega_{rx} &= \frac{1}{J_M} \sqrt{L_{x_0}^2 + L_{y_0}^2} \sin(\vartheta + \arctg \frac{L_{x_0}}{L_{y_0}}); \\ \Omega_{ry} &= \frac{1}{J_M} \sqrt{L_{x_0}^2 + L_{y_0}^2} \cos(\vartheta + \arctg \frac{L_{x_0}}{L_{y_0}}); \\ \Omega_{rz} &= \frac{1}{J_M} (L_{z_0} + J_3 \nu). \end{aligned}$$

Таким образом, угловая скорость маховика, управляющего программным движением в плоскости тангажа, является постоянной величиной, если орбита круговая ($\nu = \nu_0 = \text{const}$).

Угловые скорости маховиков, управляющих программным движением по каналу крена и рысканья, меняются периодически при изменении ϑ с периодом 2π (рис. 6.29).

Аналогичный вывод следует из анализа уравнений вращательного прог-

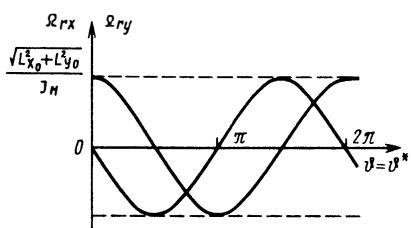


Рис. 6.29.

раммного движения, которые для данного случая можно получить из системы (6.6.43), если учесть соотношения (6.6.44).

$$\text{Если } M_{bx} = M_{by} = M_{bz} = 0, \text{ имеем } -J_M \frac{d\Omega_x}{dt} + J_M \Omega_y \omega_z = 0;$$

$$-J_M \frac{d\Omega_y}{dt} + J_M \Omega_x \omega_z = 0; J_3 \frac{d\omega_z}{dt} = -J_M \frac{d\Omega_z}{dt}.$$

Перекрестные гироскопические моменты, действующие по осям OX и OY и отличные от нуля при $\omega_z = -\nu$, для обеспечения программного движения должны быть уравновешены управляющими моментами, которые возникают при разгоне или торможении маховиков. Но одновременно с этим будут меняться гироскопические моменты, а значит, разгон и торможение инерционных маховиков периодически чередуются. Потери энергии на разгон и торможение маховиков могут быть уменьшены, если угловые скорости маховиков, установленных вдоль осей OX и OY , поддерживать равными нуль в течение всего времени полета. Обычно для этого используют совместную работу систем с инерционными маховиками и УМРД.

Рассмотрим возмущенное угловое движение КА.

Предположим, что система стабилизации обеспечивает идеальную ориентацию КА, при которой $\gamma = \psi = \vartheta = 0$, и включает в себя три маховика с одинаковыми моментами инерции J_M , управляющих вращательным движением по каналам крена, рыскания и тангажа. Начальные угловые скорости маховиков $\Omega_{x_0}, \Omega_{y_0}, \Omega_{z_0}$. Собственные частоты ω системы аппарата – автомат стабилизации и декременты колебаний ξ по каналам крена, рыскания и тангажа одинаковы. Для заданного времени переходного процесса t собственная частота $\omega = 2\pi/\tilde{t}$. Декремент колебаний из условия обеспечения минимальной продолжительности переходного процесса задается $\xi = 0,7$.

Если для управления двигателями раскрутки маховиков используются линейные законы, при которых управляющие сигналы независимы по каждому из трех каналов и пропорциональны углам отклонения КА и его угловым скоростям, линеаризованные уравнения возмущенного движения аппарата в проекциях на оси связанный системы координат имеют вид

$$\frac{d^2 \Delta\gamma}{dt^2} + 2\omega\xi \frac{d\Delta\gamma}{dt} + (\omega^2 + \nu_0^2 \frac{J_z - J_y}{J_x} - \nu_0 \frac{J_M \Omega_z}{J_x}) \Delta\gamma +$$

$$+ (\nu_0 \frac{J_x - J_z}{J_x} + \frac{J_M \Omega_z}{J_x}) \frac{d\Delta\psi}{dt} - \frac{J_M \Omega_y}{J_x} \frac{d\Delta\vartheta}{dt} = \frac{\Delta M_{bx}}{J_x}; \quad (6.6.47)$$

$$\frac{d^2 \Delta\psi}{dt^2} + 2\omega\xi \frac{d\Delta\psi}{dt} + (\omega^2 + \nu_0^2 \frac{J_z - J_x}{J_y} - \nu_0 \frac{J_M \Omega_z}{J_y}) \Delta\psi -$$

$$- (\nu_0 \frac{J_y - J_x}{J_y} + \frac{J_M \Omega_z}{J_y}) \frac{d\Delta\gamma}{dt} + \frac{J_M \Omega_x}{J_y} \frac{d\Delta\vartheta}{dt} = \frac{\Delta M_{by}}{J_y};$$

$$\frac{d^2 \Delta \vartheta}{dt^2} + 2\omega\xi \frac{d\Delta\vartheta}{dt} + \omega^2 \Delta\vartheta + \frac{J_M}{J_z} (\Omega_y \frac{d\Delta\gamma}{dt} + \nu_0 \Omega_x \Delta\gamma - \Omega_x \frac{d\Delta\psi}{dt} + \nu_0 \Omega_y \Delta\psi) = \frac{\Delta M_B z}{J_z}, \quad (6.6.47)$$

где угловые скорости инерционных маховиков

$$\begin{aligned}\Omega_x &= \Omega_{x_0} - \frac{J_x}{J_M} \frac{d\Delta\gamma}{dt}; \quad \Omega_y = \Omega_{y_0} - \frac{J_y}{J_M} \frac{d\Delta\psi}{dt}; \\ \Omega_z &= \Omega_{z_0} - \frac{J_z}{J_M} \frac{d\Delta\vartheta}{dt};\end{aligned}$$

возмущающие моменты от гравитационных сил

$$\Delta M_{Bx} = 3\nu_0^2 (J_y - J_z) \Delta\gamma; \quad \Delta M_{By} = 0; \quad \Delta M_{Bz} = 3\nu_0^2 (J_y - J_x) \Delta\vartheta;$$

от аэродинамических сил

$$\begin{aligned}\Delta M_{Bx} &= 0; \quad \Delta M_{By} = -c_{x0} x_F S \frac{\rho V_C^2}{2} \Delta\psi; \quad \Delta M_{Bz} = \\ &= c_{x0} x_F S \frac{\rho V_C^2}{2} \Delta\vartheta;\end{aligned}$$

вследствие эксцентричности орбиты e

$$\Delta M_{Bx} = \Delta M_{By} = 0; \quad \Delta M_{Bz} = 2eJ_z \nu_0^2 \sin\nu_0 t.$$

Если собственная частота значительно превосходит орбитальную скорость ($\omega \gg \nu_0$), слагаемыми, содержащими ν_0 , можно пренебречь, уравнения возмущенного движения упрощаются, перекрестные связи между каналами крена, рыскания и тангажа становятся более слабыми.

Характеристическое уравнение упрощенной системы имеет вид

$$\lambda^4 + 4\omega\xi\lambda^3 + [2\omega^2(2\xi^2 + 1) + a^*] \lambda^2 + 4\omega^3\xi\lambda + \omega^4 = 0,$$

$$\text{где } a^* = \frac{J_M^2 \Omega_{y_0}^2}{J_x J_z} + \frac{J_M^2 \Omega_{x_0}^2}{J_y J_z} + \frac{J_M^2 \Omega_{z_0}^2}{J_x J_y}.$$

Из условия устойчивости следует неравенство $\omega^2 > \frac{a^*}{2(2\xi^2 + 1)}$, которое вследствие $a^* > 0$ всегда выполняется и не накладывает никаких ограничений.

ний на собственную частоту ω . При малом быстродействии системы ($\omega < \nu_0$) перекрестные связи между каналами управления существенны. Для уменьшения их влияния КА снабжаются системами разгрузки маховиков, которые обеспечивают выполнение равенства

$$\Omega_{x_0} = \Omega_{y_0} = 0.$$

При наличии системы разгрузки маховиков линеаризованные уравнения возмущенного движения КА имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Delta \gamma}{d\tau^2} + (4\eta + 4 - b_{z0}) \Delta \gamma - (\eta - b_{z0}) \frac{d\Delta \psi}{d\tau} &= \bar{w}_{bx} - \frac{d\bar{u}_x}{d\tau} - \bar{u}_y; \\ \eta_y \frac{d^2 \Delta \psi}{d\tau^2} + (\eta_z - 1 - b_{z0}) \Delta \psi + (\eta - b_{z0}) \frac{d\Delta \gamma}{d\tau} &= \bar{w}_{by} - \\ - \frac{d\bar{u}_y}{d\tau} + \bar{u}_x; \quad \eta_z \frac{d^2 \Delta \vartheta}{d\tau^2} + 3(1 - \eta_y) \Delta \vartheta &= \bar{w}_{bz} - \frac{d\bar{u}_z}{d\tau}, \end{aligned} \quad (6.6.48)$$

где $\tau = \nu_0 t$; $\eta = \frac{J_z - J_y}{J_x} - 1$; $\eta_y = \frac{J_y}{J_x}$; $\eta_z = \frac{J_z}{J_x}$;

$$b_{z0} = \frac{J_M \Omega_{z0}}{J_x \nu_0}; \quad \bar{w}_{bx} = \frac{\Delta M_{bx}}{\nu_0^2 J_x}; \quad \bar{w}_{by} = \frac{\Delta M_{by}}{\nu_0^2 J_x};$$

$$\bar{w}_{bz} = \frac{\Delta M_{bz}}{\nu_0^2 J_x}; \quad \bar{u}_x = \frac{k_d J_M u_x}{\nu_0 J_x}; \quad \bar{u}_y = \frac{k_d J_M u_y}{\nu_0 J_x};$$

$$\bar{u}_z = \frac{k_d J_M u_z}{\nu_0 J_x},$$

причем в ΔM_{bz} , ΔM_{by} , ΔM_{bx} входят моменты, создаваемые системой разгрузки.

Два первых уравнения системы (6.6.48), описывающие взаимосвязанные движения КА по крену и рысканию, можно сделать независимыми, если воспользоваться законом управления, имеющим в операторной форме вид

$$U_x(p) = q_\gamma(p) \Gamma(p) + [(\eta - b_{z0}) - \frac{q_\psi(p)}{p}] \Psi(p);$$

$$U_y(p) = [\frac{q(p)}{p} - (\eta - b_{z0})] \Gamma(p) + q_\psi(p) \Psi(p),$$

где $\Gamma(p)$, $\Psi(p)$; $U_x(p)$, $U_y(p)$ – преобразованные по Лапласу $\Delta \gamma(t)$, $\Delta \psi(t)$, $\bar{u}_x(t)$, $\bar{u}_y(t)$.

С учетом принятых законов управления запишем систему уравнений движения ракеты по крену и рысканию в операторной форме при нулевых начальных условиях

$$[p^3 + q_\gamma(p) (p^2 + 1) + (3\eta + 4)p] \Gamma(p) = p W_x(p); \\ [\eta_y p + q_\psi(p)] (p^2 + 1) \Psi(p) = p W_y(p).$$

Пользуясь операторным методом, можно определить соответствующие передаточные функции системы и построить переходные процессы – реакции системы на типовые возмущения. Подбирая вид полиномов $q_\gamma(p)$ и $q_\psi(p)$, можно добиться желаемых характеристик переходных процессов.

Реакция КА на внешние возмущения зависит от инерционных характеристик маховиков и их угловых скоростей. Эффективность инерционных маховиков определяется отношением моментов инерции маховика и КА $J_M/J_x, J_M/J_y, J_M/J_z$. С уменьшением эффективности инерционных маховиков, а значит, массы, увеличивается изменение их угловых скоростей при парировании данного возмущающего фактора. Предельная угловая скорость маховика Ω_{\max} обратно пропорциональна его массе и задается в соответствии с прочностными свойствами. Мощность, необходимая для разгона или торможения инерционного маховика, подсчитывается по формуле

$$N(t) = J_M \Omega \frac{d\Omega}{dt} .$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 1.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК РАКЕТ.

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ ПО КУРСУ "ДИНАМИКА РАКЕТ"

При проектировании таких сложных образцов техники, какими являются ракеты, ракетно-космические блоки и космические аппараты, возникает необходимость исследовать динамические процессы в конструкции и частично заполненных жидким топливом баках с целью определения динамических характеристик изделия в целом, его отсеков и агрегатов.

Когда ракета и космический аппарат еще не созданы, исследовать надежность их функционирования в реальных условиях эксплуатации можно только с помощью методов математического или физического моделирования.

Как было показано в главах 3...5, задачи определения динамических характеристик и обеспечения устойчивости возмущенного движения летательных аппаратов с учетом упругости корпуса и подвижности жидкого топлива в баках являются сложными даже в упрощенной постановке, когда допустима линеаризация уравнений. Численные решения задачи в нелинейной постановке, которые можно применить для проверочных расчетов, мало пригодны при проектировании ракеты. Наиболее достоверно ее динамические характеристики можно найти экспериментально. В приложении излагаются методы физического моделирования, приводятся описания экспериментальных стендов и оборудования (в том числе измерительного), методик испытаний, применяемых при выполнении лабораторных работ.

§ П. 1.1. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В КОНСТРУКЦИЯХ И ТОПЛИВНЫХ БАКАХ РАКЕТ. КРИТЕРИИ ПОДОБИЯ

Экспериментальные исследования динамических процессов, выполняемые при проектировании и конструировании ракеты, принято проводить на моделях летательного аппарата или его отсеков и агрегатов. Наиболее точные динамические характеристики получают, если в опытах исследуются конструктивно подобные модели – модели объектов, подобные натурным не только по геометрическим параметрам, но и по массовым и жесткостным характеристикам.

Конструктивно подобные модели позволяют определить точно и в полном объеме динамические свойства объектов и применяются, например, для изучения поведения конструкции ракеты под действием реально возникающих в полете нагрузок, определения характеристик ее напряженно-деформированного состояния, форм и частот собственных колебаний корпуса в целом или его элементов и др.

Создание конструктивно подобных моделей – трудоемкий процесс, так как в модели необходимо тщательно воспроизвести конструктивные решения натурного объекта. Поэтому в некоторых случаях, когда в опытах не требуется моделировать деформации и напряжения в конструкции, допустимо использовать геометрически подобные модели. В них не обеспечивается подобие по свойствам и толщинам материалов, жесткости конструкций, а выдерживается подобие только геометрических параметров: внешних (или внутренних) обводов, формы и расположения элементов

конструкции и агрегатов. Геометрически подобные модели, как правило, применяются при исследовании параметров движения жидких компонентов топлива в баках ракеты.

Если при выборе параметров моделей натурных объектов, проектировании экспериментальных стендов и разработке методик и режимов экспериментов выполнять некоторые условия, результаты опытов на моделях с высокой степенью достоверности можно перенести на натурные объекты. Определим эти условия, пользуясь основными положениями теории физического моделирования.

Как известно, в результате физического моделирования по результатам испытаний модели получают сведения о параметрах и закономерностях физического явления или процесса, происходящего в натурных условиях. Фактически при моделировании интересующее нас натурное физическое явление или процесс, происходящий с объектом исследования, заменяется подобным явлением (процессом), которое воспроизводится на модели, выполненной в некотором масштабе.

Считается [25], что два явления подобны, если все безразмерные комплексы, которые могут быть составлены из размерных параметров, характеризующих явление и влияющих на процесс, имеют одинаковое численное значение. Эти безразмерные комплексы принято называть критериями подобия. Таким образом, для того чтобы натурные и модельные явления или процессы были подобны, необходимо выдерживать критерии подобия, определяющие все параметры процесса, одинаковыми. Численные значения характеристик двух подобных явлений можно считать значениями характеристик одного и того же явления, которые выражены в различных системах единиц измерения. В практике часто пользуются другими формулировками теорем теории подобия. Например, две системы называют кинематически подобными, если любые две соответствующие обобщенные координаты обеих систем для любых сходственных моментов времени пропорциональны. Достаточным условием подобия двух систем называют равенство двух любых соответствующих критериев подобия, составленных из параметров систем и начальных (граничных) условий. Необходимое условие подобия двух систем – это равенство любых двух соответствующих критериев подобия, составленных из обобщенных координат и параметров этих систем. Необходимым и достаточным условием подобия двух явлений (систем) является равенство любых двух соответствующих критериев подобия этих явлений (систем).

Нетрудно показать, что характеристики одного из подобных явлений могут быть пересчитаны в характеристики другого с помощью масштабных соотношений, которые получаются из условий равенства критериев подобия для натурного объекта и модели.

Всякий раз перед проведением экспериментов, предназначенных для моделирования того или иного явления или процесса, приходится выявлять совокупность критериев подобия, которые нужно выделять одинаковыми в натурном и модельном процессах.

В опытах ищется зависимость параметров процесса от определяющих критериев, образующих некоторую базу. Совокупность всех критериев подобия можно легко установить в тех случаях, когда исследуемый физический процесс выражен математически, например описан дифференциальным уравнением. Достаточно придать этому уравнению безразмерный вид, и коэффициенты при каждом слагаемом определят набор критериев подобия. Очевидно, что уравнения, которыми будет описан натурный и модельный процессы, при равенстве коэффициентов будут иметь одинаковые решения.

Если закономерности исследуемого процесса еще не описаны уравнениями, для определения всех критериев подобия выявляют все параметры, влияющие на процесс. Пусть, например, явление или процесс зависит от n параметров, среди которых могут быть размерные и безразмерные. Предположим, что размерные параметры выражены через k основных единиц измерений ($k < n$). Из n параметров нетрудно составить $(n - k)$ независимых безразмерных комбинаций – критериев подобия и установить некоторую базу критериев, определяющих все искомые параметры процесса.

Определим, например, совокупность критериев подобия для моделирования упругих колебаний конструкции из однородного материала. Для этого перечислим все

параметры, от которых зависит упругая деформация x : линейный размер l , плотность ρ , модуль упругости материала E , безразмерный коэффициент Пуассона μ , начальные перемещения и скорость x_0, \dot{x}_0 , известные для любой точки конструкции.

Из указанных параметров можно составить необходимые и достаточные условия подобия

$$\mu = \text{idem}; x_0/l = \text{idem}; \dot{x}_0/\sqrt{E/\rho} = \text{idem}.$$

Как видим, удовлетворить первое условие можно, если натурный объект и модель изготовить из материалов, имеющих одинаковые коэффициенты Пуассона.

Далее, следуя π -теореме теории подобия [25], согласно которой функциональная зависимость между характеризующими данный процесс величинами может быть представлена в виде зависимости между составленными из них критериями подобия, найдем зависимость параметров процесса от найденных критериев. Например, формы и частоты колебаний будут определяться зависимостями

$$x = lf_1(\mu, x_0/l, \dot{x}_0/\sqrt{E/\rho}); \quad \omega = (1/l) \sqrt{E/\rho} f_2(\mu, x_0/l, \dot{x}_0/\sqrt{E/\rho}).$$

Так как частоты и формы собственных колебаний не зависят от начальных условий, а модельный и натурный образцы изготовлены из материалов с одинаковыми коэффициентами Пуассона, искомые зависимости примут вид

$$x = lC_1; \quad \omega = (1/l) \sqrt{E/\rho} C_2.$$

Функции f_1 и f_2 или постоянные C_1 и C_2 , определяются экспериментально. Задаваясь масштабами $k_l = l_M/l_H, k_\rho = \rho_M/\rho_H, k_E = E_M/E_H$ как исходными, выразим масштабы остальных параметров

$$k_x = k_l = x_M/x_H; \quad k_{\dot{x}} = \sqrt{k_E/k_\rho}; \\ k_\omega = \omega_M/\omega_H = (1/k_l) \sqrt{k_E/k_\rho}.$$

Здесь индексами "М" и "Н" обозначены параметры модели и натурного образца.

При исследовании динамических внутрибаковых процессов, происходящих при изменении перегрузок, используют следующие безразмерные критерии подобия:

$Bo = \rho n g l^2 / A$ – число Бонда; $Fr = V^2 / n g l$ – число Фруда;

$We = \rho V^2 l / A$ – число Вебера; $Re = Vl/\nu$ – число Рейнольдса;

$Sh = Vt/l$ – число Струхала (критерий гомохронности),

где n – перегрузка; g – ускорение свободного падения; A – коэффициент поверхностного натяжения; V – характерная скорость жидкости; ν – кинематическая вязкость, t – характерное время.

Условиями полного подобия гидродинамических процессов являются соблюдение одинаковых начальных состояний в натурном и модельном баках и выполнение равенств

$$Fr = \text{idem}; \quad We = \text{idem}; \quad Re = \text{idem}; \quad Sh = \text{idem}.$$

Однако часто полного подобия не удается достичь. Тогда ограничиваются неполным моделированием, оставляя параметры, наиболее важные для данного процесса. В частности, для моделирования гидродинамических процессов в баках при переходе от условий невесомости к продольной перегрузке достаточно удовлетворить следующим равенствам:

$$Fr = \text{idem}; \quad Re = \text{idem}; \quad Sh = \text{idem}.$$

Таблица П. 1

Жидкость	Физические свойства			
	Поверхностное натяжение $\times 10^2$, Н/м	Плотность $\times 10^{-3}$ кг/м ³	Кинематическая вязкость $\times 10^6$, м ² /с	Угол смачивания, °
Вода	7,27	1,00	1,0	50 ... 10
Керосин	2,89	0,83	3,1	0 ... 2
Спирт	2,28	0,78	1,5	0
Жидкий кислород	1,30	1,15	0,2	0
Бензин	2,60	0,70	0,9	0 ... 2

Если за исходные масштабы принять $k_l = l_M/l_H$; $k_v = v_M/v_H$, то остальные можно выразить через них: $k_n = k_v^2 k_l^3$; $k_V = k_v k_l^{-1}$; $k_t = k_l^2 k_v$; $k_\omega = k_l^2 k_v$.

Требование геометрического подобия при моделировании гидродинамических процессов, в которых поверхностные силы являются преобладающими и определяют в равновесии форму поверхности раздела газовой и жидкой фаз, влияет на выбор модельной жидкости.

Обычно в качестве модельной жидкости из соображений безопасности эксперимента и удобства эксплуатации выбирают воду с различными добавками. Физические свойства некоторых жидкостей приведены в табл. П. 1.

§ П. 1.2. ВИБРОЗАДАЮЩАЯ И РЕГИСТРИРУЮЩАЯ АППАРАТУРА

Возбудители колебаний

Возбудители колебаний, или вибраторы представляют собой устройства, предназначенные для создания механических колебаний.

Вибраторы низкой частоты (до 80 ... 100 Гц) – это механические конструкции, подвижная часть которых является системой с жесткими связями. В этих вибраторах вращательное движение с помощью различных механизмов преобразуется в колебательное.

В вибраторах, предназначенных для работы при высоких частотах, применяют электромеханические системы, в которых возбуждение колебаний осуществляется электрическим путем, а подвижные части представляют собой механическую колебательную систему с упругими связями.

В данных лабораторных работах используется как механический вибратор, в котором вращательное движение преобразуется в возвратно-поступательное с помощью кривошипно-шатунного механизма, так и электродинамический, схема которого представлена на рис. П.1.

Подвижная катушка 1 вибратора состоит из нескольких витков провода 3, намотанного на кольцеобразный каркас, прикрепленный к двум плоским пружинам 2. Частота собственных колебаний подвижной катушки ниже рабочей частоты вибратора.

Магнитный поток в воздушном зазоре создается постоянным магнитом или электромагнитом 4. Усилие, развиваемое вибратором, пропорционально числу витков

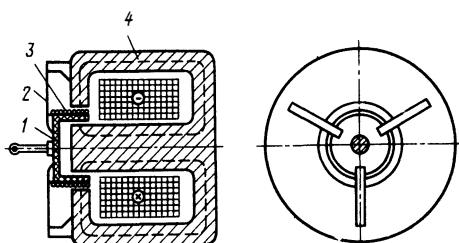


Рис. П.1.

подвижной катушки, пропускаемому по ним току и индукции поля возбуждения.

Изменение частоты электрического тока производится с помощью звукового генератора (ЗГ). Обычно используется ЗГ различных типов – либо входящие в комплект вибростенда, либо установленные отдельно.

Регистрирующая аппаратура

При испытаниях моделей необходимо определять следующие их характеристики: частоту, амплитуду, форму колебаний. Интересующие нас частоты колебаний конструктивно подобной модели лежат в пределах от 0 до 400 Гц. Амплитуды колебаний не превышают 1 мм для конструкции и 300 мм для жидкости.

Параметры колебаний измеряют датчиками различных систем. Основное требование, предъявляемое к датчикам, – необходимая точность измерений во всем диапазоне частот, минимальная масса, надежность в работе. Установка датчика не должна существенно увеличивать местную жесткость конструкции модели и ее массу. Наибольшее распространение при испытаниях конструктивно подобных моделей получили проволочные тензодатчики – сопротивления, которые представляют собой плоскую зигзагообразную обмотку из проволоки с высоким удельным сопротивлением. Принцип действия тензодатчиков этого типа основан на изменении сопротивления проволоки при деформациях (рис. П.2).

Для компенсации температурной погрешности в схему измерительного моста кроме основного датчика 1 включается идентичный по своим характеристикам компенсирующий датчик 2, наклеиваемый на образец из того же материала, что и испытываемая конструкция, и помещаемый в одинаковые с ней температурные условия.

Часто применяются инерционные датчики, которые определяют скорости перемещения отдельных точек модели. Такие датчики рассчитаны на работу в комплекте, имеющем интегрирующее и дифференцирующее устройства. Поэтому они могут быть использованы для измерения виброускорения и вибросмещения.

Принцип действия и устройство инерционного датчика (рис. П.3) следующие. Датчик состоит из массы (магнита) 2, подвешенной на пружинах 4 к корпусу 3. Масса может перемещаться относительно жестко закрепленной на корпусе обмотки 1. При перемещениях корпуса датчика вместе с испытуемым объектом масса из-за инерционности стремится сохранить состояние покоя, что приводит к перемещению корпуса датчика относительно массы.

В зависимости от скорости перемещения в обмотке появляется ЭДС индукции, которая усиливается и фиксируется осциллографом.

Для определения амплитуды колеблющейся жидкости используются емкостные датчики уровня (рис. П.4), представляющие собой две медные пластины, закрепленные на некотором расстоянии друг от друга и тщательно изолированные. В зависимости от глубины погружения такого датчика меняется его емкость, что позволяет судить об уровне жидкости.

Датчик уровня включается в мостовую схему аналогично датчику сопротивления, а для балансировки в другое плечо моста включается конденсатор.

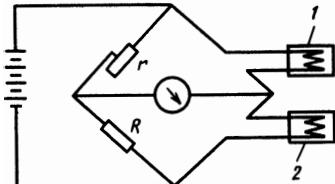


Рис. П.2.

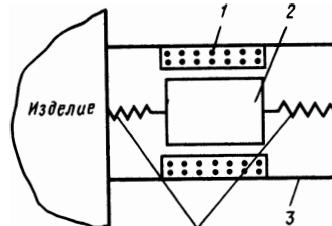


Рис. П.3.



Рис. П.4.

Тензометрические усилители (ТУ) предназначены для усиления сигналов датчиков. В основу работы ТУ положен метод преобразования измеряемых параметров процессов в электрические сигналы с помощью датчиков сопротивлений или емкостных датчиков. Основным элементом ТУ является мост, в плечи которого включаются датчики. Существует несколько типов тензоусилителей. В данных лабораторных работах можно использовать любой ТУ из числа имеющихся. Снятый с ТУ электрический сигнал необходимо подать на регистрирующую аппаратуру.

Для записи или демонстрации процесса применяются либо катодные, либо свето-лучевые (шлейфовые) осциллографы. При использовании шлейфового осциллографа запись производится на фотобумагу.

§ П. 1.3. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА "ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТ, ФОРМ И ДЕКРЕМЕНТА УПРУГИХ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ РАКЕТ НА КОНСТРУКТИВНО ПОДОБНЫХ МОДЕЛЯХ"

Назначение работы

Цель данной работы – ознакомить с методикой моделирования и измерения динамических характеристик: частот, форм и декремента упругих свободных колебаний конструкции ракеты. Динамические характеристики упругого корпуса ракеты могут быть определены путем динамических испытаний натурных изделий. Однако подобные испытания для больших изделий являются дорогостоящими и технически сложно осуществимыми.

Удобнее проводить динамические испытания на конструктивно подобных моделях. С помощью моделей можно изучать динамические свойства не только готовых изделий, но и находящихся на стадии проектирования. Конструктивно подобные модели широко применяются для испытаний авиационной и ракетной техники.

Динамические характеристики ракеты, которые изучаются в данной лабораторной работе, являются исходными величинами в расчетах устойчивости движения ракеты и динамической прочности ее конструкции.

Частоты, формы и декременты упругих свободных колебаний

Упругие колебания конструкции, происходящие при отсутствии внешних воздействий, называют свободными. Если при этом рассматривается идеальный случай, когда отсутствует рассеивание энергии, свободные колебания можно считать собственными.

Собственные колебания конструкции характеризуются собственными частотами и формами. Собственные частоты образуют бесконечную дискретную последовательность чисел ω_j ($j = 1, 2, 3 \dots$). Каждой собственной частоте соответствует своя форма колебаний V_j ($j = 1, 2, 3 \dots$).

Частоты и формы упругих колебаний корпуса ракеты можно определить либо расчетным, либо экспериментальным путем. В общем случае для расчета этих характеристик используются различные приближенные методы, требующие применения ЭВМ. Для грубых оценок частот собственных колебаний корпуса применяется формула Рэлея

$$\omega_j^2 = \frac{\int_0^l EJ \left(\frac{d^2 V_j}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^l m^* V_j^2 dx + \sum m_j V_j^2},$$

где l – длина корпуса; J – момент инерции сечения корпуса; V_j – формы упругих колебаний; m^* – погонная распределенная масса; m_j – сосредоточенные массы.

Как видно, частоты собственных колебаний могут быть определены по этой формуле, если известны формы собственных колебаний V_j .

Рассеивание энергии, сопровождающее всякий реальный колебательный процесс, учитывают введением демпфирующей составляющей в уравнение упругих свободных колебаний корпуса ракеты:

$$\frac{d^2 \beta_j}{dt^2} + \epsilon_j \frac{d\beta_j}{dt} + \omega_j^2 \beta_j = 0,$$

где ϵ_j – коэффициент демпфирования; β_j – параметр, характеризующий колебания упругой линии корпуса ракеты.

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\beta_j(t) = C_j e^{-\frac{\epsilon_j t}{2}} \cos(\omega_j t + \delta_j),$$

где C_j , δ_j – произвольные постоянные, определяемые из начальных условий для функции $\beta_j(t)$.

Определим амплитуды колебаний в момент времени t_1 :

$$\beta_j(t_1) = C_j e^{-\frac{\epsilon_j t_1}{2}}$$

и в момент времени t_2 :

$$\beta_j(t_2) = C_j e^{-\frac{\epsilon_j t_2}{2}}$$

и далее отношение амплитуд колебаний в моменты времени t_1 и t_2 :

$$\frac{\beta_j(t_1)}{\beta_j(t_2)} = e^{-\frac{\epsilon_j}{2}(t_1 - t_2)}$$

Если $t_2 - t_1 = T$, где T – период колебаний, то

$$\frac{\beta_j(t_1)}{\beta_j(t_2)} = e^{-\frac{\epsilon_j}{2}T}$$

Показатель степени $\frac{\epsilon_j}{2}T$ определяет темп затухания колебательного процесса и называется логарифмическим декрементом колебаний:

$$d = \frac{\epsilon_j}{2}T = \ln \frac{\beta_j(t_1)}{\beta_j(t_2)} .$$

Коэффициент демпфирования ϵ_j и логарифмический декремент d связаны соотношением

$$\epsilon_j / \omega_j = dk,$$

где k – некоторый безразмерный коэффициент пропорциональности.

Экспериментальные методы определения форм и частот собственных колебаний на конструктивно подобных моделях

Для экспериментального определения частот и форм собственных колебаний моделей натурных объектов чаще других используются резонансный метод и метод свободных колебаний.

При резонансном методе к модели с помощью вибратора прикладывается гармоническая возбуждающая сила. Изменяя частоту вибратора, добиваются ее совпадения с частотой собственных колебаний модели. Частота, при которой наступает резкое увеличение амплитуды колебаний испытываемой модели (резонанс), принимается за частоту собственных колебаний. При дальнейшем увеличении частоты амплитуда колебаний уменьшается. Резонансная частота не может считаться найденной, если не был найден максимум амплитуды.

Увеличивая частоту вибратора, можно найти второй, третий и т.д. резонансы.

По замерам амплитуд в различных точках модели получают форму колебаний.

При использовании второго метода в исследуемой системе ударом или внезапной разгрузкой возбуждают свободные колебания и определяют их частоту и форму. Метод свободных колебаний обладает рядом существенных недостатков и служит в основном для определения низшей частоты колебаний системы, для которой он наиболее точен. В лабораторной работе применяется как резонансный, так и метод свободных колебаний.

Для определения декремента свободных колебаний конструкция выводится на резонансный режим первого тона колебаний и далее путем разрыва механической связи между испытуемой моделью и вибратором обеспечивается режим свободных колебаний конструкции.

По виду кривой свободных колебаний определяется декремент

$$d = \ln \frac{A_0}{A_1},$$

где A_0 и A_1 – соответственно амплитуды двух последовательных колебаний.

Для большей точности можно пользоваться формулой

$$d = \frac{1}{n} \ln \frac{A_0}{A_n},$$

где n – произвольное число колебаний.

Условия и виды испытаний

При динамических испытаниях большую роль играет правильное закрепление модели и ее подвеска. Влияние подвески должно быть минимальным.

В данной лабораторной работе модель подвешивается на пружинах или тонкой проволоке таким образом, чтобы частота системы модель – подвеска была в 7...10 раз ниже первой исследуемой частоты. При этом модель не имеет жестких связей

с рамой испытательной установки, которая жестко закрепляется на силовом полу. Такая схема подвески называется свободной.

Точку приложения возмущающей силы выбирают в зависимости от характера эксперимента. При испытаниях на поперечные колебания подвижные части вибратора крепятся к модели вблизи центра тяжести.

Так как испытуемая конструкция соединена с подвижной частью вибратора, то по существу измеряется частота не конструкции, а системы модель – вибратор. Эта добавочная масса понижает собственную частоту конструкции, которая оказывается меньше истинной. Поэтому в каждом конкретном случае проводят оценку влияния добавочной массы. Чаще всего используется метод экстраполяции, который заключается в следующем: проводят 3..4 замера частоты при различных добавочных массах. Это достигается установкой на вибратор дополнительных грузов. По оси абсцисс откладывают значения массы вибратора с добавочными грузами, а по оси ординат – соответствующие им резонансные частоты. Соединяют полученные точки плавной кривой и продолжают ее до пересечения с осью ординат (рис. П. 5). Точка пересечения дает значение резонансной частоты при нулевой добавочной массе, т.е. частоту собственных колебаний модели.

Описание экспериментальной установки

Схема экспериментальной установки показана на рис. П. 6. В качестве виброзадающей аппаратуры используется вибростенд 1.

Для измерения упругих колебаний конструкции используются инерционные датчики – акселерометры 4, установленные на корпусе модели ракеты. Электрический сигнал с датчика, усиленный в тензостанции 2, подается либо на шлейфовый осциллограф 3, либо на катодный осциллограф.

Порядок выполнения работы

Изменяя частоту колебаний вибростенда при фиксированных массах (дополнительных грузов $m_1, m_2 \dots$) резонансным методом определяют частоты собственных колебаний конструкций $\omega_1, \omega_2 \dots$. Затем строят экстраполяционный график (см. рис. П. 5) и определяют собственную частоту при $m = 0$. Сравнивая по амплитуде и фазе показания датчиков, установленных в различных точках конструкции, строят упругую линию, соответствующую первому тону изгибных колебаний корпуса. Методом свободных колебаний определяют частоты и декременты колебаний конструкции. Найденные для модели ракеты динамические характеристики (частоты собственных колебаний) с помощью масштабных соотношений пересчитывают на натурное изделие.

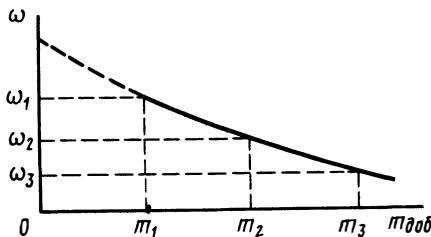


Рис. П.5.

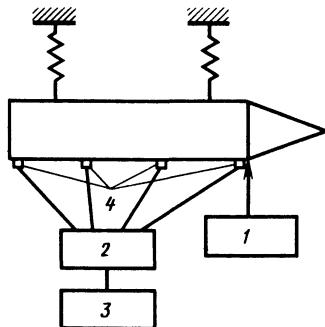


Рис. П.6.

§ П.1.4. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА “ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕКРЕМЕНТА КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ В БАКАХ С ДЕМПФИРУЮЩИМИ УСТРОЙСТВАМИ”

Назначение лабораторной работы

Цель данной работы – ознакомить с методами определения декремента колебаний жидкости в баках.

Характер движения ракет, у которых основная часть массы приходится на жидкое топливо, в значительной мере определяется свойствами жидкости, способностью демпфировать возникшие в полете колебания. Демпфирующие свойства системы определяются декрементом колебаний, отыскание которого чисто расчетным путем возможно лишь с помощью ЭВМ, но и в этом случае приходится принимать ряд допущений, что приводит к значительным погрешностям. Экспериментальные исследования дают более надежный результат.

Декремент колебаний, собственные и приведенные частоты

На динамику ракеты существенное влияние оказывают колебания жидкости в баке с частотой, близкой к наименьшей собственной частоте. Представим упрощенную модель колеблющейся жидкости в виде физического маятника. При этом уравнение колебаний может быть записано в простейшем виде

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0,$$

где m – масса; b – коэффициент трения; k – коэффициент жесткости.

Обозначив

$$b/m = 2\epsilon; \quad k/m = \omega_0^2,$$

получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\epsilon \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (\text{П. 4.1})$$

Решение этого уравнения при условии $\epsilon^2 \neq \omega_0^2$ имеет вид

$$x = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (\text{П. 4.2})$$

Здесь λ_1 и λ_2 – корни квадратного уравнения

$$\lambda^2 + 2\epsilon\lambda + \omega_0^2 = 0. \quad (\text{П. 4.3})$$

При $\epsilon^2 > \omega_0^2$ корни уравнения (П. 4.3) – действительные числа, а при $\epsilon^2 < \omega_0^2$ – комплексные.

В зависимости от знака разности $\epsilon^2 - \omega_0^2$ существуют два типа решений, соответствующих двум различным процессам: колебательному при $\epsilon^2 < \omega_0^2$ и апериодическому при $\epsilon^2 > \omega_0^2$.

При достаточно малом трении, когда $\epsilon^2 < \omega_0^2$, корни характеристического уравнения имеют значения $\lambda_{1,2} = -\epsilon \pm i\omega$, где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \epsilon^2}$, $i = \sqrt{-1}$.

Общее решение уравнения (П. 4.1) имеет вид

$$x = e^{-\epsilon t} (A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t). \quad (\text{П. 4.4})$$

Коэффициенты A_1 и A_2 определяются начальными условиями.

Формула (П. 4.4) описывает осцилляторный затухающий процесс, в котором амплитуда уменьшается по показательному закону. Полученная функция $x(t)$ не является, строго говоря, периодической, так как периода в строгом смысле этого слова в данном случае не существует. Однако промежуток времени между двумя последовательными прохождениями системы через положение равновесия постоянен и равен $T = 2\pi/\omega$. Этот промежуток времени мы будем называть условным периодом затухающего осцилляторного процесса.

Скорость затухания рассматриваемого осцилляторного процесса может быть охарактеризована коэффициентом демпфирования ϵ , численное значение которого зависит от выбора единиц измерения. Однако можно ввести иную характеристику затухания, не зависящую от выбора единиц измерения.

Возьмем отношение двух последовательных экстремумов колебания, направленных в одну и ту же сторону, например двух последовательных максимумов

$$\frac{x_{1 \max}}{x_{2 \max}} = e^{\epsilon T} = e^{2\pi\epsilon/\omega}.$$

Логарифм этой величины, или разность логарифмов двух последовательных максимумов, носит название логарифмического декремента колебания d ,

$$d = \epsilon T = 2\pi\epsilon/\omega. \quad (\text{П. 4.5})$$

Рассмотрим колебания системы под действием периодической силы (рис. П. 7):

$$F = H \sin(pt + \delta), \quad (\text{П. 4.6})$$

где H , p , δ – соответственно амплитуда, частота и начальная фаза периодической силы.

В плоскости xOy колебания Δx точек свободной поверхности жидкости по оси Ox можно представить в виде произведения двух функций $\beta(H, t)$ и $f = f(r)$:

$$\Delta x = \beta(H, t) f(r),$$

где H – амплитуда перемещения бака по оси Oy ; r – абсциссы точек свободной поверхности; t – время.

Предположим, что свободная поверхность жидкости плоская, что с достаточной степенью точности справедливо для малых амплитуд колебаний жидкости с низшей собственной частотой.

Тогда, очевидно, что

$$f(r) = r, \quad \beta = \Delta x/r.$$

Нетрудно заметить, что β является тангенсом угла наклона плоскости свободной поверхности колеблющейся жидкости к плоскости, соответствующей ее невозмущенному состоянию: $\beta = \tan \vartheta$.

Уравнение движения в этом случае имеет вид

$$\frac{d^2 \beta}{dt^2} + 2\epsilon \frac{d\beta}{dt} + \omega_0^2 \beta = \alpha q \sin(pt + \delta), \quad (\text{П. 4.7})$$

где α – коэффициент, учитывающий несовпадение направлений перемещений бака и точек свободной поверхности: $q = H/m$.

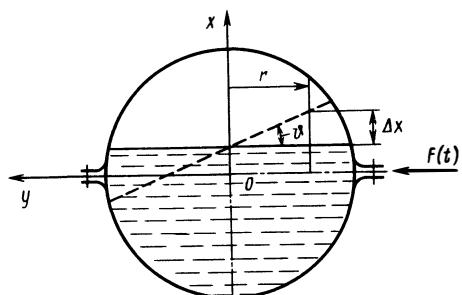


Рис. П.7.

Общее решение этого уравнения представим в виде суммы общего решения β_1 однородного уравнения и частного решения β_2 , неоднородного уравнения.

Запишем частное решение уравнения (П. 4.7) в виде

$$\beta_2 = A \sin(pt + \delta - x), \quad (\text{П. 4.8})$$

где

$$\operatorname{tg} x = \frac{2\epsilon p}{\omega_0^2 - p^2}; \quad A = \frac{\alpha q}{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\epsilon^2 p^2}.$$

Таким образом, решение уравнения (П. 4.7) можно представить в виде

$$\beta = e^{-\epsilon t} (C_1 \cos \sqrt{\omega_0^2 - \epsilon^2} t + C_2 \sin \sqrt{\omega_0^2 - \epsilon^2} t) + A \sin(pt + \delta - x).$$

Пусть при $t = 0$ $\beta = \beta_0$, $\dot{\beta} = \dot{\beta}_0$.

Определив из этих условий произвольные постоянные C_1 и C_2 , получим

$$\begin{aligned} \beta = & e^{-\epsilon t} (\beta_0 \cos \sqrt{\omega_0^2 - \epsilon^2} t + \frac{\epsilon \beta_0 + \dot{\beta}_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \epsilon^2}} \sin \sqrt{\omega_0^2 - \epsilon^2} t) - \\ & - A e^{-\epsilon t} [\sin(\delta - x) \cos \sqrt{\omega_0^2 - \epsilon^2} t + \frac{p \cos(\delta - x) + \epsilon \sin(\delta - x)}{\sqrt{\omega_0^2 - \epsilon^2}} \times \\ & \times \sin \sqrt{\omega_0^2 - \epsilon^2} t] + A \sin(pt + \delta - x). \end{aligned} \quad (\text{П. 4.9})$$

Первое слагаемое в выражении (П. 4.9) описывает затухающие свободные колебания, происходящие вследствие начального отклонения системы от положения равновесия и сообщения ей начальной скорости. Частота этих колебаний меньше собственной частоты.

Второе слагаемое в выражении (П. 4.9) описывает затухающие колебания той же частоты, что и свободные, но возникающие вследствие действия возмущающей силы.

Третье слагаемое в выражении (П. 4.9) описывает вынужденные колебания, имеющие частоту возмущающей силы. Эти колебания происходят с постоянной, не зависящей от времени амплитудой, тогда как амплитуды колебаний, соответствующих первым двум слагаемым, из-за наличия показательного множителя будут более или менее быстро уменьшаться. Поэтому по истечении достаточно продолжительного времени первыми двумя слагаемыми можно пренебречь. Сказанное относится и к случаю большого сопротивления ($\epsilon > \omega_0$). Итак, в установившемся режиме

$$\beta = A \sin(pt + \delta - x), \quad (\text{П. 4.10})$$

т.е. движение происходит с частотой возмущающей силы и с некоторым сдвигом относительно возмущающей силы по фазе.

Теперь исследуем зависимость амплитуды колебаний жидкости A в установившемся режиме от частоты p возмущающей силы:

$$A = \frac{\alpha q}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\epsilon^2 p^2}} = \frac{\alpha q}{\omega_0^2} \frac{1}{\sqrt{[1 - (\frac{p}{\omega_0})^2]^2 + 4(\frac{\epsilon}{\omega_0})^2 (\frac{p}{\omega_0})^2}}. \quad (\text{П. 4.11})$$

Назовем отношение $A/A_0 = \xi$ коэффициентом динамичности. Обозначив $A_0 = \alpha q/\omega_0^2$, получим

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{\epsilon}{\omega_0}\right)^2\left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}}. \quad (\Pi. 4.12)$$

Пусть $p/\omega_0 = z$, $\epsilon/\omega_0 = \nu$, тогда

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)^2 + 4\nu^2 z^2}}.$$

Максимуму ξ соответствует минимум подкоренного выражения в знаменателе:

$$\tilde{y} = (1-z^2)^2 + 4\nu^2 z^2.$$

Воспользовавшись правилами нахождения экстремума, получим $\tilde{y} = \tilde{y}_{\min}$ при $z_m = \sqrt{1-2\nu^2}$, т.е.

$$\xi_{\max} = \frac{1}{2\nu\sqrt{1-\nu^2}}. \quad (\Pi. 4.13)$$

Максимальное значение амплитуды колебаний жидкости в установившемся режиме получилось не при резонансе, а при $z = z_m = \sqrt{1-2\nu^2}$.

Под резонансом здесь можно понимать случай $z = 1$, т.е. совпадение частот возмущающей силы и свободных колебаний при отсутствии сопротивления, и случай $z = \sqrt{1-\nu^2}$, соответствующий совпадению частоты p возмущающей силы с частотой $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \epsilon^2} = \omega_0\sqrt{1-\nu^2}$ свободных колебаний при наличии сопротивления.

Определим коэффициент динамичности ξ при $z = 1$ и при $z = \sqrt{1-\nu^2}$ соответственно:

$$\xi_1 = \frac{1}{2\nu}; \quad \xi_2 = \frac{1}{2\nu\sqrt{1-\frac{3\nu^2}{4}}}.$$

Значения ξ_1 и ξ_2 меньше ξ_{\max} .

Иными словами, при наличии сопротивления имеет место сдвиг максимума амплитуды в сторону меньших значений частот. Однако при малых сопротивлениях этот сдвиг максимума амплитуды пренебрежимо мал.

Определим декремент при вынужденных колебаниях жидкости.

Если бы не было трения, то амплитуда вынужденных колебаний жидкости A в момент резонанса была бы сколь угодно большой. При наличии трения она принимает конечное значение. Значение амплитуды A в момент резонанса и является фактом, определяющим затухание колебаний системы.

Логарифмический декремент

$$d = \frac{2\pi\epsilon}{\omega} = \frac{2\pi\epsilon}{\sqrt{\omega_0^2 - \epsilon^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\omega_0^2}{\epsilon^2} - 1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{\nu^2} - 1}}. \quad (\Pi. 4.14)$$

Отсюда, воспользовавшись ранее выведенными соотношениями для ξ , получим выражение для декремента колебаний в случае резонанса:

$$d = \alpha \pi A_0 / A, \quad (\text{П. 4.15})$$

где A_0 – амплитуда колебаний бака.

Определим теперь неизвестную величину α .

Уравнение (П. 4.7) можно записать в таком виде:

$$\frac{d^2 \beta}{dt^2} + 2\epsilon \frac{d\beta}{dt} + \omega_0^2 \beta = \alpha \frac{d^2 y}{dt^2}. \quad (\text{П. 4.16})$$

Если бак движется поступательно с постоянным ускорением таким, что свободная поверхность жидкости наклонена к плоскости невозмущенного состояния под углом 45° , то $\beta = 1$ и из уравнения (П. 4.16) вытекает равенство

$$\omega_0^2 = \alpha \frac{d^2 y}{dt^2}.$$

Очевидно также, что при таком угле наклона ускорение бака в направлении оси Oy совпадает с ускорением свободного падения $d^2 y/dt^2 = -g$.

Отсюда $\omega_0^2 = \alpha g$ и

$$\alpha = \frac{\omega_0^2}{g}. \quad (\text{П. 4.17})$$

Для данного бака коэффициент α – величина постоянная, так как ω_0 зависит только от формы и объема бака.

Подставляя (П. 4.17) в (П. 4.15), получаем окончательное выражение для декремента колебаний в случае резонанса ($\omega_0 = p$):

$$d = \frac{\pi A_0 p^2}{g A}. \quad (\text{П. 4.18})$$

Описание экспериментальной установки

Схема экспериментальной установки для определения декремента колебаний жидкости в баках представлена на рис. П. 8.

Испытываемая модель бака 1, выполненная из оргстекла, устанавливается на под-

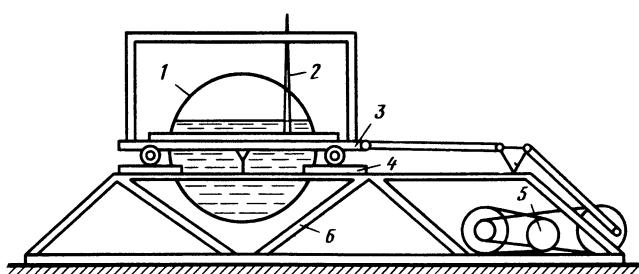


Рис. П.8.

важную тележку 3, перемещающуюся по направляющим 4, которые расположены на неподвижной сварной раме 6. На этой же раме закреплен электродвигатель постоянного тока 5, который через систему передач заставляет подвижную тележку совершать возвратно-поступательное движение. Частота колебаний тележки регулируется с помощью изменения числа оборотов электродвигателя.

Для определения амплитуды колеблющейся жидкости используются емкостные датчики уровня 2. Амплитуду колебаний тележки A_6 измеряют с помощью линейки. Для усиления сигналов с датчика используется тензометрический усилитель. Для наблюдения за исследуемым процессом применяют электронный осциллограф, на экране которого наблюдаются два колебания – жидкости и тележки. Это позволяет точно установить момент резонанса по сдвигу фаз между колебаниями тележки и жидкости на $\pi/2$. Для расчетов используются осциллограммы, полученные на шлейфовом осциллографе.

Обработка результатов эксперимента

Логарифмический декремент колебаний в случае резонанса определяется по формуле (П. 4.18). Если обозначить амплитуду колебаний уровня жидкости на расстоянии r от оси бака через a_0 , то $A = a_0/r$ и при обработке осциллограммы используется формула для декремента колебаний

$$d = \frac{\pi r A_6 p^2}{g a_0}.$$

В этой формуле амплитуда колебаний тележки A_6 определяется с помощью измерительной линейки, а амплитуда колебаний жидкости – по осциллограмме с помощью тарировочного графика. Частоту колебаний p определяют также по осциллограмме.

В случае затухания свободных колебаний логарифмический декремент определяется по формуле

$$d = \ln \frac{x_{1\max}}{x_{2\max}},$$

где $x_{1\max}$ и $x_{2\max}$ – истинные значения двух последовательных амплитуд колебаний жидкости, которые определяются по осциллограмме с помощью тарировочного графика.

Порядок выполнения работы

Устанавливают амплитуду колебаний тележки. Бак наполняют наполовину водой. Включают электродвигатель тележки и путем изменения числа оборотов двигателя систему вводят в резонанс, который контролируется по электронному осциллографу. С помощью шлейфового осциллографа процесс записывается на фотобумагу. После этого тележку останавливают, а запись продолжают до полного успокоения поверхности жидкости в баке. После проявления осциллограмм можно приступить к их расшифровке.

Эксперимент проводится для нескольких вариантов внутрибаковых устройств.

§ П. 1.5. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

"ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК

ТОПЛИВНЫХ БАКОВ НА КОНСТРУКТИВНО ПОДОБНЫХ МОДЕЛЯХ

ПРИ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ"

Назначение лабораторной работы

Цель лабораторной работы – экспериментально определить следующие величины: частоту собственных продольных колебаний жидкости в топливном баке сферической

формы; пульсации давления на входе в расходную топливоподающую магистраль; нагрузку в узлах подвески топливного бака; приведенные массы жидкости, заполняющей топливный бак, для различных собственных частот колебаний.

На многих ракетах, оснащенных ЖРД, в полете наблюдались неустойчивые продольные колебания с частотой до 50 Гц.

Корпус ракеты, топливные магистрали, ЖРД образуют замкнутый колебательный контур, в котором возмущение тяги двигателя может привести к возникновению колебаний корпуса, топлива в баках и магистралях и далее – к колебаниям тяги. Начальные колебания тяги могут усиливаться. Упругая оболочка бака с жидкостью образует самостоятельную колебательную систему. Обобщенными параметрами колебаний корпуса ракеты являются частоты и формы собственных продольных колебаний. Определение этих величин – одна из главных задач при изучении продольных колебаний. Весьма важно найти такие характеристики продольных колебаний, как динамические реакции в узлах подвески топливных баков и пульсации давления на входе в расходный трубопровод.

Пульсации давления, усиливаясь в некоторых случаях, передаются в двигатель и вызывают колебания его тяги.

Расчет приведенных масс

Жидкость, колеблющуюся в топливном баке, можно представить в виде осциллятора некоторой массы m , подвешенной к опоре на пружине определенной жесткости k .

Уравнение осциллятора представим в виде

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = P, \quad (\text{П. 5.1})$$

где x – перемещения массы m осциллятора; b – коэффициент демпфирования колебаний; P – сила, прикладываемая к колеблющейся опоре пружины.

Если u – перемещение узлов подвески бака, то

$$P = m \frac{d^2u}{dt^2}. \quad (\text{П. 5.2})$$

Примем, что узел подвески осциллятора колеблется по гармоническому закону

$$u = U e^{i\omega t}. \quad (\text{П. 5.3})$$

Тогда колебания самого осциллятора также будут гармоническими:

$$x = X e^{i\omega t}, \quad (\text{П. 5.4})$$

где ω – частота колебаний опоры.

Подставляя выражения (П. 5.2) ... (П. 5.4) в (П. 5.1), получаем

$$mX(-\omega^2 + \frac{b}{m}\omega i + \omega_0^2) = mU\omega^2. \quad (\text{П. 5.5})$$

В этом равенстве ω_0 – частота собственных колебаний осциллятора, определяемая формулой

$$\omega_0^2 = k/m.$$

Полагая, что частота вынужденных колебаний ω равна частоте собственных колебаний ω_0 , из (П. 5.5) получаем равенство

$$iX \frac{b}{m} \omega_0 = U \omega_0^2, \quad (\text{П. 5.6})$$

$$\text{откуда } X = i \frac{U \omega_0 m}{b}. \quad (\text{П. 5.7})$$

С другой стороны, реакция опоры Q^* определяется по формуле

$$Q^* = m \frac{d^2 x}{dt^2}. \quad (\text{П. 5.8})$$

Запишем формулу (П. 5.8) в амплитудных величинах, тогда

$$Q = -m \omega_0^2 X, \quad (\text{П. 5.9})$$

где Q – амплитудное значение реакции опоры.

Из (П. 5.9) получаем

$$X = -\frac{Q}{m \omega_0^2}. \quad (\text{П. 5.10})$$

Сравнивая выражения (П. 5.7) и (П. 5.10), получаем формулу

$$m^2 = \frac{Qb}{\omega_0^3 U}. \quad (\text{П. 5.11})$$

Коэффициент демпфирования b связан с логарифмическим декрементом колебаний d соотношением

$$b = m \frac{d}{\pi} \omega_0. \quad (\text{П. 5.12})$$

Из равенств (П. 5.11) и (П. 5.12) получим формулу для расчета массы m

$$m = \frac{1}{\pi} \frac{Qd}{\omega_0^2 U}. \quad (\text{П. 5.13})$$

Масса m представляет собой часть массы жидкости, заполняющей бак, которая участвует в колебаниях с собственной частотой ω_0 . Эту массу называют приведенной.

Таким образом, приведенную массу m можно определить, если известны значения логарифмического декремента колебаний d , собственной частоты ω_0 , амплитуды в месте возбуждения U и динамической реакции в опорах бака Q .

Расчет частот собственных колебаний

Свободные колебания бака с жидкостью при отсутствии диссипативных сил называются собственными. Эти колебания имеют бесконечный дискретный спектр частот, называемых частотами собственных колебаний. Из спектра частот наибольший интерес представляют несколько первых частот (чаще всего 1-я, 2-я и 3-я собственные частоты).

Эти частоты могут быть определены как расчетным, так и экспериментальным путем.

Собственные частоты продольных колебаний сферического, полностью заправленного бака можно рассчитать по эмпирической формуле

$$\omega_{0j} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\lambda_j E \delta}{\rho R^3}}, \quad (\text{П. 5.14})$$

где λ_j – собственные значения: для первой собственной частоты $\lambda_1 = 1,35$, для второй собственной частоты $\lambda_2 = 3,33$, для третьей собственной частоты $\lambda_3 = 5,04$; E – модуль упругости материала стенок бака; δ – толщина стенок бака; ρ – плотность жидкости; R – радиус бака.

Как показывают расчеты и эксперимент, продольные собственные частоты колебаний жидкости в баке при заполнении 60...100 % его объема в малой степени зависят от уровня заполнения жидкостью бака.

Поэтому для грубых оценок значений собственных частот можно пользоваться формулой (П. 5.14) и при других уровнях заполнения бака.

Метод экспериментального определения собственных частот изложен ниже.

Определение декремента свободных колебаний жидкости в баке

Декремент свободных колебаний определяют экспериментально-расчетным путем. Для этого используют амплитудно-частотную характеристику упругих колебаний оболочки, получаемую экспериментально. Декремент свободных колебаний рассчитывают по формуле

$$d = \Delta \omega \pi / \omega_0, \quad (\text{П. 5.15})$$

где ω_0 – собственная частота, на которой определяется декремент колебаний; $\Delta \omega$ – ширина резонансного пика на высоте, равной 0,7 амплитуды пика (рис. П. 9).

Описание установки

В данной работе исследования проводятся на полусферической оболочке 8 (рис. П. 10), изготовленной из оргстекла. В полюсной части оболочки вклеен кусок трубопровода, в котором в виде заглушки установлен датчик для замера пульсации давления 7. Для замера упругих колебаний стенок на оболочке вдоль меридиана наклеен ряд тензодатчиков 4.

Полусферическая оболочка имеет отбортовку на экваториальной части, которая зажимается двумя жесткими стальными кольцами 2, к которым крепятся узлы подвески оболочки. Всего имеется шесть узлов крепления.

Осьсимметричные колебания оболочки возбуждаются вибростендом через раму 5 и узлы крепления оболочки, которые имеют определенную жесткость и позволяют замерять силу, передаваемую от стола вибростенда к оболочке. Они выполнены в виде колец 3 с наклеенными с двух сторон (наружной и внутренней) тензодатчиками 9.

Для замера перемещения основания вибростенда, к которому крепится исследуемая оболочка, используются щупы 1, 10, изготовленные из упругой пластины с нак-

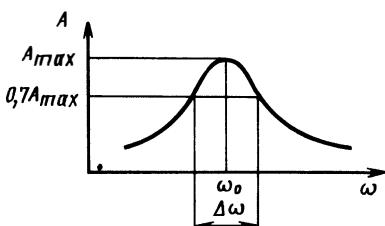


Рис. П.9.

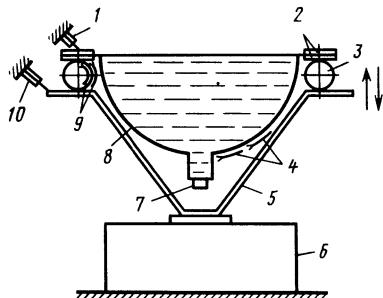


Рис. П.10.

ленными с двух сторон тензодатчиками. Одним концом пластина жестко защемляется на неподвижном основании, а другим опирается на исследуемую модель, если определяется перемещение модели, или на стол вибростенда, если определяется его перемещение.

Методика экспериментального определения частот собственных колебаний давлений на входе в трубопровод и реакций в узлах подвески топливного бака

Собственная частота полусферической оболочки, заполненной жидкостью, определяется резонансным методом. Метод заключается в варьировании частоты вынужденных колебаний оболочки с жидкостью и измерении при этом их амплитуд. В момент совпадения вынужденных и собственных частот колебаний оболочки наблюдается явление резонанса, при котором амплитуды колебаний максимальны. Эксперимент проводится следующим образом. На вибростенд со звукового генератора подается управляющий сигнал, частота которого 40...50 Гц, а затем плавно с помощью ручки управления звуковым генератором начинают изменять частоту сигнала в диапазоне частот до 220 Гц, выявляя резонансные частоты оболочки, соответствующие 1-му и 2-му тону ее колебаний. Момент наступления резонанса можно определить визуально, наблюдая резонансные явления на свободной поверхности жидкости бака в виде ярий или стоячих волн высотой 0,5...1 мм.

Во время прохождения заданного диапазона частот с интервалом 2...3 Гц на осциллографе регистрируются следующие характеристики: динамическая реакция, пульсации давления на входе в трубопроводы, амплитуды упругих колебаний оболочки и амплитуда перемещения стола.

По полученным результатам строят амплитудно-частотные характеристики (АЧХ), обработка которых позволяет определить также декременты колебаний и значения приведенных масс.

По полученной в результате эксперимента осциллографной ленте определяются относительные значения динамической реакции и амплитуды перемещения стола. Для перевода их в истинные значения заранее проводят тарировки, по которым строят тарировочные графики. Тарировка щупа, с помощью которого замеряют амплитуду перемещения стола вибростенда, производится на тарировочном столе следующим образом (рис. П. 11). Балка 1 с помощью специального устройства задается прогиб, который изменяется индикатором 2 с точностью 0,01 мм. Кроме того, в месте максимального прогиба балки устанавливается подвижная часть щупа 3, сигнал которого подается через тензоусилитель на осциллограф. Задавая последовательно различные прогибы балки, получают их значения, зафиксированные двумя средствами измерения: индикатором и щупом. По полученным двум параметрам строят тарировочный график, с помощью которого можно получить истинные замеряемые перемещения.

Тарировка датчиков сил, которые измеряют динамическую реакцию, проводится путем подачи на них заранее известного усилия или, например, путем слива или залива в бак определенного количества жидкости.

Порядок выполнения работы

Предварительно включают вибростенд, тензоусилитель и звуковой генератор для прогрева. Затем, изменения частоты с шагом 2...3 Гц, записывают динамические параметры: реакции в узлах подвески бака, давление на входе в трубопровод, упругие колебания оболочки, перемещения узлов подвески бака. В опытах должно быть зарегистрировано не менее двух резонансных пиков.

По полученным осциллограммам строят АЧХ всех динамических параметров и выявляют первую и вторую частоты собственных колебаний.

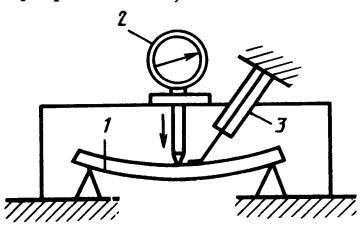


Рис. П.11.

Далее рассчитывают первую и вторую собственные частоты колебаний бака по формуле (П. 5.14) и сравнивают с экспериментальными значениями.

По АЧХ упругих колебаний оболочки определяют декремент свободных колебаний, используя формулу (П. 5.15).

По тарировочным графикам определяют истинные значения динамических реакций Q и перемещений узлов подвески бака U , по формуле (П. 5.13) – приведенную массу жидкости для первой и второй собственных частот.

§ П. 1.6. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

"ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ТОПЛИВНЫХ БАКАХ КА ПРИ ЗАПУСКЕ ДВИГАТЕЛЯ В УСЛОВИЯХ НЕВЕСОМОСТИ"

Назначение лабораторной работы

Цель лабораторной работы – исследовать в наземных условиях переходные гидродинамические процессы в баках КА при запуске ЖРД в условиях невесомости.

При проектировании современных и перспективных КА, на борту которых имеются запасы жидкости, необходимо учитывать, что КА на пассивных участках полета находится в условиях невесомости и слабых силовых полей. Это оказывается на решении многих технических проблем, связанных с особенностями поведения жидкости со свободной поверхностью в данных условиях.

В условиях космического полета очень важно обеспечить надежный запуск ЖРД. Трудности при осуществлении запуска двигателя в условиях невесомости и слабых силовых полей объясняются тем, что жидкое топливо может располагаться в баке произвольным образом, в том числе в зоне, противоположной заборному устройству таким образом, что подача его в насосный агрегат невозможна. Топливо при этом может быть загазовано, что затрудняет нормальную работу агрегатов системы питания двигателей.

Для нормальной подачи жидких компонентов топлива в двигатель КА снабжают системой обеспечения запуска (СОЗ) двигателя в условиях невесомости. Для баков больших объемов (более 2 м^3) наиболее рациональной является инерционная СОЗ, создающая перед запуском маршевого двигателя небольшие ускорения, под действием которых жидкость перемешивается к заборному устройству в баке, газовые пузырьки сепарируются из топлива, колебания свободной поверхности уменьшаются.

При запуске ЖРД необходимо учитывать, что в слабом силовом поле свободная поверхность топлива при его истечении с большими расходами сильно искривляется, поэтому остаток незабираемого топлива в баке может быть значительным.

Перемещения жидких масс, возникающие при чередовании активных и пассивных участков полета, могут неблагоприятно повлиять на динамику движения КА и должны учитываться при выборе эффективности органов стабилизации.

В задачи данной лабораторной работы входят экспериментальное определение характера и параметров движения жидкости в баках при мгновенном увеличении продольной перегрузки, имитирующей запуск ЖРД в условиях невесомости, и определение сил, обусловленных подвижностью жидкого топлива в баках КА.

Экспериментальное исследование динамических процессов в топливных баках при запуске ЖРД в условиях невесомости

В условиях, близких к невесомости, на поведение жидкости влияют силы поверхностного натяжения. Свободная поверхность жидкости существенно искривляется. Возмущения, возникающие при работе различных систем (астроориентации, стабилизации и др.), могут привести к разрушению свободной поверхности, дроблению газовой подушки и загазовыванию топлива. В этих условиях равновесие и движение жидкости описываются сложными нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных, решение которых затруднительно. Поэтому прибегают к экспериментальным исследованиям с использованием методов физического моделирования.

Эксперимент, выполняемый в данной лабораторной работе, проводится в наземных условиях. Начальное положение газообразной и жидкой фаз в баке, соответствующее условиям невесомости, моделируется искусственным образом с помощью эластичной резиновой оболочки, ограниченной сплетенной из тонких токопроводящих проволочек сеткой, которая при надувании оболочки сжатым воздухом плотно с ней соприкасается, а при подаче электрического напряжения сгорает, пережигая оболочку. Продольное ускорение, возникающее при запуске ЖРД, имитируется ускорением свободного падения $g = 9,8 \text{ м/с}^2$, под действием которого при разрушении оболочки жидкые массы приходят в движение.

Начальная форма искусственной свободной поверхности жидкости в баке определяется предварительно из решения нелинейного дифференциального уравнения гидростатики: $Bof + K_0 = \text{const}$ при заданных уровнях наполнения бака H/R и углах смачивания θ . Здесь f – уравнение свободной поверхности жидкости; K_0 – удвоенная средняя кривизна свободной поверхности; $B_0 = \rho g R^2/A$ – число Бонда. В условиях невесомости для сферического бака решением этого уравнения будет $K_0 = \text{const}$ – поверхность постоянной средней кривизны, т.е. часть сферы, параметры которой $(r/R = f(H/R))$ определяются по графику (рис. П. 12).

После разрушения искусственно созданной свободной поверхности с помощью регистрирующей аппаратуры определяют основные параметры движения жидкости: перемещения центральной и пристеночной точек свободной поверхности жидкости, глубину проникновения газовых пузырьков при опадании всплеска, спектр газовых включений, время успокоения колебаний свободной поверхности и декремент колебаний.

Влияние подвижности жидкости на динамические характеристики КА в исследуемом процессе оценивают с помощью так называемых вариационных сил F_B . Если применить к системе оболочка бака – жидкость принцип затвердевания и использовать теорему об изменении количества движения системы:

$$(m_0 + m_{\infty}) \frac{dV_C}{dt} = F - \rho \cdot \frac{du}{dt} dV = F + F_B,$$

где m_0 , m_{∞} – массы твердой оболочки и жидкости соответственно; V_C – скорость оболочки; F – главный вектор внешних сил, действующих на систему; u – относительная скорость жидкости; V – объем, занятый жидкостью, то нетрудно получить формулу для подсчета вариационной силы, обусловленной относительным движением жидкости в баке,

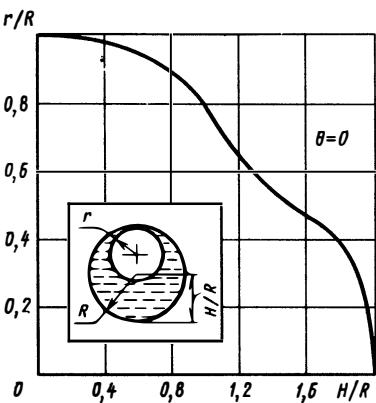


Рис. П.12.

$$F_B = \Delta Q + (m_0 + m_{\infty}) \frac{dV_C}{dt}. \quad (\text{П. 6.1})$$

Используя полученную в эксперименте осциллограмму, можно определить изменение реакций опор ΔQ подвески бака и его ускорение dV_C/dt .

Описание лабораторной установки

Общий вид установки показан на рис. П. 13. На раме смонтированы блок подсветки, модель бака, кинокамера, автомат пуска установки. Рядом размещаются шлейфовый осциллограф, компрессор, тензостанция, питающее устройство. Блок подсветки 1

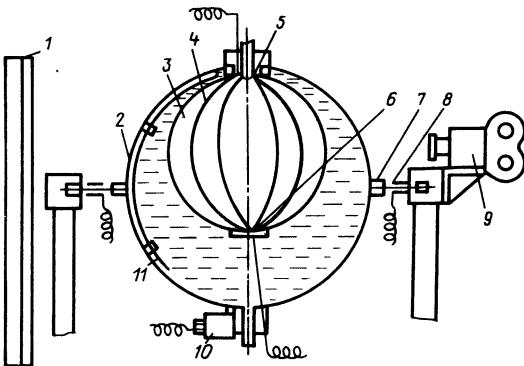


Рис. П.13.

расположен за моделью, что позволяет производить киносъемку на "просвет".

Модель сферического бака 2 изготовлена из органического стекла в виде двух разъемных полусфер. Полусфера крепятся друг к другу по фланцам с помощью прижимных колец. Модель имеет два штуцера в верхней и нижней полусферах для подачи воздуха и воды. На штуцере верхней полусферы закрепляется эластичная оболочка 3, формирующая при подаче в нее воздуха начальную поверхность раздела жидкость—газ.

Ограничителем оболочки является сплетенная из тонких токопроводящих проволочек сетка 4, которая при надувании эластичного мешка плотно прилегает к пленке. Сетка состоит из меридианальных проволочек диаметром 0,2 мм, концы которых крепятся к верхнему неподвижному 5 и нижнему подвижному 6 электродам.

Разрушение искусственно созданной свободной поверхности осуществляется при подаче электрического напряжения на электроды. Сетка сгорает по всей длине проволочек и прожигает пленку, в результате чего жидкие массы приходят в движение.

Возмущения, возникающие от разрушения сетки и эластичной пленки, незначительно сказываются на характере движения основного объема жидких масс. Погрешности определения параметров движения жидкости не превышают 5 %.

Сетку монтируют предварительно, когда модель разобрана на две полусферы. К фланцам модели крепятся держатели, с помощью которых бак подвешивается на две пружины 7. Реакции опор измеряют с помощью проволочных тензодатчиков 8, наклеенных на эти пружины. Ускорения бака dV_C/dt измеряют акселерометром 10.

Перемещение жидкости в баке регистрируется с помощью емкостного датчика 11 на осциллограмме и модифицированной кинокамерой 9. Скорость съемки 80 кадров/с. Для привязки кинокадров ко времени начала эксперимента на кинокамере устанавливают датчики отметки кадров контактного типа.

Показания акселерометра и датчиков перемещения жидкости и бака, отметки кадров и временных сигналов записывают на шлейфовом осциллографе, которым управляют автоматически с пульта управления установки.

В пульт управления вмонтирован специальный автомат запуска для последовательного включения осциллографа, кинокамеры и подачи напряжения на электроды. Экспериментальная установка предусматривает возможность регулирования включения каждого сигнала. Надув резиновой оболочки осуществляется воздухом от компрессора, соединенного гибкими шлангами с верхним штуцером модели бака. Регулировка давления — автоматическая, с помощью реле давления.

Порядок выполнения работы

Перед проведением эксперимента необходимо определить по графикам (см. рис. П. 12) начальную форму свободной поверхности жидкости в баке в усло-

виях невесомости для заданного коэффициента заполнения. Подготовительные работы по изготовлению и монтажу оболочки и сетки и заполнению модели жидкостью и сжатым воздухом выполняются раньше.

Эксперимент проводится в следующей последовательности:

- 1) на пульте управления включают питание электросхемы (блока автоматики, кинокамеры, блока подсветки и др.);
- 2) тумблером "Запись" включают автомат запуска, обеспечивающий необходимую последовательность срабатывания элементов установки и приборов;
- 3) регистрацию экспериментальных результатов прекращают после успокоения колебаний жидкости в модели тумблером "Отбой".

По окончании опыта результаты расшифровывают. По кинограмме и осциллограмме определяют последовательные положения центральной и пристеночной точек свободной поверхности начиная с момента разрушения пленки; строят графики перемещений, скорости и ускорения этих точек; определяют глубину проникновения газовой фазы в жидкость, спектр газовых пузырьков, время сепарации и успокоения колебаний свободной поверхности, декремент колебаний. По осциллограмме строят график изменения реакции опор $\Delta Q(t)$ и ускорения оболочки dV_C/dt .

Поскольку в пределах упругих деформаций прогибы подвески бака $\Delta y(t)$, зарегистрированные на осциллограмме, пропорциональны приложенной силе, перемещение бака $\Delta l(t)$ и реакция опор $\Delta Q(t)$ определяются по формулам

$$\Delta l = k_1 \Delta y; \quad \Delta Q = k_1 k_2 \Delta y,$$

где k_1 – тарировочный множитель; k_2 – коэффициент упругости подвески.

Ускорение оболочки dV_C/dt определяют по показаниям акселерометра, записанным на осциллограмме.

По формуле (П. 6.1) для заданных преподавателем моментов времени подсчитывают значение вариационной силы F_B , обусловленной относительным движением жидкости в модели.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2.

КУРСОВАЯ РАБОТА

"ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ РАКЕТЫ"

Материалы настоящего приложения предназначены для выполнения курсовой работы на ЭВМ. Здесь приведены описания алгоритмов и программ расчета на ЭВМ типичных задач динамики – задач выбора коэффициентов усиления автомата стабилизации с помощью построения областей устойчивости и исследования эффективности органов управления для различных моментов времени полета ракеты.

§ П. 2.1. АЛГОРИТМЫ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ И УПРАВЛЯЕМОСТИ ДВИЖЕНИЯ

Ракета рассматривается как абсолютно твердое тело переменной массы с "замороженным" жидким топливом в баках. Компоновочные схемы и основные проектные параметры ракеты считаются заданными. Задаются также параметры программного изменения характеристик ракеты и ее движения, полученные в результате баллистических расчетов. Анализируется возмущенное движение аппарата по каналу тангажа, отличное от программного из-за воздействия различных возмущающих факторов.

Курсовая работа состоит из двух частей, которые могут иметь самостоятельное значение. В первой выбираются параметры автомата стабилизации (АС) – коэффициенты усиления k , k_1 – так, чтобы обеспечивалась локальная устойчивость програм-

много движения системы ракета–автомат стабилизации. Во второй части исследуется эффективность заданных органов управления. Коэффициенты, характеризующие эффективность, в сочетании с предельно допускаемыми углами отклонения рулей определяют максимальные значения управляющих сил и моментов, которые должны обеспечивать параметры возмущенного движения ракеты в пределах заданных ограничений.

Процедура выбора коэффициентов усиления автомата стабилизации, подробно изложенная в § 2.6, сводится к построению областей устойчивости в координатах k, k_1 при фиксированных значениях остальных параметров. Плоскость исследуемых параметров подвергается D -разбиению путем построения линий, разделяющей области с определенным распределением корней характеристического уравнения (2.6.4) замкнутой системы уравнений (2.6.1) и (2.6.2). Динамические коэффициенты системы подсчитываются по формулам

$$c_{yy} = \frac{1}{2} (c_{x0_a} + c_{y_a}^\alpha) \rho S V_C; \quad c_{\vartheta y} = \frac{x_F}{2} (c_{x0_a} + c_{y_a}^\alpha) \rho S V_C;$$

$$c_{y\vartheta} = -(P + \frac{1}{2} c_{y_a}^\alpha \rho S V_C^2); \quad c_{\vartheta\vartheta} = \frac{x_F}{2} (c_{x0_a} + c_{y_a}^\alpha) \rho S V_C^2,$$

в которых параметры $c_{x0_a}, c_{y_a}^\alpha, \rho, S, V_C, x_F, P$ соответствуют программным значениям для исследуемого момента времени t_i и задаются из таблиц баллистических расчетов.

Коэффициенты $c_{y\delta}$ и $c_{\vartheta\delta}$, характеризующие эффективность органов управления, определяются по формулам:

для газоструйных рулей

$$c_{y\delta} = \frac{1}{2} c_y^\delta \rho_\Gamma V_\Gamma^2 S_p; \quad c_{\vartheta\delta} = -\frac{x_p}{2} c_y^\delta \rho_\Gamma V_\Gamma^2 S_p,$$

где ρ_Γ, V_Γ – плотность и скорость истечения газов из сопла ЖРД; x_p – расстояние от точки приложения управляющей силы до центра масс ракеты;

для поворотного маршевого двигателя

$$c_{y\delta} = P; \quad c_{\vartheta\delta} = -x_p P;$$

для поворотных управляющих двигателей

$$c_{y\delta} = P_p; \quad c_{\vartheta\delta} = -x_p P_p;$$

при дифференциальном дросселировании двигателей в связке

$$c_{y\delta} = 0; \quad c_{\vartheta\delta} = -a P,$$

где a – расстояние между продольными осями камер сгорания ЖРД.

Если управление осуществляется рассогласованием тяги двигателей, под $\Delta\delta_\vartheta$ понимается степень дросселирования или форсирования тяги $\Delta\delta_\vartheta = \Delta P/P$.

Массу ракеты в исследуемый момент времени t_i определяют по формуле

$$m(t_i) = m(t_K) + m_0(t_i) + m_\Gamma(t_i),$$

или

$$m(t_i) = m(0) - (\dot{m}_0 + \dot{m}_\Gamma) t_i,$$

где $m(0)$ – масса ракеты в момент старта; \dot{m}_o , \dot{m}_Γ – секундные массовые расходы окислителя и горючего соответственно; $m(t_K)$ – масса ракеты в конце активного участка (масса конструкции); $m_o(t_i)$, $m_\Gamma(t_i)$ – масса окислителя и горючего в момент времени t_i .

При $t = 0$ массы топлива, окислителя и горючего определяются по формулам

$$m_\Gamma(0) = m(0) - m(t_K); \quad m_o(0) = \frac{m_\Gamma(0) k_G}{1 + k G}; \quad m_\Gamma(0) = \frac{m_\Gamma(0)}{1 + k G},$$

где k_G – заданный коэффициент соотношения компонентов топлива. Найдем секундные массовые расходы окислителя и горючего:

$$\dot{m}_o = m_o(0)/t_K; \quad \dot{m}_\Gamma = m_\Gamma(0)/t_K,$$

где t_K – продолжительность активного участка полета.

В исследуемый момент времени $t = t_i$ массы окислителя и горючего подсчитываются по формулам

$$m_o(t_i) = m_o(0) - \dot{m}_o t_i;$$

$$m_\Gamma(t_i) = m_\Gamma(0) - \dot{m}_\Gamma t_i.$$

Для определения инерционных характеристик в момент времени t_i геометрические параметры ракеты, которые задаются в исходных данных относительно среза сопла (рис. П. 14), пересчитываются относительно центра масс.

$$\text{Длины баков окислителя и горючего } L_o = \frac{m_o(0)}{\rho_o S}; \quad L_\Gamma = \frac{m_\Gamma(0)}{\rho_\Gamma S}.$$

Уровни окислителя и горючего в момент времени t_i

$$H_o = \frac{m_o(t_i)}{\rho_o S}; \quad H_\Gamma = \frac{m_\Gamma(t_i)}{\rho_\Gamma S}.$$

Координаты центров масс окислителя и горючего от торцевого шпангоута

$$x_{\text{ц.м.о.}}(t_i) = x_{\text{дн.о.}} + \frac{H_o}{2}; \quad x_{\text{ц.м.г.}}(t_i) = x_{\text{дн.г.}} + \frac{H_\Gamma}{2},$$

где $x_{\text{дн.о.}}$, $x_{\text{дн.г.}}$ – координаты нижних днищ баков окислителя и горючего, отсчитываемые от торцевого шпангоута, соответственно.

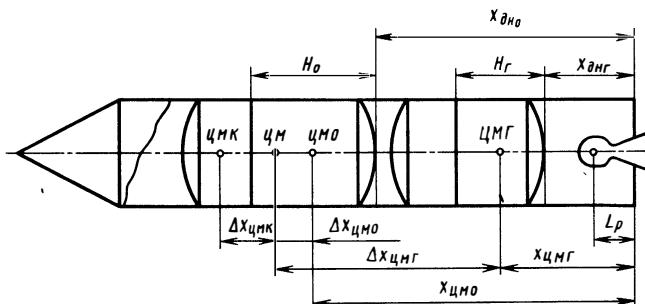


Рис. П.14.

Координата центра масс ракеты в момент времени t_i определяется по формуле

$$x_{\text{Ц.М.}}(t_i) = \frac{m_K x_{\text{Ц.М.К.}} + m_O(t_i) x_{\text{Ц.М.О.}}(t_i) + m_\Gamma(t_i) x_{\text{Ц.М.Г.}}(t_i)}{m_K + m_O(t_i) + m_\Gamma(t_i)}.$$

Момент инерции ракеты J_z подсчитывается как сумма собственных моментов инерции конструкции (заданная величина), компонентов "замороженного" топлива в баках и переносных моментов инерции, обусловленных несовпадением центров масс конструкции, топлива и ракеты:

$$J_z = J_{zK} + m_K \Delta x_{\text{Ц.М.К.}}^2 + m_O(t_i) \left[\frac{H_0^2(t_i)}{12} + \frac{D^2}{16} \right] + m_O(t_i) \Delta x_{\text{Ц.М.О.}}^2 + \\ + m_\Gamma(t_i) \left[\frac{H_\Gamma^2(t_i)}{12} + \frac{D^2}{16} \right] + m_\Gamma(t_i) \Delta x_{\text{Ц.М.Г.}}^2,$$

где D – диаметр топливных баков; $\Delta x_{\text{Ц.М.К.}} = x_{\text{Ц.М.К.}} - x_{\text{Ц.М.}}$; $\Delta x_{\text{Ц.М.Г.}} = x_{\text{Ц.М.}} - x_{\text{Ц.М.Г.}}$.

Если исследуется ракета пакетной схемы, момент инерции должен быть увеличен на величину

$$\Delta J_z = \sum_{n=1}^k m_n(t_i) y_{\text{Ц.М.н.}}^2,$$

где k – число боковых блоков; $m_n(t_i)$ – масса n -го бокового блока в момент времени t_i ; $y_{\text{Ц.М.н.}}$ – координата центра масс бокового блока от продольной оси ракеты.

Для определенности полагаем, что демпфирование отсутствует ($\nu_y = \mu_z = 0$); постоянные времени автомата стабилизации заданы; $T_1 = 0,1$ с, $T_2^2 = 0,01$ с².

Значения k и k_1 , соответствующие границе области устойчивости, определяются в зависимости от частоты ω по формулам (2.6.8), (2.6.9). При этом частота варьируется в диапазоне от 0,01 до 15.

Повторяя расчеты по предложенной методике, строят области устойчивости для трех-четырех фиксированных моментов времени t_i с интервалами 5...10 с (рис. П. 15). Общая часть всех полученных областей устойчивости представляет собой область выбора параметров k и k_1 , при которых устойчивость обеспечивается в интересующем нас интервале времени. Зона поиска общей области устойчивости – прямоугольник, ограниченный прямыми $k = k^*$, $k = k_{\min}$, $k_1 = k_{1\min}$, $k_1 = k_{1\max}$. Совместя с этим прямоугольником сетку с шагом Δk , Δk_1 , точки плоскости, являющиеся узлами сетки, проверяют по критерию Гурвица на принадлежность общей области устойчивости для всех рассматриваемых моментов времени.

После проверки всех узлов сетки по критерию Гурвица нетрудно установить минимальные k_{\min} , $k_{1\min}$ и максимальные k_{\max} , $k_{1\max}$ значения коэффициентов, принадлежащих общей области устойчивости. Искомые коэффициенты усиления вычисляются по формулам

$$k = \frac{k_{\min} + k_{\max}}{2};$$

$$k_1 = \frac{k_{1\min} + k_{1\max}}{2}.$$

Исследование эффективности органов управления достаточно подробно рассмотрено в § 2.8.

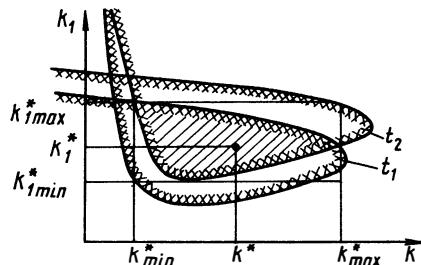


Рис. П.15.

В курсовой работе тип органов управления задается. Необходимо самостоятельно выбрать первый вариант значений коэффициентов $c_{y\delta}$ и $c_{\vartheta\delta}$, характеризующих эффективность рулей, и предельного угла их отклонения $\delta_{\vartheta\max}$. Значение потребного максимального угла отклонения органов управления ($\delta_{\vartheta\max}$) в первом приближении определяется по формулам:

при управлении поворотом маршевых двигателей или рулевыми двигателями

$$\delta_{\vartheta\max} = \frac{1,2 \Delta M_z \max}{P x_p},$$

где $\Delta M_z \max$ – максимальное значение возмущающего момента; P – тяга двигателей (маршевых или рулевых);

при управлении рассогласованием тяги маршевых двигателей

$$\delta_{\vartheta\max} = \frac{1,2 \Delta M_z \max}{a P};$$

при управлении газовыми рулями

$$\delta_{\vartheta\max} = \frac{2,4 \Delta M_z \max}{c_y^\delta S_p \rho_T V_g^2 x_p}.$$

Значение производной c_y^δ для газовых рулей можно рассчитать по методике, изложенной в [7]. Ориентировочно $c_y^\delta = 1 \dots 3$ 1/рад. Площадь газовых рулей $S_p = 0,1 \dots 0,2 \text{ м}^2$.

Для проверки достаточности выбранных значений $c_{y\delta}$, $c_{\vartheta\delta}$, $\delta_{\vartheta\max}$ необходимо на заданном интервале времени проинтегрировать систему уравнений (2.6.1), (2.6.2), дополненную ограничением $|\Delta \delta_\vartheta| \leq \delta_{\vartheta\max}$. Интегрирование проводится методом Рунге–Кутта 2-го порядка.

Возмущающими факторами являются задаваемые скорость ветра и перекос или эксцентризитет двигательной установки. Возмущающие силы и моменты, действующие на ракету по каналу тангажа, подсчитываются по формулам

$$\Delta F_y = \frac{1}{2} (c_{x0_a} + c_{y_a}^\alpha) \rho S V_C W_{by} + \sum_{n=1}^k P_n \Delta x_n;$$

$$\Delta M_z = \frac{1}{2} x_F (c_{x0_a} + c_{y_a}^\alpha) \rho S V_C W_{by} + \sum_{n=1}^k (L_p \Delta x_n - y_n) P_n,$$

где W_{by} – проекция скорости ветра на ось OY (при сложном профиле рассчитывается на каждом шаге интегрирования); Δx_n – перекос тяги n -го двигателя; y_n – эксцентризитет n -го двигателя с тягой P_n . На рис. П. 16 приведены различные варианты зависимостей скорости W_{by} от времени действия t .

Начальные значения параметров возмущенного движения $\Delta \vartheta(0)$, $\Delta V_y(0)$, $\Delta \delta_\vartheta(0)$ и т.д. для определенности принимаются нулевыми.

В процессе интегрирования может оказаться, что в некоторый момент времени $t = t_j$ $|\Delta \delta_\vartheta(t_j)| = \delta_{\vartheta\max}$ и $\Delta \delta_\vartheta(t_j)$ – возрастающая функция. Начиная с этого момента времени управляющие силы и моменты, входящие в систему уравнений возмущенного движения (2.6.1), имеют максимальные значения $\pm c_{y\delta} \delta_{\vartheta\max}$, $\pm c_{\vartheta\delta} \delta_{\vartheta\max}$, а закон управления (2.6.2) имеет вид $\Delta \delta_\vartheta(t) = \delta_{\vartheta\max}$.

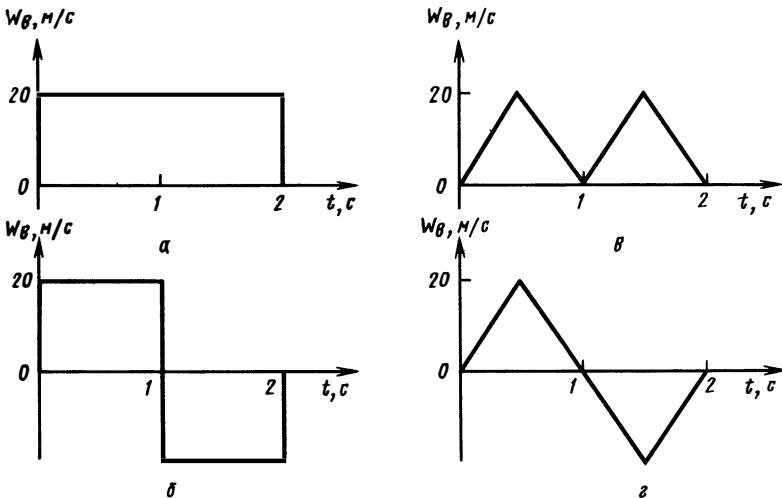


Рис. П.16.

Измененную систему уравнений при $t > t_j$ интегрируют с известными начальными значениями возмущений параметров движения $\Delta\vartheta(t_j)$, $\Delta V_y(t_j)$, $d\Delta\vartheta(t_j)/dt$ и т.д., определенными в конце предыдущего участка. Интегрирование системы заканчивается для момента времени $t = t_k$, когда начинает выполняться равенство

$$|k \Delta\vartheta + k_1 \frac{d\Delta\vartheta}{dt}| = \delta_{\vartheta \max},$$

причем левая часть – убывающая функция. С момента времени $t = t_k$ возмущенное движение вновь описывается системой уравнений (2.6.1), (2.6.2). При ее интегрировании считаются известными начальные значения $\Delta\vartheta(t_k)$, $\Delta V_y(t_k)$, $d\Delta\vartheta(t_k)/dt$ и т.д.

Найденные в процессе интегрирования возмущения параметров движения ракеты $\Delta\vartheta(t)$, $\Delta V_y(t)$ сравнивают с заданными из условий требуемой точности ограничениями $\Delta\tilde{\vartheta}$, $\Delta\tilde{V}_y$. Если на заданном интервале времени неравенства $|\Delta\vartheta(t)| < \Delta\tilde{\vartheta}$, $|\Delta V_y(t)| < \Delta\tilde{V}_y$ выполняются, то выбранные значения коэффициентов $c_{y\delta}$ и $c_{\vartheta\delta}$, а также $\delta_{\vartheta \max}$ достаточны для стабилизации ракеты.

Если ограничения на возмущения параметров движения не выполняются, необходимо увеличить эффективность органов управления или предельные углы их отклонения и повторить интегрирование системы (2.6.1), (2.6.2). Результаты интегрирования оформляются в виде графиков зависимостей $\Delta\vartheta(t)$, $\Delta V_y(t)$, $\Delta\delta_\vartheta(t)$, $\Delta F_y(t)$, $\Delta M_z(t)$.

§ П. 2.2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО РАБОТЕ С ПРОГРАММОЙ DIN

Программа DIN написана на языке ФОРТРАН IV и реализована на ЭВМ СМ-4 в режиме TSX RAFOS.

Программа предназначена для исследования динамических параметров ракеты и автомата стабилизации, состоит из подпрограмм, комбинация которых позволяет решать следующие задачи.

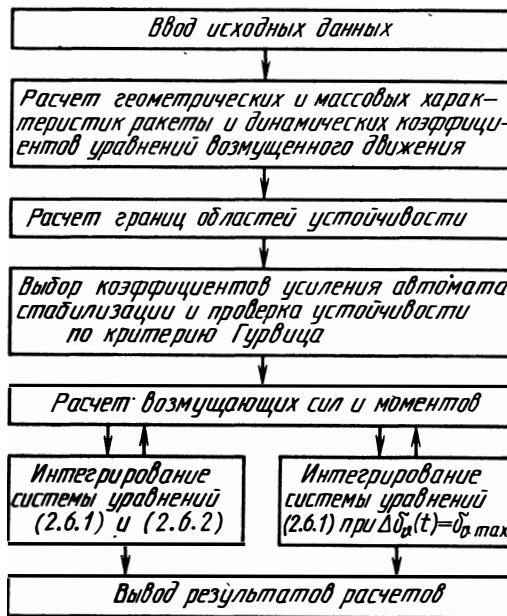


Рис. П.17.

- Построение областей устойчивости в плоскости коэффициентов усиления АС и выбор коэффициентов k, k_1 из общей области.
- Построение областей устойчивости, автоматический выбор коэффициентов k, k_1 , проверка эффективности органов управления по тангажу с выбранными коэффициентами усиления АС.
- Проверка эффективности органов управления по тангажу с заданными коэффициентами усиления АС. Структурная схема программы DIN укрупненно показана на рис. П.17.

Порядок работы с программой DIN следующий.

- Задаются исходные данные. Для вызова файла исходных данных на экране дисплея необходимо набрать команду $DAN \rightarrow DIN_n$, где $n = 1\dots 8$ – номер дисплея.

Все координаты отсчитываются от среза сопла.

Задаются следующие исходные данные:

фамилия, группа пользователя;

L7 – режим работы:

- построение областей устойчивости, 2 – построение областей устойчивости и проверка эффективности органов управления;

L6 – режим работы;

1 – k, k_1 задаются, 2 – автоматический выбор k, k_1 ;

NLA – тип ракеты:

1 – с ЖРД, 2 – с РДТТ;

NT – число моментов времени (точек), для которых строят области устойчивости и выбирают из общей области ($NT \leq 5$) k, k_1 .

NU – вид органов управления:

1 – поворотные маршевые двигатели, 2 – газовые рули, 3 – дросселирование тяги, 4 – поворотные рулевые двигатели;

NTI – номер точки, для которой происходит интегрирование уравнений движения;

K1 – коэффициент усиления АС k ;
 K2 – коэффициент усиления АС k_1 ;
 ТК – продолжительность активного участка (с);
 МФ – начальная масса ракеты (кг);
 МТ – масса топлива $m_T(0)$ (кг);
 SM – площадь миделевого сечения (м^2);
 LS – координата центра масс не заправленной топливом ракеты (м);
 IZS – момент инерции не заправленной топливом ракеты ($\text{кг} \cdot \text{м}^2$);
 LP – координата точки приложения управляющих моментов (расстояние от среза сопла до точки крепления рулей) (м);
 ROG – плотность горючего ($\text{кг}/\text{м}^3$);
 XGF – координата нижнего днища бака горючего (м);
 ROO – плотность окислителя ($\text{кг}/\text{м}^3$);
 XOФ – координата нижнего днища бака окислителя (м);
 КМ – стехиометрическое соотношение компонентов (для ракеты с ЖРД);
 SR – площадь рулей (м^2), (для NU = 2);
 CYDL – производная c_y^δ по углу атаки для рулей (1/рад); (для NU = 2);
 W – скорость истечения газов из двигателей V_T (м/с) (для NU = 2);
 R1 – плотность истекающих газов ($\text{кг}/\text{м}^3$) (для NU = 2);
 A – расстояние между маршевыми двигателями (м), (для NU = 3);
 PR – тяга рулевых двигателей (Н) (для NU = 4);
 T(1) – секунда полета (с);
 CX(1) – коэффициент аэродинамического сопротивления c_{x0_a} ;
 CY(1) – производная c_y^α (1/рад);
 XF(1) – координата фокуса (м);
 RO(1) – плотность набегающего потока ($\text{кг}/\text{м}^3$);
 V(1) – скорость ракеты (м/с);
 P(1) – тяга маршевых двигателей (Н);
 T(2)...P(5) – данные для 2...5 точек;
 RMAX1 – максимально допускаемый угол отклонения рулей $\delta_{\vartheta_{\max}}$ ($^\circ$);
 RMAX2 – максимально допустимое отклонение угла тангажа $\Delta\vartheta$ ($^\circ$);
 Y – перекос в установке двигателей (рад);
 VV – максимальная скорость ветра (м/с);
 TI – время интегрирования (с);
 PRMT3 – шаг интегрирования (с) (рекомендуется задавать 0,01...0,02 с);
 PRMT4 – точность интегрирования (рекомендуется задавать 0,0001);
 TV – время действия ветра (с);
 L8 – профиль ветра:
 1 – рис. П.16, а, 2 – рис. П.16, б, 3 – рис. П.16, в, 4 – рис. П.16, г
 Для записи исходных данных на диск необходимо нажать клавиши <СУ> <В>.
 II. После задания исходных данных программа запускается в счет командой
 $FR \leftarrow DIN_n$.
 III. Результаты счета вызываются на экран дисплея командой $WP \leftarrow DIN_n$, на автоматическое печатающее устройство – командой $UP DIN_n$. Распечатываются следующие данные:
 1. Исходные данные для построения области устойчивости:
 NLA – тип ракеты;
 NT – число моментов времени, для которых строятся области устойчивости;
 NU – вид органов управления;
 L7, L6 – режимы работы;
 K1, K2 – задаваемые коэффициенты усиления АС;
 ТК – продолжительность активного участка (с);
 МФ – стартовая масса (кг);
 МТ – начальная масса топлива (кг);

SM – площадь миделевого сечения (m^2) ;

ЦМ СУХ – координата центра масс незаправленной ракеты от среза сопла (м) ;

МОМ ИН СУХ – момент инерции незаправленной ракеты ($kg \cdot m^2$) ;

LP – расстояние от среза сопла до точки крепления рулей (м) ;

ROO, ROG – плотности окислителя и горючего (kg/m^3) ;

ХОФ, ХГФ – координаты нижних днищ баков окислителя и горючего от среза сопла (м) ;

КМ – стехиометрическое соотношение компонентов ;

I – номер момента времени, для которого производится построение области устойчивости ;

T – секунда полета (с) .

Далее данные для заданной секунды :

СХ, СУ – аэродинамические коэффициенты c_{x0a} , c_y^α ;

XF – координата фокуса от среза сопла (м) ;

РО – плотность атмосферы (kg/m^3) ;

V – скорость центра масс ракеты (м/с) ;

P – тяга двигателей (Н) .

2. Результаты расчета параметров ракеты в момент времени, для которого строится область устойчивости :

CYY, CYT, CTY, CTT – динамические коэффициенты c_{yy} , $c_{y\vartheta}$, $c_{\vartheta y}$, $c_{\vartheta\vartheta}$;

CYD, CTD – коэффициенты, $c_{y\delta}$, $c_{\vartheta\delta}$, характеризующие эффективность органов управления ;

M – масса ракеты (кг) ;

МОМ ИНЕРЦИИ – момент инерции ракеты ($kg \cdot m^2$) ;

ЦМ – координата центра масс ракеты от среза сопла (м) .

3. Таблица "область устойчивости". В таблице распечатываются значения k , k_1 , для следующих значений ω :

0,05; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15.

4. После таблицы "область устойчивости" для последнего из исследуемых моментов времени распечатываются :

IEND – число точек, общих для всех областей устойчивости ($IEND \leq 50$) ;

k , k_1 – значения коэффициентов усиления АС, выбранные из общей области устойчивости .

5. Исходные данные для интегрирования уравнений движения :

1...5 – номер точки интегрирования – номер точки траектории, для которой производится интегрирование уравнений движения ;

T – секунда полета, начиная с которой происходит интегрирование уравнений движения ;

RMAX2 – максимально допускаемое значение возмущения угла тангажа ($^\circ$) ;

RMAX1 – максимально допускаемый угол отклонения органов управления ($^\circ$) ;

Y – перекос в установке двигателей (рад) ;

VV – максимальная скорость ветра (м/с) ;

TI – интервал интегрирования (с) ;

PRMT3 – шаг интегрирования (с) ;

PRMT4 – точность интегрирования ;

Профиль ветра.

6. Таблица результатов интегрирования, в которой распечатываются :

ВРЕМЯ – секунда полета (с) ;

F – возмущающая сила (Н) ;

MZ – возмущающий момент ΔM_z ($N \cdot m$) ;

TETA – возмущение угла тангажа $\Delta \vartheta$ ($^\circ$) ;

DELTA – угол отклонения органов управления $\Delta \delta_\vartheta$ ($^\circ$) ;

DTETA – производная $d \Delta \vartheta / dt$;

DDELTA – производная $d \Delta \delta_\vartheta / dt$.

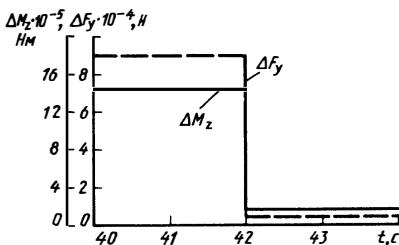


Рис. П.18.

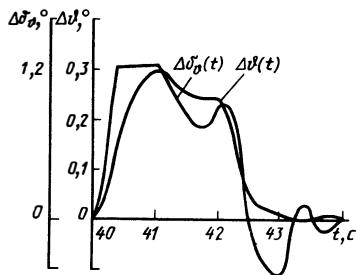


Рис. П.19.

Результаты в таблице печатаются через 10 шагов интегрирования. Если в конце расчета печатается сообщение:

!!! УГОЛ ТАНГАЖА = ... ПРЕВЫШЕНО ОГРАНИЧЕНИЕ,

то необходимо увеличить эффективность органов управления или максимально допускаемый угол их отклонения, или изменить значение предельно допускаемого возмущения угла тангажа. Для увеличения эффективности органов управления необходимо увеличить тягу управляющих двигателей (при управлении рулевыми двигателями) или увеличить площадь рулей (при управлении газовыми рулями).

Курсовая работа оформляется в виде пояснительной записи. В записи указываются исходные данные (компоновочная схема ракеты, заданные геометрические и массовые характеристики и др.). Кратко излагаются цель и методика выполнения работы, приводятся исследуемые системы уравнений, формулы для расчета динамических коэффициентов этих уравнений, определения коэффициентов усиления автомата стабилизации k и k_1 , возмущающих сил и моментов, предельных углов отклонения органов управления. В записку включают распечатки результатов расчетов на ЭВМ, приводят построенные по ним графики областей устойчивости (см. рис. П.15), зависимости изменения по времени возмущающих сил и моментов, возмущений углов тангажа $\Delta\vartheta(t)$ и отклонения органов управления $\Delta\delta_{\vartheta}(t)$.

В качестве иллюстрации на рис. П.18 и П.19 показаны эти зависимости, построенные по результатам расчета одного из вариантов задания.

В заключение в записи приводятся выводы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абгарян К.А. Матричные и асимптотические методы в теории линейных систем. М.: Высшая школа, 1983. 359 с.
2. Абгарян К.А., Рапопорт И.М. Динамика ракет. М.: Машиностроение, 1969. 378 с.
3. Абгарян К.А. Устойчивость движения на конечном интервале времени. Итоги науки и техники. Общая механика. Т. 3. М.: Наука, 1976.
4. Айзerman М.А. Теория автоматического регулирования. М.: Наука, 1966. 452 с.
5. Алексеев К.Б., Бебенин Г.Г. Управление космическими летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1974. 343 с.
6. Аппазов Р.Ф., Лавров С.С., Мишин В.П. Баллистика управляемых ракет дальнего действия. М.: Наука, 1966. 270 с.
7. Аржаников Н.С., Садекова Г.С. Аэродинамика летательных аппаратов. М.: Высшая школа, 1983. 359 с.
8. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. М.: Физматгиз, 1961. 228 с.
9. Каргу Л.И. Системы угловой стабилизации космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1980. 172 с.
10. Колесников К.С. Динамика ракет. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.
11. Колесников К.С., Самойлов Е.А., Рыбак С.А. Динамика топливных систем ЖРД. М.: Машиностроение, 1975. 171 с.
12. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1968. 720 с.
13. Краснов Н.Ф. Аэродинамика. М.: Высшая школа, 1980. Ч. 2. 416 с.
14. Лебедев А.А., Чернобровкин Л.С. Динамика полета беспилотных летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1973. 616 с.
15. Механика полета. Инженерный справочник/С.А. Горбатенко, Э.М. Макашов, Ю.Ф. Полушкин и др. М.: Машиностроение, 1969. 419 с.
16. Микишев Г.Н., Рабинович Б.И. Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. М.: Машиностроение, 1968. 532 с.
17. Микишев Г.Н., Рабинович Б.И. Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость. М.: Машиностроение, 1971. 463 с.
18. Микишев Г.Н. Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1978. 247 с.
19. Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 440 с.
20. Нариманов Г.С., Докучаев Л.В., Луковский И.А. Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью. М.: Машиностроение, 1977. 208 с.
21. Основы строительной механики ракет/Л.И. Балабух, К.С. Колесников, В.С. Зарубин и др./М.: Высшая школа, 1969. 494 с.
22. Рабинович Б.И. Введение в динамику ракет-носителей космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1983. 296 с.
23. Рапопорт И.М. Колебания упругой оболочки, частично заполненной жидкостью. М.: Машиностроение, 1967. 360 с.
24. Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление. М.: Наука. 1971. 395 с.
25. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1987. 430 с.
26. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 443 с.
27. Соловьев В.В., Плотников В.Н., Яковлев А.В. Основы теории и элементы систем автоматического регулирования. М.: Машиностроение, 1985. 535 с.
28. Строительная механика летательных аппаратов/И.Ф. Образцов, Л.А. Булычев, В.В. Васильев и др. М.: Машиностроение, 1986. 536 с.
29. Федосьев В.И. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1970. 554 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автоколебания ракеты 238
— продольные 311
- Автомат стабилизации 55
- Аккумулятор давления 340
- Акустическое сопротивление 332
- Амплитуда автоколебаний жидкости 240
- Амплитудно-частотные характеристики 98, 224, 288
- Асимптотическая устойчивость движения 75
- Аэродинамическая сила 25
— стабилизация 390
- Аэродинамический фокус ракеты 26, 61
- Бак топливный 309
- Балансировочный угол атаки 60
- Баллистические ракеты 3
- Бесселя уравнения 315
— функции 319
- Верньерные двигатели 30
- Вертикаль 346
- Ветровые возмущения 41
- Вибраторы 427
- Воздушные рули 30
- Возмущающие силы и моменты 47, 50, 215
- Возмущенное движение 38
- Возмущения аэrodинамические 41
— весовые 40
— коэффициентов 42
— параметров 41
— тяги двигателей 41
- Волны акустические 335
- Вынужденные колебания жидкости 170
- Вычет функции 91, 131
- Гирокопические исполнительные органы 376
- Главный вектор момента 7
— — — аэродинамических сил 26
— — — вариационных сил 13
— — — реактивных сил 13
— — — сил Кориолиса 13
— — — сил аэrodинамических 25
— — — вариационных 13
— — — внешних 7
— — — реактивных 13
— — — Кориолиса 13
- Главные моменты инерции ракеты 193
— оси инерции 20
- Годограф разомкнутой системы автоматического регулирования 100, 226, 307
- Гравитационная постоянная 391
— стабилизация 380
- Граничные условия 137, 139, 332
- Гурвица определитель 77
- Давление в жидкости 140
— наддува баков 140, 313
— на срезе сопла двигателя 14
- Датчик инерционный 428
— угловых скоростей 400
— уровня емкостей 428
- Двигательная установка (ДУ) 23
- Демпфирующие моменты 27
— перегородки баков 240
- Долгота восходящего узла орбиты 345
- Жесткость корпуса ракеты 244, 318
- Жидкостный ракетный двигатель (ЖРД) 309
- Жидкость идеальная 134
— несжимаемая 135
- Задача Неймана 144
- Закон управления 55
— линейный 56
— релейный 400, 411
- Зоны нечувствительности датчиков 400
- Идеальная жидкость 134
— ориентация космического аппарата 419
- Изображающая точка 401
- Изображение по Лапласу 86
- Импеданс 332
— граничный 332
- Инерционный маховик 375
- Интеграл Коши—Лагранжа 140
- Истинная аномалия, угол 345
- Кавитация 337
- Кинетический момент гирокопа 376
— — — инерционного маховика 419
- Колебания жидкости вынужденные 172
— — — свободные 176
— — — собственные 160

- Координата фокуса 26
 – центра масс ракеты 21
 – – невозмущенной свободной поверхности жидкости 152
 Корпус ракеты 309
 Космический аппарат (КА) 342
 Коэффициенты сопротивления аэродинамического 25
 – подъемной силы аэродинамической 25
 – демпфирования 237
 – усиления автомата стабилизации 103, 206
 Краевые условия 136
 Критерий подобия 426
 – устойчивости движения ракеты Гурвица 77
 – – – Каменкова Г.В. 65
 – – – локальные 79
 – – – Ляпунова А.М. 63
 – – – Моисеева Н.Д. 66
 – – – Найквиста 100, 226
 – – – по методу "замороженных" коэффициентов 75
 – – – технические 66
 Лапласа уравнение 135
 Линеаризация уравнений движения 46
 Линия Д-разбиения 108
 Логарифмический декремент колебаний 85, 266
 Магистраль расходная топливоподающая 311, 331
 Магнитосфера 371
 Масса жидкого топлива 189
 – приведенная 285, 322
 – ракеты 24
 – конечная 448
 – начальная 448
 – распределенная 252
 "Медленное" время 112
 Местный угол атаки 252
 – – тангенциальный 286
 Метод "замороженных" коэффициентов 68
 Моделирование 424
 Модуль упругости 339
 – Юнга 318
 Момент инерции жидкого топлива 186, 193
 – – ракеты 182, 193
 – – твердого тела 19
 Момент гиростабилизации 377
 – магнитный 372
 – сил аэродинамических 26
 – – вариационных 13
 – – воздействия жидкого топлива 214, 216
 – – гравитационных 363
 – – давления света 369
 – – Кориолиса 10, 34
 – – реактивных 12
 – – тяги двигателей 24
 – – управляющих 30
 Наддув баков 340
 Наклонение орбиты, угол 345
 Насыщение инерционного маховика 412
 Невозмущенное движение 38
 Обечайка 314
 Области устойчивости 106
 Обобщенные координаты 55
 Оболочка баков, упругая 312
 Объем жидкости 193
 Ориентация КА 343
 Ортогональность собственных функций 164, 264
 Особая прямая 109
 – точка 109
 Осциллограф 429
 Отклонение органов управления 30
 – – – предельно допустимые 121
 Ошибка стабилизации 405
 Параметры автомата стабилизации
 – ракеты 39, 40
 Плотность воздуха 25, 41, 357
 – жидкости 339, 427
 – материала корпуса 246, 316
 Площадь воздушных рулей 30
 – выходного сечения сопла двигателя 23
 – миделевого сечения ракеты 25
 Передаточная функция ракеты 86, 90, 95
 Переизывающая сила 244
 Переходная функция 89, 93
 Период автоколебаний КА 402, 404
 – собственных колебаний ракеты 85
 Поверхность бака смоченная 136
 – жидкости свободная 136
 Потенциал волновых перемещений жидкости 142, 147
 – скоростей жидкости 135
 – – – векторный 141
 – – – Жуковского 143, 151
 Принцип затвердевания ракеты 15
 Программное движение 38

- Радиус бака 167
 – Земли 371
 – инерции 193, 194
 – магнитосферы 371
 Ракета баллистическая 3, 5
 – носитель 3
 Рассогласование тяг двигателей 31
 Расход рабочего тела, секундный 12, 405
 Регулятор 55
 Рули воздушные и газовые 30
 Рыскания, угол 21

 Свободное возмущенное движение ракеты 78
 Силы аэродинамические 24
 – вариационные 13
 – внешние 14
 – гравитационные 361
 – давления света 369
 – Кориолиса 34
 – обусловленные перемещением центра масс ракеты 36
 – – подвижностью жидкого топлива 214
 Сильфоны 340
 Системы координат базовые 344
 – – инерциальные 5
 – – орбитальные 345
 – – связанные 21
 – – стартовые 20
 – – узловые геоцентрические 344
 Системы постоянного и переменного состава 5, 6
 – разгрузки инерционных маховиков 422
 Скоростной напор 30, 361
 Скорость абсолютная, относительная, переносная 6
 – ветра 27
 – звука 324, 339
 – угловая 16
 – центра масс ракеты 16
 Собственные значения и функции краевой задачи 161, 261
 – колебания корпуса, изгибные 269
 – свободной поверхности жидкости 160
 Стабилизация аэrodинамическая 390
 – гравитационная 380
 Статическая устойчивость ракеты 60

 Тангажа, угол 21
 Тензодатчик 428
 Топливный насос 309
 Топливо жидкое 312

 Трубопровод акустически закрытый или открытый 334
 Турбонасосный агрегат (ТНА) 309
 Тяга реактивного двигателя 15, 23

 Угол атаки 26
 – – местный 252
 – – крена 21
 Угол отклонения органов управления 29
 – рыскания 21
 – тангажа 21
 Удельный импульс 374
 Уравнения Бесселя 315
 – Лапласа 135
 Управляемость 59
 Управляющие микрореактивные двигатели 374
 – силы и моменты 29
 Ускорение 7
 – кажущееся 139
 Условия амплитудной стабилизации ракеты 103, 236, 308
 – безвихревого движения жидкости 135
 – "захвата" при аэродинамической стабилизации КА 395
 – – при гравитационной стабилизации КА 390
 – несжимаемости жидкости 135
 – фазовой стабилизации ракеты 102, 232, 307
 Устойчивость 59
 – локальная 66
 – статическая 60
 – техническая 66

 Фазово-частотные характеристики ракеты 98, 224
 Фазовый параметр 401
 – сдвиг автомата стабилизации 102, 226
 Формулы Гаусса–Остроградского 144
 – Грина 165
 – Жуковского 185
 Формы собственных колебаний 148, 265
 Форсуночная головка ЖРД 311
 Фурье, метод 260, 332

 Характеристики частотные ракеты 96, 224, 288
 – – автомата стабилизации 99, 225
 Характеристический многочлен 71, 111

- | | |
|--|---|
| Центр давления, аэродинамического | Число Бонда 426 |
| 11, 24 | – Вебера 426 |
| – масс жидкости 189 | – Кнудсена 357 |
| – ракеты 26 | – Маха 331 |
| | – Рейнольдса 357 |
| | – Фруда 426 |
| Частота собственных колебаний жидкости 164 | Эксцентризитет орбиты 391 |
| – – – корпуса 265 | Эффективность инерционных маховиков 423 |
| – – – ракеты 85 | – органов управления ракеты 121 |

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора	3
ГЛАВА 1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ РАКЕТЫ	5
§ 1.1. Основные теоремы динамики системы переменного состава.	5
§ 1.2. Переносное движение системы переменного состава.	7
§ 1.3. Системы переменного состава с твердой оболочкой. Принцип затвердевания	11
§ 1.4. Принцип затвердевания для ракеты	13
§ 1.5. Уравнения движения центра масс ракеты	15
§ 1.6. Уравнения вращательного движения ракеты	18
§ 1.7. Системы координат	20
§ 1.8. Кинематические соотношения	22
§ 1.9. Силы, действующие на ракету в полете	23
§ 1.10. Динамические уравнения движения ракеты в развернутом виде	36
§ 1.11. Невозмущенное и возмущенное движение	38
§ 1.12. Линеаризация уравнений возмущенного движения	40
§ 1.13. Расщепление линеаризованных уравнений возмущенного движения	53
§ 1.14. Законы управления	55
§ 1.15. Общий вид уравнений возмущенного движения	56
ГЛАВА 2. УСТОЙЧИВОСТЬ И УПРАВЛЯЕМОСТЬ РАКЕТЫ	59
§ 2.1. Понятия об устойчивости и управляемости	59
§ 2.2. Метод "замороженных" коэффициентов	68
§ 2.3. Критерии устойчивости движения по методу "замороженных" коэффициентов	69
§ 2.4. Ракета как линейный объект автоматического управления	78
§ 2.5. Требования к частотным характеристикам автомата стабилизации из условия устойчивости системы автоматического управления ракеты	99
§ 2.6. Области устойчивости. D-разбиение	106
§ 2.7. Уточнение метода "замороженных" коэффициентов. Учет переменности коэффициентов уравнений	110
§ 2.8. Эффективность и предельно допустимые отклонения органов управления	121
ГЛАВА 3. СТАБИЛИЗАЦИЯ ДВИЖЕНИЯ РАКЕТЫ С УЧЕТОМ ПОДВИЖНОСТИ ЖИДКОГО ТОПЛИВА В БАКАХ	134
§ 3.1. Основные положения о физических свойствах жидкого топлива. Потенциал скоростей	134
§ 3.2. Краевые условия для потенциала скоростей	136
§ 3.3. Малые колебания жидкого топлива в баках	141
§ 3.4. Потенциалы Жуковского	143
§ 3.5. Малые колебания жидкости в неподвижном баке. Потенциал перемещений	145
§ 3.6. Колебания свободных поверхностей жидкостей в подвижных топливных баках	148
§ 3.7. Вычисление потенциалов Жуковского	151
§ 3.8. Колебания свободной поверхности жидкости в осесимметричном топливном баке	154
§ 3.9. Собственные колебания свободных поверхностей жидкостей в топливных баках	159
§ 3.10. Формы и частоты собственных колебаний свободной поверхности	161

§ 3.11. Собственные колебания свободной поверхности жидкости в цилиндрическом топливном баке	167
§ 3.12. Вынужденные колебания свободных поверхностей жидкого топлива в баках	170
§ 3.13. Учет рассеяния энергии в уравнении колебаний свободной поверхности жидкости	175
§ 3.14. Колебания центра масс ракеты. Уравнение сил	176
§ 3.15. Момент количества движения ракеты	179
§ 3.16. Учет подвижности жидких компонентов топлива при расчете моментов инерции ракеты	181
§ 3.17. Уравнение моментов. Теорема Жуковского	183
§ 3.18. Вычисление моментов инерции ракеты	185
§ 3.19. Уравнения движения ракеты, учитывающие подвижность жидкостей в топливных баках	194
§ 3.20. Уравнения продольного движения, движения в плоскостях тангла, рыскания и крена.	196
§ 3.21. Преобразование уравнений движения в системы обыкновенных дифференциальных уравнений	208
§ 3.22. Уравнения возмущенного движения, учитывающие подвижность жидких компонентов топлива	213
§ 3.23. Расчет коэффициентов дифференциальных уравнений возмущенного движения	217
§ 3.24. Частотные характеристики ракеты как объекта автоматического регулирования	221
§ 3.25. Фазовая стабилизация колебаний корпуса ракеты и свободных поверхностей жидкостей в топливных баках	226
§ 3.26. Автоколебания ракеты в плоскости тангла	236
 ГЛАВА 4. СТАБИЛИЗАЦИЯ ДВИЖЕНИЯ РАКЕТЫ С УЧЕТОМ УПРУГОСТИ ЕЕ КОРПУСА	242
§ 4.1. Простейшая постановка задачи об изгибных колебаниях корпуса ракеты	242
§ 4.2. Дифференциальное уравнение изгибных колебаний	243
§ 4.3. Уравнение сил и уравнение моментов	247
§ 4.4. Дифференциальные уравнения движения ракеты в плоскости тангла, учитывающие упругость корпуса ракеты	252
§ 4.5. Собственные изгибные колебания корпуса ракеты в плоскости тангла	259
§ 4.6. Расчет форм и частот собственных изгибных колебаний методом последовательных приближений	267
§ 4.7. Преобразование уравнений движения ракеты в плоскости тангла в бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений	273
§ 4.8. Дифференциальные уравнения возмущенного движения в плоскости тангла, учитывающие упругость корпуса ракеты	281
§ 4.9. Расчет частотных характеристик ракеты как объекта автоматического регулирования методом суммирования рядов	285
§ 4.10. Определение частотных характеристик ракеты как регулируемого объекта из обыкновенного дифференциального уравнения	290
§ 4.11. Стабилизация движения ракеты с учетом упругости ее конструкции	304
 ГЛАВА 5. СТАБИЛИЗАЦИЯ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ РАКЕТЫ С ЖИДКОСТНЫМ РАКЕТНЫМ ДВИГАТЕЛЕМ	309
§ 5.1. Постановка задачи о продольных колебаниях	309
§ 5.2. Продольные колебания баков, заполненных жидким топливом	312
§ 5.3. Продольные колебания упругого корпуса ракеты	323

§ 5.4. Колебания жидкого топлива в расходных магистралях	331
§ 5.5. Способы обеспечения продольной устойчивости ракеты	339
ГЛАВА 6. СТАБИЛИЗАЦИЯ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ РАКЕТ И КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ НА ПАССИВНЫХ УЧАСТКАХ ПОЛЕТА	342
§ 6.1. Особенности динамики ракет и космических аппаратов на пассивных участках полета	342
§ 6.2. Системы координат, применяемые в динамике КА	344
§ 6.3. Уравнения возмущенного движения КА на пассивных участках полета	351
§ 6.4. Силы и моменты, действующие на КА в условиях космического полета	355
§ 6.5. Пассивная стабилизация вращательного движения КА	379
§ 6.6. Стабилизация вращательного движения КА, снабженного системой управления	396
ПРИЛОЖЕНИЯ	424
<i>Приложение 1. Экспериментальные методы исследования динамических характеристик ракет. Лабораторные работы по курсу "Динамика ракет"</i>	424
§ П.1.1. Моделирование динамических процессов в конструкциях и топливных баках ракет. Критерии подобия	424
§ П.1.2. Виброзадающая и регистрирующая аппаратура	427
§ П.1.3. Лабораторная работа "Определение частот, форм и декремента упругих свободных колебаний ракет на конструктивно подобных моделях"	429
§ П.1.4. Лабораторная работа "Определение декремента колебаний жидкости в баках с демпфирующими устройствами"	433
§ П.1.5. Лабораторная работа "Определение динамических характеристик топливных баков на конструктивно подобных моделях при продольных колебаниях"	438
§ П.1.6. Лабораторная работа "Исследование динамических процессов в топливных баках КА при запуске двигателя в условиях невесомости"	443
<i>Приложение 2. Курсовая работа "Исследование устойчивости движения ракеты"</i>	446
§ П.2.1. Алгоритмы исследования устойчивости и управляемости движения	446
§ П.2.2. Методические указания по работе с программой DIN	451
Список литературы	456
Предметный указатель	457

Учебное издание

Абгарян Карлен Арамович, Калязин Эрнст Львович, Мишин Василий
Павлович, Рапопорт Илья Маркович

ДИНАМИКА РАКЕТ

Редактор Е.И. Черных

Художественный редактор В.В. Лебедев

Технический редактор Г.Г. Семенова

Корректор Л.В. Тарасова

Операторы В.И. Копылова, С.А. Качанова, И.В. Павлова

ИБ № 6069

Сдано в набор 29.02.89.

Подписано в печать 19.02.90.

Т-07037.

Формат 60×88 1/16.

Бумага офсетная № 2.

Гарнитура Пресс Роман.

Печать офсетная.

Усл. печ. л. 28,42.

Усл. кр.-отт. 28,42.

Уч.-изд. л. 30,33.

Тираж 4400 экз.

Заказ № 168.

Цена 1 р. 30 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство "Машиностроение",
107076, Москва, Строгинский пер., 4

Отпечатано в московской типографии № 8 Союзполиграфпрома
при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли 101898, Москва, Хохловский пер., 7, с оригинала-макета,
изготовленного в издательстве "Машиностроение" на наборно-пишущих машинах

